

## 図形課題「はとめ返し」の探究 －レポート学習の活用を通して－

風間喜美江・杉本紘野\*

760-8522 高松市幸町 1 - 1 香川大学教育学部

\*760-8522 高松市幸町 1 - 1 香川大学大学院教育学研究科

## Exploring of the geometric problem 'HATOME GAESI' － by using “report learning” －

Kimie KAZAMA and Hirono SUGIMOTO\*

*Faculty of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522, Japan*

*\*Graduate School of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522, Japan*

### 1. 問題の所在と研究のねらい

本研究は、「所与の課題を解決し、そこから探究・発展させる図形学習－レポート学習の活用を通して－」（風間・杉本，2014）の一環である。そこでは、中学校数学で、学習の困難性を示す内容として図形，特に証明をあげる生徒が多く，その問題点として次のア～エを取り上げた，

ア．図形の性質を発見するのに有効である実験実測の学習方法とのつながりを持たせようとしな  
い教師の姿勢

イ．教科書の「証明せよ」の問いかけに，すぐに入ろうとする記述中心の証明指導

ウ．生徒にとってはまだ具体的な図の段階であるのに，教師は一般的な概念である図形について  
の説明しようとしているという乖離

エ．局所的なできあがりつつある生徒の論理的な思考力を感じ取り，その成長を待つことができ  
ずに，「生徒には難しすぎる」と速断してしまう。

そして，中学校図形で論理的な思考力の育成をめざし，特にイ，エに着目し，この問題に関する  
指導の改善を考察した。教師は教科書にあるような証明を書かせることに目がいき，教科書以外

の表現や思考の段階を汲み取る意識の不足，さらに教科書の証明表現に関連した思考に集中した指導の偏りが考えられる。生徒の「つぶやき」から多少であっても論理的な思考力を汲み取ること，「説明」の段階を大切にすること，素朴な表現から「説明表現」そして「証明」へと，緩やかな思考段階・表現段階を考え，徐々にそれらを育てることが見落とされがちであるということに焦点をしぼり，次のことをねらいとして研究をすすめた。

生徒自らが考える図形の証明に関する課題を考察し，生徒の視点に応じて課題を探究・発展させる証明を中心とする図形学習について，実証的に検討すること

本研究もこのねらいについて，以下の研究授業等を踏まえながら実証的に考察を行う。

特に，研究授業で取り上げた図形課題「はとめ返し」について取り上げ，次の方法で研究を進める。

- ① 生徒が探究できると考えた図形課題「はとめ返し」の研究授業を通して実証的に考察する。
- ② ①の授業後の「はとめ返し」の課題探究のためのレポートに書くことを通して，課題探究の力を養う活動を実証的に考察する。

## 2. 証明に関する課題を発展的に探究させる図形指導の基本的な考え

「所与の課題を解決し，そこから探究・発展させる図形学習－レポート学習の活用を通して－」（風間・杉本，2014）では，課題探究の基本方針は，核となる課題を与えて，発展的な命題をつくらせていることであった。発展の基となる課題は与えるものの，発展の考えは命題自身の発展，構成要素の関係の発展である。本研究のねらいである，「課題解決を通して証明を考察すること」「生徒の視点に応じた発展をすること」から，次の指導の方針をとることにする。

- a. 多様な視点や結論がだせる核となる課題を与える。
- b. 核となる課題の仮定の一部を変えて，生徒の視点に応じて拡げて考えられる。
- c. 探究・発展を通して，生徒の多様な表現活動ができる工夫をする。

上記 a, b, c は，高次な「学び」への過程として必要な指導であると考えた。

c については，香川大学附属坂出中学校との共同研究（風間・大前他3名，2014）での，「数学を学ぶ意味を実感させるための教師のかかわりのあり方」や「レポート学習の活用」の研究を通してその可能性の研究を進めてきた。その考察からレポートを書く活動は c に関して有効であると判断できた。以下では，上記指導方針をもとに，研究授業およびレポートを書く活動（以後これをレポート学習と呼ぶ）を紹介し，その妥当性を述べる。

## 3. 指導内容と構成，核となる課題と設定

### （1）研究計画

本研究は，中2図形「平行線の性質」「三角形の合同」後の「平行四辺形，いろいろな四角形」の指導研究の一環として行われたものである。そのため，証明初期の指導「平行線の性質」「三角形の合同」ではなく，その後の指導の中で実施する研究とした。「三角形の合同」と「いろいろな四角形」を橋渡しの「のりしろ」のような学習と中2図形の論証のゴール的な内容の四角形の包摂関係までの，与えられた課題を解決する学習，それを探究・発展させる学習の考察と授業実施・

## 図形課題「はとめ返し」の探究

レポート学習を計画するものである。

### (2) 指導計画

- |  |           |
|--|-----------|
| ① 2つの正三角形（復習，条件にあった図，図形を動的に捉える）          | 2時間       |
| ② 生徒が①の課題の仮定を変え解決するレポート課題（冬休みの課題・レポート学習） |           |
| ③ 平行四辺形の性質                               | 2時間       |
| ④ 平行四辺形の性質の利用                            | 1時間       |
| ⑤ 平行四辺形になるための条件（定理とその逆，辺と角の条件を組み合わせ）     | 3時間       |
| ⑥ いろいろな四角形（三角形の中に現れる平行四辺形）               | 2時間       |
| ⑦ 三角形・四角形の辺の中点（中点連結定理・はとめ返し）             | 2時間（本時）   |
| ⑧ いろいろな四角形の応用の課題レポート                     | （⑦指導後の課題） |
|  | 計 12時間    |

