

# 不規則現象の数学的記述と ランダム疲労寿命の推定に ついて

石 川 浩\*  
木 村 等\*\*

## 1. 緒 言

自然科学あるいは社会科学のいずれの分野に於ても、時間の経過と共にその値が不規則に変動した物理量あるいは時系列データ等を取扱う必要がある場合がきわめて多い。このような不規則変動量を何らかの手段によって合理的に評価しようとする学問が確率過程論 (stochastic or random process theory) と呼ばれるものである。

本論文は、工学的問題を1つの例にとって、この確率過程論の教える所を援用して不規則現象を数学的に正しく記述することを試み、統計的規則性に基いて理論的側面からの問題解決を図ろうと意図したものであって、とりわけ機械・構造物の設計に際して重要な問題となる金属材料のランダム疲労寿命の推定への応用に関する研究結果を報告するものである。

さて、機械・構造物は自然環境あるいは運用状態のもとにおいて荷重もしくは環境ストレスを受ける。機械・構造物に作用するこのような外部荷重は実働荷重 (service load) と総称されている<sup>(1)</sup> が、このような実働荷重は一般にはその正負ピーク値が時間的にきわめて複雑に変動したものであって、再現性のほとんどないランダムなもの—ランダム荷重 (random load) —と考えられる。たとえば、タービン翼やプロペラ・シャフトに負荷される荷重<sup>(2)</sup>とか、自動車

\* 香川大学商業短期大学部助教授、京都大学工学博士

\*\* 香川大学経済学部教授、経済学部長

や鉄道車輛が走行時に路面やレールから受ける荷重<sup>(3)~(7)</sup>、船舶の航海中に受ける風波荷重<sup>(8)~(11)</sup>、航空機に作用する突風荷重や操舵荷重<sup>(12)~(17)</sup>、あるいは発電所、化学プラント、ビルディングや橋梁などの構造物に作用する風荷重や地震荷重など<sup>(18)~(20)</sup>、そのいずれを取上げても通常は不規則な変動荷重（ランダム荷重）であることが多くの実測データから明らかである。

ランダム荷重を受けると機械・構造物はその動的特性と複雑に関連した不規則な応答を呈するので、この動的応答の特性を充分認識しなければ合理的な設計は行い得ない。また近時の著しい工業技術の進歩に伴い、機械・構造物はますます苛酷な使用条件の下での稼働を余儀なくされるに至っている。加えて、実際の機械・構造物の破壊原因のほとんど大部分は構成部材の疲労破壊によるものであり、またそれらの破壊が直接に多くの人命に係わる問題を提起する場合が少なくない現状を深く認識するとき、このような不規則に変動した実働荷重に対する材料の疲労強度や疲労寿命を正しく推測し、以て機械・構造物の疲労破壊を未然に防止すべき設計手法の確立を図ることこそが、至急に完遂されるべき重要課題であると考えられる<sup>(21)</sup>。

この目的のためには、まず不規則に変動した実働荷重そのものに対する取扱いを明確にする必要がある。すでに述べたように、実働荷重は通常はその上下限が複雑に変動したランダム荷重であることが多く、またランダム荷重が本来非決定論的（indeterministic）な発生メカニズムをもつことを考えれば、必然的にその取扱いは確率・統計論的手法に立脚したものとならざるを得ず、確率過程論を応用した不規則現象の数学的記述を通して、ランダム荷重の基本的統計諸量がまず明らかにされねばならない。

ところでランダム荷重の中でも定常ガウス性（正規性）ランダム荷重は、（a）パワー・スペクトル密度のみによってその確率的特性が完全に規定されるので解析や数学的取扱いが簡便であり<sup>(22),(23)</sup>、また事実ガウス（正規）分布に関する研究が非常に進んでいること、および（b）応用上現われる確率過程は中心極限定理<sup>(24),(25)</sup>によって、少なくとも近似的にガウス確率過程として取扱いうる人が多いこと、などの理由により、実働荷重疲労の研究における一般的荷

重モデルとして、きわめて基本的かつ重要なものであると考えられる。すなわちガウス性ランダム荷重に対する材料の疲労挙動を正しく認識することは一般の実働荷重に対する疲労挙動解明の基礎となる<sup>(26)</sup>。

上述のような観点から、本論文においては、まず不規則現象をいかに数学的に記述するかについて考え、ガウス性を仮定した場合のランダム荷重の確率・統計論的取扱いとその基本的統計諸量について論じる。次にこのような統計的因子が疲労寿命にどのような影響を及ぼすのか<sup>(27)</sup>を明らかにする目的から、主としてピーク応力の自乗平均平方根 (rms ピーク応力)  $\sigma_{rms}$  と、パワー・スペクトル密度分布における周波数帯域とに注目して研究を行った結果について述べる。実際の機械・構造物部材は、一般には、設計上の要請から多くの応力集中部を有したものであることは周知の通りである。従って平滑材のみならず切欠き材のランダム荷重に対する疲労強度や疲労寿命を明らかにする必要がある、また材料によっても疲労挙動は相違するであろう<sup>(28)</sup>。それゆえ本研究においては半硬鋼ならびにアルミ合金の2種類の材料を供試材とし、平滑および切欠き試験片によって実験を行った。

従来、実働荷重下においては不規則な応力履歴のもたらす疲労被害の進展が複雑多岐をきわめるために、累積損傷法則<sup>(29)</sup>を適用して計算のみによって疲労寿命を推定することはきわめて困難であるとされてきた。しかしながら、定常ガウス性ランダム荷重においては、その数学的取扱いの手法が簡便であって統計諸量が理論的に求められる<sup>(30)</sup>ため、計算によって疲労寿命を推定する試みが有用な手段となるであろうと考えられる。そこで、定常ガウス性ランダム荷重を与えて得た実際の疲労試験結果に修正マイナーの方法を適用して累積被害(累積繰返し数比)  $\Sigma (n/N)$  を求めれば、常に

$$\Sigma (n/N) = 1$$

が成立つような基本  $S-N$  曲線の修正法について考察し、得られた曲線をランダム  $S-N$  曲線<sup>(31), (32)</sup>と称して、これによる疲労強度や疲労寿命の推定法について本論文において併せて論述した。

## 2. 不規則現象の数学的記述とその基本的統計諸量

## 2. 1 確率変数と確率過程

本論への導入として、まず初めに確率変数  $X$  と確率過程  $X(t)$  について簡単に説明を加えておくことにする。周知のように確率変数 (random variable; 通常は大文字で表示する)  $X$  とはある実験あるいは観測の結果を表現する数値すなわち実現値 (realization; 通常、確率変数に対応した小文字で表す) の集合をいい、その集合の従う確率法則によって、実験の結果を一意的に予言することはできないが、確率的には予言することができるという性質をもつものである。すなわち  $X$  とその従う確率法則とが与えられれば、たとえば  $X$  がある関係  $E$  を満足する確率  $P\{E\}$  が求められる。この確率は相対頻度の解釈に基けば、

$$P\{E\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\{E\}}{n} \quad (1)$$

と表すことができる。ここに、 $n$  は互いに独立に実験を繰返す回数であり、 $n\{E\}$  はこの  $n$  回の独立な繰返し実験において実験結果が与えられた関係  $E$  を満足した回数である。

ところで確率変数  $X$  は実験結果を表す数値の集合であるから、実験の結果が有限個しかない場合には、 $X$  は有限個の離散的 (discrete) な値のみをとることとなる。この場合には  $X$  を有限離散型確率変数 (finite discrete random variable) といい、またたとえば1つの硬貨を毎回独立に投げ続けて初めて表が出るまでに要した回数  $X$  を考えるというような場合、 $X$  は離散的ではあるが無限個の値をもちうるので、これを無限離散型確率変数 (infinite discrete random variable) という。一方これに対して  $X$  が連続的な実数値を実現値としてとるというような場合には、 $X$  は連続型確率変数 (continuous random variable) と呼ばれる。

さて、これまで実験の結果が数値の集合で表される確率変数の定義について考えてきたが、実験によってはその結果が時間の関数で表されるような場合が多々ある。そして1回の実験の結果として、このような数多くの (無限個の場合も含める) 時間関数のうちの1つが選ばれるとき、この時間関数の集合を確