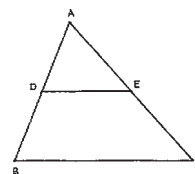
〔注〕①は教師だけが，⑥は教師と生徒がタブレット端末を使った授業である。

### (3) 本研究の核となる課題

#### I) 中点連結定理に関する課題

##### 〔課題1〕

△ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとします。  
△ADEを点Eを中心に右回りに回転させ，AがCに重なりました。  
この図を完成させ，どんなことがいえるか考えよう。

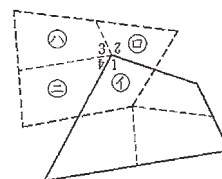
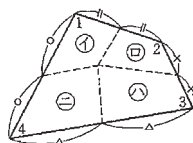
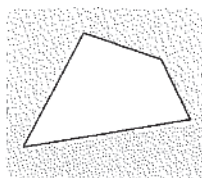
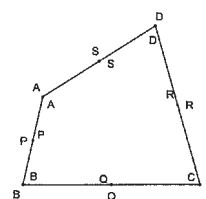


#### II) はとめ返しの課題

##### 〔課題2〕

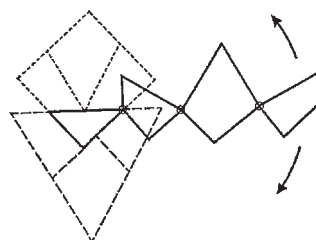
どんな四角形でも，次のように切り分けて並べかえると，いろいろな形に変えることができます。

- (1) 四角形ABCDがあり辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれP，Q，R，Sとします。
- (2) 四角形ABCDの内部にある点Xをとります。XとP，Q，R，Sを結びます。
- (3) 下の図のように，四角形の1つの頂点に集めるように並べかえます。



(1) ～ (3) でできる図形について考えましょう。

はとめ返しの題材はH.E.デュードニー著「カンタベリー・パズル」(2009)に掲載されている。右図のように4個の切片を3個の「はとめ(ひもを通す穴に取りつける小さな金属の輪)」でつなぎ、左端の三角形の切片を固定しておく。右端の四角形の切片を上側に回していけば正方形(点線)、下側に回していけば正三角形(破線)が得られるというものである。この題材をもとに、四角形の内部に任意の点を取り、この点と四角形の各辺の中点とを結ぶ4本の線分で、上記Ⅱ)はとめ返しの課題のように四角形を4個に分割し、新しい四角形をつくる。「数理パズル」(1976, 池野他)には、その任意の点の位置やその数によって、いろいろな図形ができることが紹介されている。本実践では、この題材から、教材化し授業の課題とした。



#### 4. 授業の実践

##### (1) 授業実施・対象

- ① 指導計画実施時期：平成25年12月中旬～平成26年2月上旬
- ② 指導計画⑦(第11～12時)の指導時期：平成26年1月下旬～2月上旬
- ③ 指導対象：国立大学附属中学校第2学年3クラス
- ④ 指導者：風間喜美江(筆者)

##### (2) 指導計画⑦「三角形・四角形の辺の中点」(第11～12時)の授業の実践

###### ○ねらい

- ・中点連結定理、等積変形の意味を知る。
- ・はとめ返しの課題で、課題解決の図形を予想することができる。
- ・四角形の「はとめ返し」の活動を通して、図を見る態度を養う。
- ・四角形の「はとめ返し」の活動を通して、基本的な図形の性質を振り返りかえる。
- ・図形の諸性質を使って根拠をもとに思考すること、仮定を明らかにしながら探究的な活動をする姿勢を養う。

###### ○授業の実践

第11時(「中点連結定理」の課題、「はとめ返し」の課題の導入「第1次」)

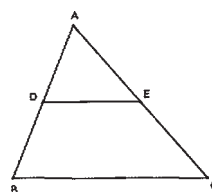
[課題1]「 $\triangle ABC$ の辺 $AB$ 、 $AC$ の中点を $D$ 、 $E$ とします。

$\triangle ADE$ を点 $E$ を中心に右回りに回転させ、 $A$ が $C$ に重なりました。」

このとき1)～3)に答えなさい。

1) 右の図で、課題1のことを仮定とする図を完成させなさい。

2) 点 $A$ が $C$ に重なった理由は？



# 図形課題「はとめ返し」の探究

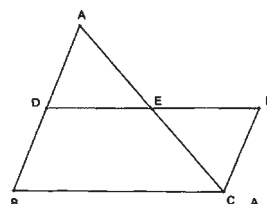
3) 点Dが回転して移動した点をFとします。完成させた図について、どんなことがいえますか。

※1) は定規、コンパスを使い作図させる。

※3) で、D、E、Fは一直線上の点であることとその理由も取り上げる。

※答えとその理由も考えさせる。

- ・  $AD \parallel FC$
- ・ 四角形ADCFは平行四辺形
- ・ 四角形DBCFは平行四辺形
- ・  $\triangle ADE \equiv \triangle CFE$  . . . . .



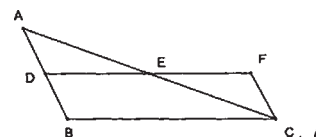
4)  $DE \parallel BC$ ,  $DE = \frac{1}{2}BC$  となるの理由を明らかにする。

- ・ 四角形DBCFは平行四辺形で、 $DE = EF$  だから

5) 他の三角形でも4) が成り立つ理由を明らかにする。

※BCを共有する他の $\triangle ABC$ をかかせ、4) が成り立つかを吟味する。

※4) の性質が「中点連結定理」と呼ばれていることを紹介する。  
また、中点連結定理は一般的には中3で扱われていることも紹介する。



6)  $\triangle ABC$ はその面積と等しい平行四辺形DBCFに形を変えたことになる。このことで等積変形の意味を確認する。

※等積変形はいろいろな四角形の学習後に平行線の性質、三角形の面積の公式とともに取り扱われることが一般的であるが、本研究はここで取扱う。

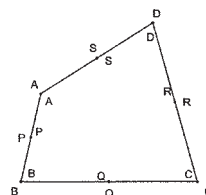
[課題2] どんな四角形でも、次のように切り分けて並べかえると、いろいろな形を変えることができます。(i) ~ (iii) からできる図形について考えましょう。