率過程 (stochastic or random process)  $X(t)$  と呼ぶ。確率過程  $X(t)$  はまた別の表現をすれば以下のようにも考えることができる。

いま、きわめて概念的に考えて、全く同一の不規則現象の発生機構が  $n$  個あるものとし、それらから生じた不規則現象を常時観測しているものとしよう。しかるときは、いずれの観測結果も時間  $t$  の関数で表され、しかもそれらは、たとえば図1に示すように、互いに異なったものであって全く同じということ

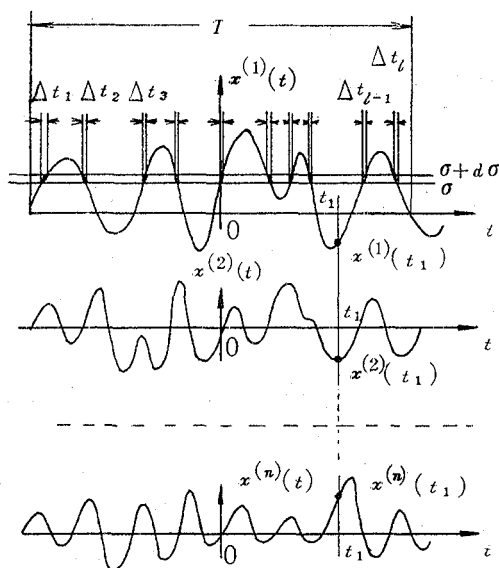


図1 確率過程としての不規則現象の把握 (確率過程の標本関数)

は一般には起こり得ないであろう。第  $k$  番目の観測結果を第  $k$  番目の標本関数 (sample function) と称して、これを  $x^{(k)}(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) と表すことにすれば、このような  $n$  個の標本関数の集合

$$X(t) = \{x^{(k)}(t)\}, k=1, 2, 3, \dots, n \quad (2)$$

がいわゆる確率過程と呼ばれるものである。勿論  $n$  は任意の大きさの自然数であって差支えないが、一般には  $n \rightarrow \infty$  と考えられる場合が多い。なお、式 (2) における変数  $t$  は確定的 (deterministic) なものであって何ら確率的要素はな

く、 $t$  を特定すれば  $X(t)$  は前述した確率変数として取扱うことができる。すなわちたとえば事象  $E$  を

$$E = \{x_1 < X(t) \leq x_2\}$$

とすれば、式(1)は確率過程  $X(t)$  が時刻  $t$  において  $x_1$  と  $x_2$  との間にある確率の相対頻度の解釈を与える。

不規則現象を表現するためにはそれが確率変数で表されうるのか、あるいはまた確率過程として表す必要があるのかを区別して考える必要があるが、以下の議論においては主として工学的見地から不規則現象は確率過程として表現される必要がある場合を考えることにする。

## 2.2 時間的確率密度と集合的確率密度<sup>(33)</sup>

確率過程  $X(t)$  はどの時刻  $t$  をとっても連続型の確率変数であるものと仮定する。 $X(t)$  の任意の1つの標本関数  $x^{(k)}(t)$  が  $\sigma$  と  $\sigma + d\sigma$  との間の値をとる時間確率  $g^{(k)}(\sigma)d\sigma$  は、先の図1に示したように、ある時間間隔  $T$  内において  $x^{(k)}(t)$  の値が縦軸区間  $(\sigma, \sigma + d\sigma)$  の間にある時間素分  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_i$  を求めるという操作を概念的に  $T \rightarrow \infty$  の極限にまで延長して行うという考え方から以下のように与えられる。

$$g^{(k)}(\sigma)d\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_i) / T \quad (3)$$

式(3)から求められる  $g^{(k)}(\sigma)$  は時間的確率密度関数 (temporal probability density function) と呼ばれ、これを用いて標本関数  $x^{(k)}(t)$  の時間平均 (temporal average)  $\overline{x^{(k)}(t)}$  を次式のように書き表すことができる。

$$\overline{x^{(k)}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot g^{(k)}(\sigma) d\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^{(k)}(t) dt \quad (4)$$