(i) 四角形ABCDがあり辺AB, BC, CD, DAの中点をそれぞれP, Q, R, Sとします。

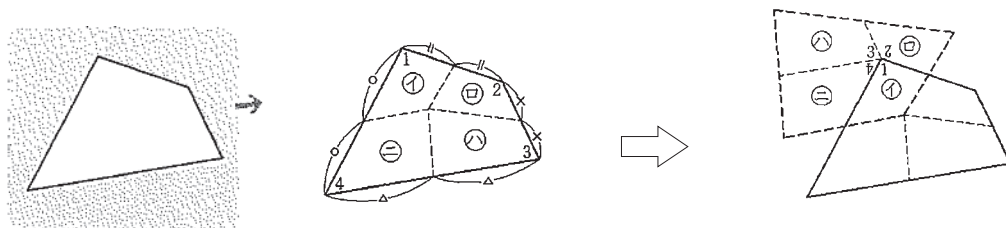
(ii) 四角形ABCDの内部にある点Xをとります。

XとP, Q, R, Sを結びます。

(iii) 下の図のように、四角形の1つの頂点に集めるように並べかえます。



7) 課題2の(i) ~ (iii)を実際に行う。



※紙に印刷された四角形A B C Dを配布する。

※ (ii) で切り分けたときに元の図の関係を意識するために、X P, X Q, X R, X S の線分を4色で塗り分けさせる。

8) 回転させてできた図形がずれたり、凹凸がなく敷き詰められる理由を明らかにする。

- ・元の四角形A B C Dの内角の和は $360^\circ$
- ・1点に集まる角も $360^\circ$
- ・四角形の辺の中点を通る直線はどれも $180^\circ$

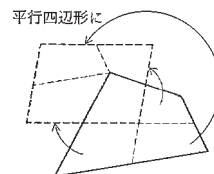
9) 1点に集める頂点を変えても8)と同様なことがいえることを確認する。

10) 元の図(四角形A B C D, 中点P, Q, R, S)と変形させた新しい四角形の辺や角のどれと対応しているのかを確認する。

11) (i), (iii) は同じで(ii)だけ工夫をし、もとの四角形を平行四辺形にしたい。どうすればよいか。

(例1) 右図

(例2) 他の方法



第12時(「はとめ返し」の課題第2次)

12) (例1) でできた四角形が平行四辺形になる理由を考える。

※8)に関することはここでも確認する。

- ・元の図形の対頂角は等しい
- ・対頂角は新しくできた四角形の対角になる。
- ・2組の対角が等しい四角形は平行四辺形

※平行四辺形になるための条件は学習直後であるから、その条件を言葉に表し、その定着をさせる。

## 図形課題「はとめ返し」の探究

13) (i) ~ (iii) のやり方で元の四角形から三角形, 長方形, その他の図形はできるかをどうかを考える。また, できない場合は元の四角形をかえればできるかを考える。

・生徒の反応例…次の写真

11) の(例1)以外の方法で考えた平行四辺形, 長方形, 台形などの図形をつくる方法を考えていた。



授業風景と生徒の発表例

### (3) 授業の考察

#### ① 生徒はどのように核となる課題を捉えようとしたか。

・中点連結定理の課題は, 教科書では中3の相似で取り上げる。三角形の相似条件を利用してその定理を説明するのが一般的な指導である。ここでは中2でこの定理に関する課題を取り上げ, その後はとめ返しの課題に共通する中点や等積変形の関連させる指導展開とした。三角形の合同条件を利用しての証明となるが, 単にこの定理の証明をするという視点より図形の性質の発見や既習事項の利用の視点に重点をおいた。それを生徒は自然に受け止めていた。1)の段階で条件にあった図がかけた生徒は3分の2であり, 条件を読み取ることができたかどうかの把握は指導に重要であった。文章から図をつくることは, 命題への意識の第一歩であると判断できた。

・中点連結定理は $\triangle ABC$ の底辺 $BC$ を共有させ, 頂点 $A$ をいろいろな所にとった場合でも, ど



れも成り立つことが5)では理解しやすかった。このように頂点Aをいろいろな位置にとることによって命題の一般性を意識することができたと生徒の反応から考えられた。

- ・はとめ返しの課題を把握することは難しかった。じっくり時間をかけ、また、実際に教具を用いて7)を示した。そのことによってやっと課題が把握できたようだった。文章・図だけでは、その意味を捉えることは難しかった。

## ② 生徒はどのように考えて、所与の課題を説明しようとしたのか。

- ・はとめ返しの課題では、元の四角形から新しい四角形ができることは理解できたが、「それがきちんと敷き詰められるか」という問いは、生徒は自ら発することはできなかった。そこで8)でそれを問うた。それほど困難性を感じずに生徒は回答をしていた。当たり前という目で見過ごすことなく、既習の学習を生かせる場面となった。
- ・はとめ返しの課題で、11)の(例1)の方法以外で平行四辺形をつくることは容易ではなかった。そこで、「平行四辺形をつくると決めます。(例1)のように点PとRをむすび線分PRをひきます。平行四辺形になるための条件で辺や角に注目し、他は自由に考えましょう。」と示唆を与え、時間をじっくりとると、いくつかの方法を考え、その説明をすることができた。この示唆から、台形になるための条件、長方形になるための条件を考え始め、図に具体的な線を入れその方法と理由を考えていた。四角形ABCDのその中点P、Q、R、Sがかかれた紙に、生徒はいろいろな線をかき込みながらじっくり取り組んでいた。1で述べた教師の考え方『エ.局所的なできあがりつつある生徒の論理的な思考力を感じ取り、その成長を待つことができずに、「生徒には難しすぎる」と速断してしまう。』ことに対し、その改善として、本授業は指導の仕方、課題の開発の具体的な提案となると考えた。