一方このような時間軸を中心とした考え方に対して、集合的な考え方に基づくものがある。すなわち、確率過程  $X(t)$  において、時間を  $t=t$  に固定すれば、 $k$  に応じて値  $x^{(k)}(t)$  をとる  $n$  個のランダム (確率) 変数の集合が得られ、それに基づいて集合的確率密度関数 (ensemble probability density function)  $h_i(\sigma)$  が求められる。すなわち、時刻  $t=t$  における  $n$  個の観測値

$$x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$$

のうちの  $m$  個が  $(\sigma, \sigma + d\sigma)$  の範囲にあるものとすれば,

$$h_i(\sigma) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} m/n \quad (5)$$

したがって、時刻  $t$  における集合平均 (ensemble average)  $\widetilde{x(t)}$  は次のように計算される。<sup>(注1)</sup>

$$\widetilde{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma h_i(\sigma) d\sigma \quad (6)$$

上述のように、不規則現象を確率過程として記述する場合には、必ず時間的側面と集合的側面の両方を同時に考慮していかなければならず、その取扱いはきわめて複雑なものとなる。この際、もし確率過程  $X(t)$  を構成するいずれの1つの標本関数も  $X(t)$  の代表関数になりうるものとすれば、確率過程の統計的特性はそのうちの任意の1つの標本関数を時間的に考察するか、あるいは任意の定められた一時点における各標本関数の値を集合的に考えるか、のいずれかによって求められることになり、取扱いは簡単となる。この故に従来定常性 (stationarity) やエルゴード性 (ergodicity) という概念が論及されてきた。以下このような概念について考えよう。

### 2.3 定常性とエルゴード性<sup>(30), (33)~(35)</sup>

再び確率過程  $X(t)$  はどの時刻  $t$  をとっても連続型の確率変数であると仮定して、まず多次元確率密度関数を次のように導入する。すなわち、いま時刻  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ) における  $X(t)$  の値を  $X(t_i)$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ) で表し、記号  $E_i$  を以て、 $X(t_i)$  が  $x_i$  と  $x_i + dx_i$  との間にある事象

$$E_i = \{x_i < X(t_i) \leq x_i + dx_i\} \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

を表すものとする。ここで、これらの事象  $E_1, E_2, \dots, E_M$  の全部が同時に実現する確率を考え、それを次式

(注1) 本論文では時間平均を表す記号としては—を、また集合平均を表す記号としては $\sim$ を用いることにする。集合平均を考える場合には実際には  $t$  を固定して得られる  $n$  個の標本関数の値、 $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ 、を対象とするわけであるが、記号的には右肩の添字を取除いて  $\widetilde{x(t)}$  と簡単に書き表すこととする。

$$P[E_1, E_2, \dots, E_M]$$

$$= f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)}(x_1, x_2, \dots, x_M) dx_1 dx_2 \dots dx_M \quad (7)$$

で書き表すことにする。このとき、上式中の  $f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)}(x_1, x_2, \dots, x_M)$  が  $M$  次元 (結合) 確率密度関数と呼ばれるものであって、これは常に非負の数で、しかも次の条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)}(x_1, x_2, \dots, x_M) dx_1 dx_2 \dots dx_M = 1 \quad (8)$$

を満足する。また  $(M-1)$  次元確率密度関数は  $M$  次元確率密度関数の、たとえば  $x_M$  に関する周辺密度 (marginal density) として

$$\begin{aligned} & f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{M-1})}(x_1, x_2, \dots, x_{M-1}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)}(x_1, x_2, \dots, x_M) dx_M \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる。

さて、ここで確率過程  $X(t)$  の定義を改めて次のように厳密に与えることにする。すなわち、確率過程  $X(t)$  とはある統計的性質をもった時刻  $t$  の関数  $x^{(k)}(t)$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) で構成される集合であり、この統計的性質は  $X(t_1)$ ,  $X(t_2), \dots, X(t_M)$  の  $M$  次元結合確率密度関数

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)}(x_1, x_2, \dots, x_M)$$

がすべての  $M$  の値について、またすべての  $\{t_1, t_2, \dots, t_M\}$  の組について与えられるということによって規定されるものとする。しかるとき、定常性とは次のように定義することができる。すなわち、もし  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)$  の  $M$  次元確率密度関数が  $X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_M+\tau)$  の  $M$  次元確率密度関数と、 $M, \tau$  のすべての値、ならびに  $\{t_1, t_2, \dots, t_M\}$  のすべての組について、全く同一であるとき、換言すれば

$$\begin{aligned} & f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_M)}(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ & \equiv f_{X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_M+\tau)}(x_1, x_1, \dots, x_M) \end{aligned} \quad (10)$$

が成立し、式 (7) で表される  $M$  次元確率密度関数が時間移動 (time shift) について不変となると、その場合には確率過程  $X(t)$  を強定常 (strongly sta-



tionary) または狭義の定常であるという。このように、強定常性とは確率過程  $X(t)$  のすべての統計的性質が時間によって何ら変化しないという性質を意味している。しかしながら現実問題としては、

(i)  $X(t)$  が強定常であることを証明することは難しいことが多い。

(ii) 物理的工学的見地からは、3次元以上 ( $M \geq 3$ ) の確率密度関数を取り扱う場合はそれほど多くはない。

(iii) 3次以上の積率 (モーメント) の推定を入手データから行う場合には大きな推定誤差を伴うことが多い。

などの理由から、一般に工学的見地からは2次元 ( $M=2$ ) までの定常性を問題にするのが普通である<sup>(38)</sup>。すなわち、上述の定常性が少なくとも2次元までの確率密度関数  $f_{X(t)}(x)$  および  $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2)$  について成立つときを問題とすることが多く、この場合  $X(t)$  は (少なくとも) 弱定常 (weakly stationary) であるといわれる。弱定常はまた広義の定常ともいわれる。 $X(t)$  が弱定常であれば、

(i)  $f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\tau)}(x)$  は時刻  $t$  を含まない。したがって、先に述べた集合的確率密度関数  $h_t(x)$  はどの時点においても全く同一となり、

$$h_t(x) \equiv h(x) = f_{X(t)}(x) \quad (11)$$

と表され、また対応する式 (6) の集合平均は

$$\widetilde{x(t)} = E[X(t)] = \mu_X = \text{定数} \quad (12)$$

となる。

(ii)  $f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)}(x_1, x_2)$  は時刻  $t_1$  と  $t_2$  とを含むが、これらは  $|t_2 - t_1|$  の形で書き表すことができる。というのは、この形のみが任意の時間並進変換に対して不変となるからである。したがって、

$$\widetilde{x(t)x(t+\tau)} = E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau) \quad (13)$$

と書くことができる。ここに、 $R_{XX}(\tau)$  は後述する  $X(t)$  の自己相関関数 (autocorrelation function) である。

逆に式 (12) および式 (13) が成立つときは、 $X(t)$  は少なくとも弱定常であるといえる。

次にエルゴード性について考えよう。ここでも先に弱定常性の導入を正当化したのと同様な理由から、3次以上の高次積率（モーメント;moment）は考えないことにする。

さて、すでに第2・2節で述べたように、確率過程の各々の標本関数  $x^{(k)}(t)$  とその時間の並進変換  $x^{(k)}(t+\tau)$  とに関する時間平均として次式を考える。

$$\overline{x^{(k)}(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^{(k)}(t) dt \quad (14)$$

$$R_{XX}^{(k)}(\tau) = \overline{x^{(k)}(t)x^{(k)}(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^{(k)}(t)x^{(k)}(t+\tau) dt \quad (15)$$

この際、もし上2式から得られる  $\overline{x^{(k)}(t)}$  および  $R_{XX}^{(k)}(\tau)$  が、それぞれ、先に式(12)および式(13)で与えた集合的考え方に基づく  $\mu_X$  および  $R_{XX}(\tau)$  に一致するならば、すなわち

$$\overline{x^{(k)}(t)} = \mu_X = E[X(t)] = \widetilde{\overline{x(t)}} = \text{定数} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} R_{XX}^{(k)}(\tau) &= \overline{x^{(k)}(t)x^{(k)}(t+\tau)} = R_{XX}(\tau) \\ &= E[X(t)X(t+\tau)] = \widetilde{\overline{x(t)x(t+\tau)}} \end{aligned} \quad (17)$$