## 5. レポート学習の実際

### (1) レポート学習の実施

4の授業直後、次のように課題を提示しレポート学習を行った。指導後10日間程度で取り組む課題として示した。…28頁

### (2) 生徒のレポート例

A生徒の例…36～37頁 資料

### (3) レポート学習の生徒の反応－課題をどのように考察したか－

『課題(1)「もとの四角形ABCD」から新しい図形をつくりその説明をする。』  
に関して、生徒のレポートから、つくった図形について次の考え方が見られた。



# 図形課題「はとめ返し」の探究

## 1) 平行四辺形

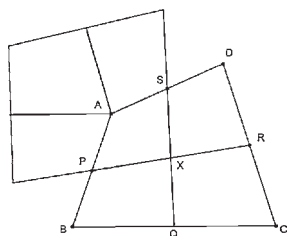


図 1

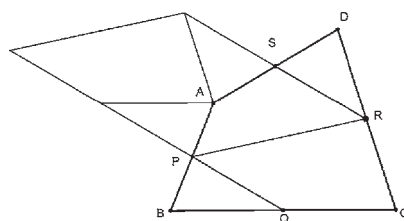


図 2

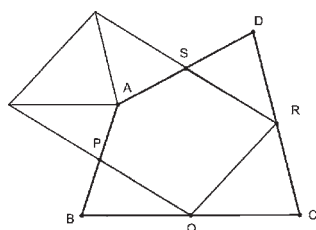


図 3

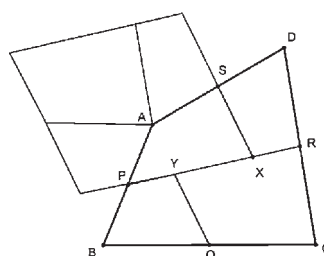


図 4

図 1 は授業でも取り上げた、点 P と R、S と Q を結んでできた線分の交点を点 X とした場合である。そして、図 2、3 は、点 X をとるのではなく、4 点 P、Q、S、R を異なる組み合わせで結んだ場合である。また、図 4 は点 X と Y を  $SX \parallel QY$  となるようにとった場合であり、この方法を発見した生徒は 2 割程度であった。

証明はどの場合でも、線分が共通であることまたは、点 P、Q、R、S が各辺の中点であることから「向かい合う辺がそれぞれ等しい」こと、または「対角がそれぞれ等しい」ことを示し、平行四辺形であることを説明できていた。しかし、図 3 の方法で新たにできた四角形が平行四辺形であるという説明ができた生徒はおらず、見た目の判断にとどまっていた。

--- 図 4 の場合の生徒の証明例 ---

$SX \parallel QY$  で錯角が等しいので

$$\angle SXY = \angle QYX \cdots \textcircled{1}$$

$$\angle PYQ = 180^\circ - \angle QYX,$$

$$\angle RXS = 180^\circ - \angle SXY \text{ だから,}$$

$$\angle PYQ = \angle RXS \cdots \textcircled{2}$$

①②より、2 組の対角がそれぞれ等しいので、平行四辺形である。

# 【四角形の変身術】 レポート

私たちの日常生活では、ジグソーパズルや切り絵など、多少不正確な形のものを集めてある新しい形をつくり出したりすることがあります。坂出中数学研究室の壁を利用したパズルもそのひとつです。そこにはいろいろな図形を動かしたり考えたりするおもしろさや楽しさがあります。

数学の授業に出てくる図形を切り離して新しい図形をつくり、試行錯誤だけではなく、これまで学習してきた図形の性質を見いだしたり活用したりして、結果に到達する取り組みをレポートにまとめましょう。そこには、きっと数学的な考え方やアイデアのすばらしさを見出すことができると思います。

## 1 レポートテーマと提出

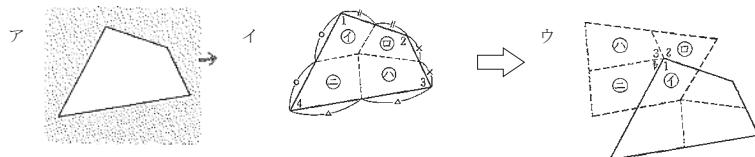
・テーマ：四角形の変身術

・提出：2月17日メ切

## 2 レポート内容

授業では、どんな四角形でも、次の①～③の順のように切り分けて並べかえると、いろいろな形に変えた図形（面積が同じで形が違う図形：等積変形）が成り立つことについて考えて、実際に図形をつくってみました。

- ① 四角形 $ABCD$ があり辺 $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$ の中点をそれぞれ $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$ とします。
- ② 四角形 $ABCD$ の内部にある点 $X$ をとります。 $X$ と $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$ を結び、切り分けます。
- ③ 下の図ウのように、四角形の1つの頂点に集めるように並べかえます。



上のことをもとに（1）、（2）をまとめましょう。

### （1）「もとの四角形 $ABCD$ 」から新しい図形をつくりその説明をする

授業では、「もとの四角形 $ABCD$ 」から「新しい四角形」と「平行四辺形」「台形」をつくりました。上の①、③は同じで②だけ工夫をし、「もとの四角形 $ABCD$ 」を

- ・授業以外の方法でつくった平行四辺形、台形
- ・平行四辺形以外の三角形・四角形（三角形、長方形、ひし形など）

に変身させましょう。説明には次のことをポイントとしましょう。

- ア）つくろうとする図形のつくり方を初めに予想し、そのつくり方が成り立つ理由を説明する。
- イ）説明するとき、図や記号を使ってすることを大切にしましょう。
- ウ）クラスの人たちにわかるような言葉を使い、丁寧に説明をする。
- エ）実際にできた図形を頂点 $A$ に集めるようにして図形を貼り付け、ア）と合致したかどうかについて述べなさい。合致しなかった場合はその理由を述べなさい。

### （2）もとの四角形 $ABCD$ を変えた別の四角形 $A'B'C'D'$ から新しい図形をつくりその説明をする。

（1）と同じようなことを行いましょう。ただし、この場合、平行四辺形、台形は授業で行った方法と同じものを取り上げてかまいません。また、（1）ではできなかった四角形については、工夫して取り組むことも考えましょう。

## 2) 台形

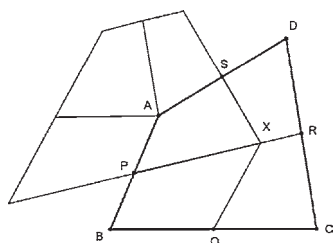


図5

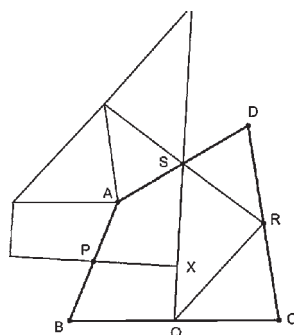


図6

図5は、点P, R (S, Q)を結びその線分上に任意に点Xをとった場合である。このとき、錯角が等しいことから1組の対辺が平行になることを示し、台形になることを示していた。

図6は、線分SQ, SR, RQを結び、さらに点Pから線分SQに垂線をひきその交点をXとした場合である。この方法を発見した生徒は一人であった。そして、点Pを含む台形の一辺の両端が $90^\circ$ になるので、一組の対辺が平行になることを示し、これが台形であることを示していた。角を $90^\circ$ にするという工夫で図4の場合より証明が簡単にできていた。

## 3) 長方形

図7は、線分PR (またはSQ)を結び、その他の点から線分PRに垂線をおろし点XとYを定めた方法である。この方法を発見した生徒のほとんどが、4つの頂点がすべて $90^\circ$ であることから長方形になることを示していた。

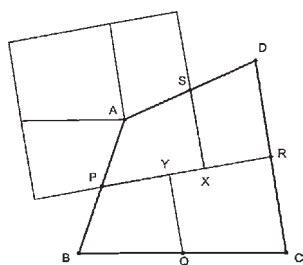


図7

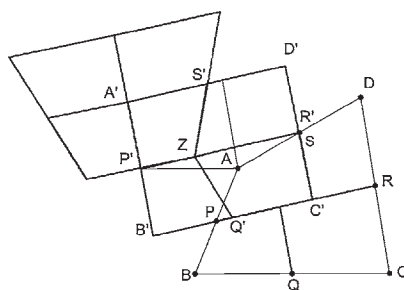


図8

また、発展として図8のように、新しくできた長方形の各頂点と中点に名前を付け、新たに点Zを取り、台形をつくっていた生徒も見られた。

また、図9のように  $SR \perp QY$ ,  $PQ \perp SX$  となるように点X, Yをとり長方形をつくった生徒も見られた。以下はその生徒が書いた説明である。

図9の場合の生徒の説明 -----

四角形F E X Sにおいて  
 仮定より、四角形S X Q Yの4つの角が全て $90^\circ$  だから  
 四角形S X Q Yは長方形である。  
 また、図中の(1)(2)は同じだから、合同であり(1)  
 の全ての角が等しくなる。  
 よって、 $\angle SFE = \angle XEF = 90^\circ \cdots \textcircled{1}$   
 また、仮定より、 $SX \perp PQ$ ,  $QY \perp RS$ だから、  
 $\angle FSX = \angle EXS = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$   
 ①②より、4つの角が全て等しいから、四角形F E X S  
 は長方形である。

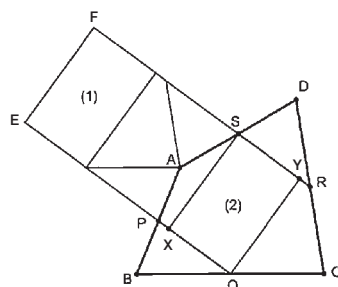


図9

#### 4) くさび形

これは、点Xを四角形P Q R Sの外部に適当にとった場合である。証明については、ほとんどの生徒が「1つの内角が $180^\circ$ より大きくなるので凹の四角形(くさび形)になる。」という説明を書いていた。ある生徒は、  
 「 $\angle RXQ = \angle RXS + \angle SXP + \angle XPQ$ で、この式は矢じりの法則にあてはまるのでこの形になる。」  
 と説明をかいており、図形のもつ性質に注目して図形を判断することができたと考える。

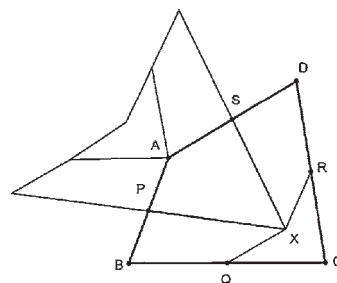


図10

#### 5) 三角形

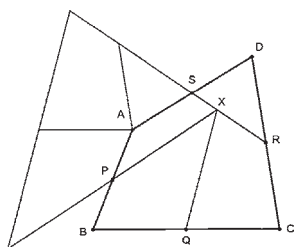


図11

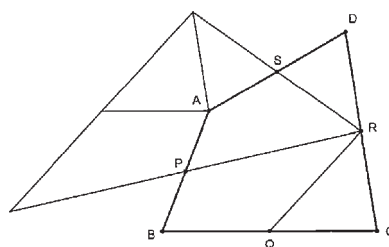


図12

三角形は主に2つの方法で作図されていた。図11は線分RS(またはPQ, またはQR)上に任意に点Xをとる方法であり、図12は点Xを、4点P, Q, R, Sの中の1点とし、他の中点と結ぶという方法である。どちらの方法も、新たにできた図形の内角が $180^\circ$ であることを示し、三角形ができたことを説明できていた。