が成立つならば、確率過程  $X(t)$  は（少なくとも2次の積率まで）エルゴード性を有する（ergodicである）と称する。このようにエルゴード性とは時間平均と集合平均とが一致するという概念であり、また式(16)および(17)から分かるように確率過程の標本関数に関する時間平均が  $k$  に無関係に同様に等しくなるという重要な概念である。勿論、式(3)で与えた時間的確率密度関数  $g^{(k)}(x)$  も  $k$  に無関係となる。エルゴード性を有した確率過程においては任意の「1つの標本関数」から式(14)および(15)を用いて平均値  $\mu_X$  および自己相関関数  $R_{XX}(\tau)$  を求めることができ、取扱いがきわめて簡便となる。もしもエルゴード性が成立たない場合には  $\mu_X$  と  $R_{XX}(\tau)$  を求めるためには、同じ集合に属する多くの標本関数を観測しなければならず、現実問題としては処置に苦しむことになる。なお、エルゴード性を有する確率過程は弱定常過程であるが、その逆は必ずしも真ではない（エルゴード過程は弱定常過程の部分集合である）。

## 2.4 自己相関関数とパワー・スペクトル密度<sup>(30),(33)~(39)</sup>

本節では、エルゴード確率過程  $X(t)$  ——前節の論議より、これはまた少なくとも弱定常過程でもある——の自己相関関数 (autocorrelation function) ならびにパワー・スペクトル密度 (power spectral density; 簡単にはスペクトル密度ともいう) について考える。前者は確率過程  $X(t)$  が時間領域内でどのような相関挙動を呈するかに関する情報を与えるものであり、また後者は周波数領域における情報を与えるものであるが、後述するように、両者の間には密接な関係が存在する。

さて、はじめに構造物の動的解析に最も深い関係をもつスペクトル密度について考えよう。前節で述べたように、定常エルゴード過程ではその確率過程  $X(t)$  に属する任意の1つの標本関数のみを時間的に考察することによって統計的性質が求められる。そこで任意の1つの標本関数を  $x(t)$  と表すことにすれば、これは時間領域  $(-\infty, \infty)$  において非周期関数 (non-periodic function) であることは明らかである。そこでいま、図2に示すような擬周期関数モデル  $x_T(t)$  を概念的に考えよう。すなわち  $x_T(t)$  は次式

$$\left. \begin{aligned} x_T(t) &= x(t), \text{ただし } |x| < T/2 \\ x_T(t+T) &= x_T(t) \end{aligned} \right\} \quad (18-a)$$

で定義される関数であり、また  $t_q = (2q+1)T/2 (q=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  なる不

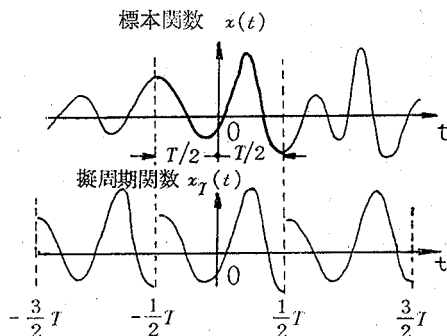


図2 標本関数  $x(t)$  の擬周期関数モデル  $x_T(t)$

連続点における  $x_T(t_q)$  の値は

$$x_T(t_q) = \{x_T(t_q^+) + x_T(t_q^-)\} / 2 \quad (18-b)$$

で与えられるものとする。このように定義された関数  $x_T(t)$  は周期  $T$  の周期関数であるから、次式に示すようにフーリエ級数展開 (Fourier series expansion) でき<sup>(40)</sup>, しかも  $T \rightarrow \infty$  の極限が  $x(t)$  そのものを与える。

$$x_T(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \quad (19)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cos \omega_k t dt, \quad k=0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sin \omega_k t dt, \quad k=1, 2, \dots \\ \omega_k &= 2\pi k/T \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで仮にいま  $x_T(t)$  を単位の抵抗中を流れる電流と考えることにすればこの電流が単位時間当たりに消費する平均のパワーは次式で与えられる。

$$\phi_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{x_T(t)\}^2 dt \quad (21)$$