## 図形課題「はとめ返し」の探究

図11の特殊な場合として図13のように、点Qから線分SRに垂線をおろし点Xを定めた場合、直角三角形になることを発見し説明した生徒も見られた。

図11の方法を発見するとき、くさび形の方法をふまえ、新たにできる図形が凹型にならないためにはどうすればよいかと推測した生徒も見られた。

また、図11の特殊な場合として（線分PSの垂直二等分線を作図し） $PX = SX$ となるように点Xを定めた場合、二等辺三角形になることを発見した生徒も見られた（図14）。以下はその生徒が書いた説明である。

--- 図14の場合の生徒の説明 ---  
 二等辺三角形をつくりと思った。三角形をつくる方法から、点Rと点Qを直線で結び、その線上の点をXにすると三角形ができるとわかった。  
 また、できる三角形は $2SX$ 、 $2PX$ をそれぞれ一辺とする。だから $SX = PX$ となるようにRQ上に点をとってみた。すると、予想通り二等辺三角形ができた。  
 理由は予想と同じで、 $2SX$ と $2PX$ が一辺となるからだ。  
 私は、 $SX = PX$ となるように作図したので、 $2SX = 2PX$ となり二辺が等しい三角形、二等辺三角形ができた。

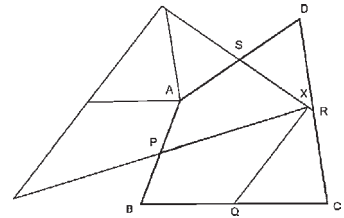


図13

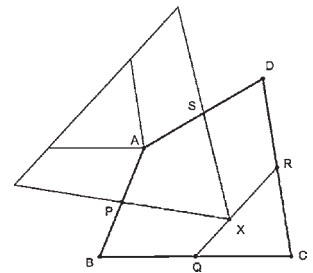


図14

『レポート課題（2）もとの四角形ABCDを変えた別の四角形A'B'C'D'から新しい図形をつくりその説明をする。』

に関して、生徒のレポートから、次のような考え方が見られた。

レポート課題（1）で元にした四角形は一般的な四角形だった。そこでレポート課題（2）では特殊な四角形の場合を考える生徒が多く見られ、長方形や正方形、平行四辺形、ひし形をもとの四角形としていた。

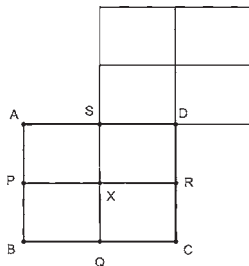


図15

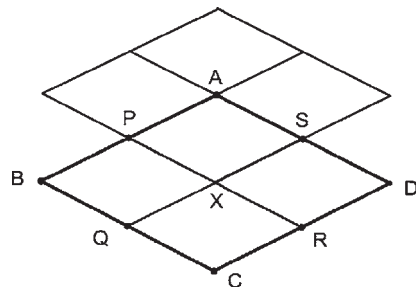


図16

レポート課題（1）で扱ったのは一般的な四角形であるので、そこで示した事柄は特殊な場合でも成り立つはずであるが、生徒の習熟度によっては「一般で成り立てば、特殊でも成り立つ」

ことの理解が不十分な場合もあった。しかし、課題（2）で生徒が特殊な場合がどうなるのかを実際に検証してみるという行動が、論理的な思考につながる大きな一歩であると考えている。当たり前でできそうな特殊な場合でも実践することで、生徒にとっての成長に影響していると考えた。

また、元の四角形をくさび形にして調べた生徒もいた。点Xは線分 $S'Q'$ と $P'R'$ の交点とし、レポート課題（1）の形のときは平行四辺形になったのでくさび形でも同様の結果になると予想し、実践していた。もとの四角形の概念を凹型まで拡張し、仮定をより一般化しようとする考えと、一部異なる仮定でも同じ結果が得られるかを検討する考えが見られた。

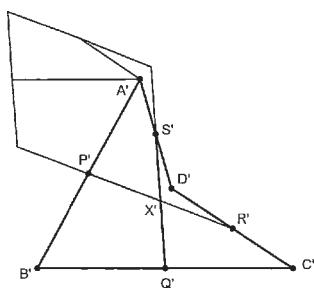


図17

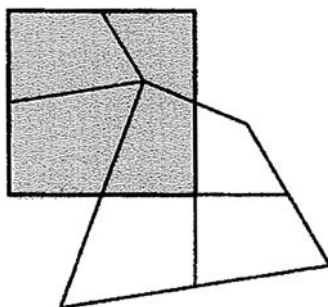


図18

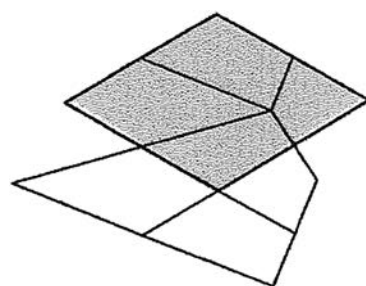


図19

また、ある生徒はレポート課題（1）でつくることができなかったひし形と正方形をつくるためにはどうすればよいのか考え、レポート課題（1）とは逆の手順ではとめ返しをしていた。つまり、ひし形や正方形をはとめ返し、もとになる四角形を考え出したのである（図18, 19）。これは、命題の逆を考えるという論理的な方法である。元の命題を考えるのが困難で行き詰まったとき、命題の逆を考え簡単に解決することを考え出すことができたのではないだろうか。また、命題の逆が成り立てば、元の命題も成り立つかどうかを検討するという所までは生徒は考えてはいなかったが、論理的な思考を身につけるきっかけになると考える。

#### （4）レポート学習の考察

以下の2点について述べる。

##### ① 疑問や発見をうながす課題解決から、それを探究・発展させることができたか。

生徒の感想をいくつか取り上げる。

「この学習をしてみてとても図形が深いことがわかった。日常にも、いろいろ（例えばゴールのネットなど）と面白い形があるので、性質について調べてみたい。」

「同じ図形なのに、切り方1つでこんなにも形が変わるものなんだとびっくりした。」

「はじめは、四角形から三角形をつくるなんて無理だろうと思っていたけど、三角形の性質を考えてそれに合うようにきるとできた。四角形から五角形や六角形などをつくることはできるのか、や逆に五角形などから三角形や四角形をつくることのできるのかをやってみたいと思った。」

「ひし形をつくるのが1番難しかった。点（X）を2カ所にとるという斬新なアイデアを思いつくのにとっても時間がかかった。」

## 図形課題「はとめ返し」の探究

「しっかり考えないでやると、全く意味のない工夫をしていたことになって結構難しかった。思い通りになったものやなかったものがあり、それを探すことは楽しかった。」

「図形をつくる前にその図形の形を予想することはとても難しかった。角度などを考えると予想することができた。」

「「ここが底辺になる」という発見から、「じゃあここにXをとると…」とどんどん発見→疑問→発見とつなげて考えていくと難しそうだと思っていたことも楽しくできた。」

「このレポートは今までやったことのない種類のレポートだったので大変だった。しかし、今まで考えることのなかったことを探究していくのは楽しかったし、一つわかるとそこから発展させて考えが広がっていった。このような考え方を大切にしていきたい。」

「授業を通して、切って移動することは面積を変えないことや、四角形を三角形に変えるなど角の数を減らすことができることがわかった。今までにないような授業なのでとても楽しかった。」

これらの感想から、生徒は最初は課題に苦戦したが、授業で学んだことから解決の糸口を探し出し、自分なりに工夫して課題に取り組んだことが伺える。また、課題を解決すると同時に、ではこの場合はどうなるのだろう」と新たな疑問や発見がうまれていた生徒も多く見られ、探究の精神が育てられたと考える。

### ② 記述中心の形式的な証明にとらわれずに、生徒自らが考えたことを自分の言葉で表現できたか。また、他者を意識した説明をすることができたか。

生徒の感想から見る。

「説明するときは記号や文字を使うと分かりやすくなることを改めて実感した。」

「今まで自分は証明なんかして何の役に立つのだろうと思っていた。でも、「この場合はどうなるの」と聞かれ、答えを言うとき証明の縮小版のようなものを僕たちは言っているのではないだろうか。「～だから～」というように説明そのものが証明になっているんじゃないかなと思った。証明というのは、自分たちが知らず知らずのうちに使っていた説明とも言えるだろう。」

これらの感想や前述の生徒の説明などから、生徒は記述中心の形式的な証明にとらわれず、口頭による説明などをヒントに分かりやすく伝えるためにはどうすればよいかを工夫していたと考える。説明の中には、同じことを重複して説明していたり、示すことが不足していたりするものもあったが、まずは自分の言葉で自分なりに説明をかくということが重要である。その後に、自分のレポートを見直したり、そのレポートをもとに発表する機会を設けたりするなどして推敲する機会を与え、説明する能力を向上させたいと考える。

また、言葉だけではなく、様々な記号や色を使い伝わりやすい工夫を凝らしたものが多く見られた。



## 6. まとめと今後の課題

本研究はのねらいは、「生徒自らが考える図形の証明に関する課題を考察し、生徒の視点に応じて課題を探究・発展させる証明を中心とする図形学習について、実証的に検討すること」であった。

そのために核となる課題とその探究・発展としてのレポート学習を実施し、そこから考察を行った。生徒の反応（授業・レポート学習）から、「所与の課題を解決し、そこから探究・発展させる図形学習－レポート学習の活用を通して－」（風間・杉本，2014）と同様に、生徒の視点や学習段階に応じて、試行錯誤をしながらも幾何的な課題から証明への意識づけができたこと、探究・発展をすることができ、研究提案の妥当性があると判断できた。

しかしながら、これも「所与の課題を解決し、そこから探究・発展させる図形学習－レポート学習の活用を通して－」（風間・杉本，2014）と同様に、生徒が行ったレポート学習での考えを交流させることは時間の関係で行うことができなかった。生徒が考えた発展は、発表、協議によってより一般的な表現、高次の証明内容になっていくことが想定できる。今後の課題としては、その時間も入れ、それぞれの生徒の初期の表現や学習段階から、指導による生徒の変容と変容後の表現や学習段階を把握することがあげられる。また、今後も生徒に証明の必要感や図形の証明の感覚を豊かにする課題の開発と指導の仕方についての継続的な研究を課題としたい。

## 図形課題「はとめ返し」の探究

### 〔引用・参考文献〕

- 風間喜美江・杉本紘野（2014），所与の課題を解決し，そこから探究・発展させる図形学習－レポート学習の活用を通して－，香川大学教育学部研究報告，pp.61-77
- 風間喜美江・大前和弘・大西光宏・中西健三・蔵本愛里（2014），「数学を学ぶ意味」を実感させるための教師のかかわりのあり方－レポート学習や振り返りカードの活用を通して－，第14回学部・附属学校園教員合同研究集会発表冊子.
- H.E デュードニー，伴田良輔訳（2009），カンタベリー・パズル，ちくま学芸文庫，pp.231-233
- 池野信一・高木茂男・土橋創作・中村義作（1976），数理パズル，中公新書，pp.127-131
- 風間喜美江（2012），図形命題の仮定を図で思考する証明活動，第45回数学教育論文発表会論文集，pp.845-850.

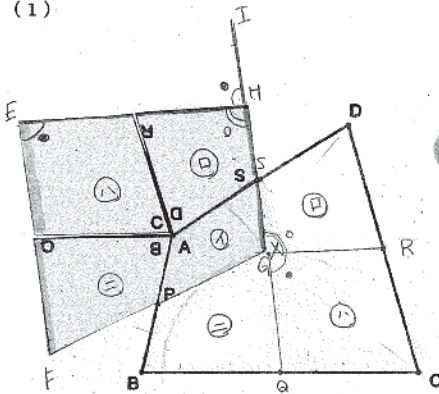
### 〔付記〕

この研究は平成24～26年度科学研究費補助金（課題番号24653279）を受けている。

資料：生徒のレポート例－A生徒－

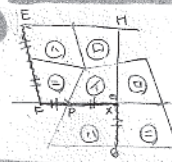
# 四角形の変身術①

(1)



仮定  $XP = XQ$

予想



左図より  $XP = XQ$  にすると  
 $EF = GF$  になる!!  
 $\Rightarrow$  2辺が等しいから  
 二等辺三角形が  
 つくれる!!

結果：合致しなかった。が台形ができた。

理由： $\angle E = \angle RGQ$  ,  $\angle H = \angle SGR$   
 で  $\angle RGQ + \angle SGR$  は一直線になる!!  
 だから  $\angle IHE$  は  $\angle E$  と等しい。したがって  
 錯角が等しいから  $HG \parallel EF$   
 よって四角形  $EF GH$  は台形

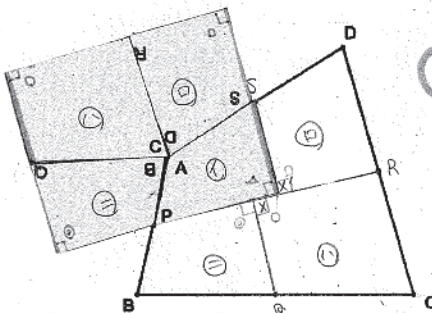
仮定  $\angle RX'S = \angle PXQ = 90^\circ$

予想

変形するとすみになるところが  
 直角になる  
 $\Rightarrow$  長方形が  
 つくれる?!

結果：合致した。長方形ができた

理由：セッる前の  $X$  がつくる角が  
 変形後のすみの角になる  
 だから長方形ができた。



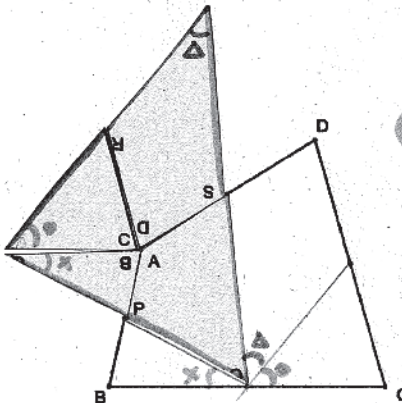
仮定  $X$  を  $CB$  の中点

予想

$X$  を四角形の内部にとっても  
 四角形しかできなかった。  
 $\Rightarrow$  三角形が  
 つくれる?!

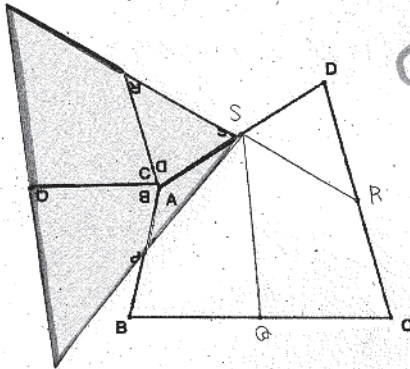
結果：合致した。三角形ができた。

理由：三角形の角を元の図形で考えると  
 角は一直線にあつまると内角の和が  $180^\circ$  度  
 よって三角形ができた。



## 四角形の変身術②

(1)



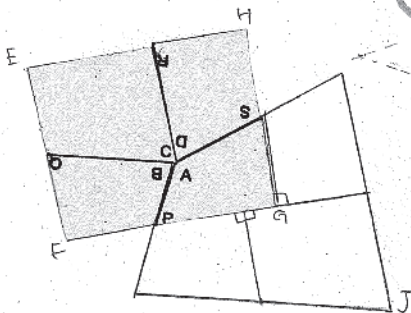
仮定  $X$  を  $DA$  の中点にとる

予想

$\angle DSR + \angle RSQ + \angle QSP + \angle PSA$   
は一直線なわけだから内角にならず  
三角形が出来る?

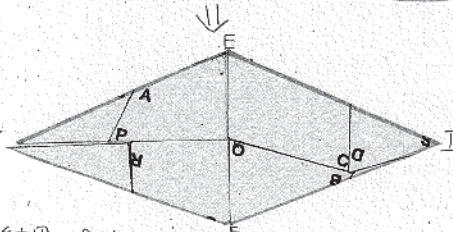
結果: 合致した三角形ができた  
理由: 3つ目と同じ考え

(2)



予想

$EFGH$  は長方形  
 $HI = PI$  とする。  
左図のようにおきか  
 $\triangle HEI$  と  $\triangle GFI$  を  
左に移動させると  
ひし形ができて思う。



結果: 合致したひし形ができた。  
理由: 四角形  $EFGH$  は長方形であるため  
 $I$  を  $HG$  の中点とすると  $EI = FI$   
 $EI = EJ$ ,  $FI = EJ$  となり  
四辺が等しくなる。  
1つからひし形になる

分かったこと

四角形はハッパに分けるとひし形にできる!!

まとめ感想

今回、四角形を変身してみたい四角形の中で長方形や台形など、  
特別な四角形、三角形ができてくることを知りました。  
2回する(計8回)とひし形ができてくるのはハッキリしました!!  
大変だったけどいろいろな図形がみつけられてよかった。