ところで、周知のように  $l$  と  $m$  を同時には 0 とならない非負の整数とし、また

$$\left. \begin{aligned} \omega_l &= 2\pi l/T \\ \omega_m &= 2\pi m/T \end{aligned} \right\} \quad (22-a)$$

とすれば、正弦関数および余弦関数の間には次の直交条件が成立することが分かっている。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_l t \cdot \sin \omega_m t dt &= 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_l t \cdot \cos \omega_m t dt &= (T/2) \delta_{lm} \\ \int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_l t \cdot \sin \omega_m t dt &= (T/2) \delta_{lm} \end{aligned} \right\} \quad (22-b)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \delta_{lm} &= 0 \quad (l \neq m \text{ の場合}) \\ \delta_{lm} &= 1 \quad (l = m \text{ の場合}) \end{aligned} \right\} \quad (22-c)$$

式 (21) に式 (19) を代入し、これに式 (22-b) の直交条件を適用して平均パワー  $\phi_T$  を計算すれば、

$$\begin{aligned}\phi_T &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \right\}^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ (a_0/2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (a_k \cos \omega_k t)^2 + (b_k \sin \omega_k t)^2 \} \right] dt \\ &= (a_0/2)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)/2\end{aligned}\quad (23)$$

となる。

ここで再び式 (19) に注目してみよう。式 (19) は任意の周期関数  $x_T(t)$  (周期  $T$ ) が直流成分 ( $=a_0/2$ ) と円周波数 (circular frequency)  $\omega_k (=2\pi k/T)$  の異なる無数 ( $k=1, 2, \dots$ ) の正弦・余弦関数を重畳したものとして表されうるとことを示しており、このうちとくに  $(a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$  は第  $k$  調和波 ( $k$ -th harmonic wave) と呼ばれるものとなる。このような第  $k$  調和波のもつ単位時間当たりの平均パワーをこの調和波の円周波数が  $\omega_k$  であるところから  $W(\omega_k)$  と書くことにすれば、

$$\begin{aligned}W(\omega_k) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{ (a_k \cos \omega_k t)^2 + (b_k \sin \omega_k t)^2 \} dt \\ &= (a_k^2 + b_k^2)/2, \quad k \geq 1 \\ W(\omega_k) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (a_0/2)^2 dt \\ &= (a_0/2)^2, \quad k = 0\end{aligned}\quad (24)$$

となることが分かる。式 (24) を式 (23) に代入すれば、

$$\begin{aligned}\phi_T &= W(\omega_0) + \sum_{k=1}^{\infty} W(\omega_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} W(\omega_k)\end{aligned}\quad (25)$$

すなわち、周期  $T$  の周期関数  $x_T(t)$  を、フーリエ級数展開によって、円周波数

$\omega_0 (=0; \text{直流成分})$ ,  $\omega_1 (= \frac{2\pi}{T})$ ,  $\omega_2 (= \frac{4\pi}{T})$ ,  $\omega_3 (= \frac{6\pi}{T})$ ,  $\dots$  の無数の正

弦・余弦波の和として表したとき、 $x_T(t)$  の有する平均パワーは各調和波（直流成分も含めて）の平均パワーの和として与えられることが分かる。各調和波のもつ円周波数  $\omega_k$  を横軸に、また  $W(\omega_k)$  を縦軸にとって図示するものとすれば、 $W(\omega_k)$  は円周波数間隔

$$\Delta\omega = 2\pi/T \quad (26)$$

毎の線スペクトル（離散スペクトル）となり、これらの線スペクトルの値の総和が  $\phi_T$  を与える。ここで、密度的な考え方を明確にするために新たに  $\omega_k$  の関数  $G_{XX}(\omega_k)$  を次式

$$\begin{aligned} W(\omega_k) &= G_{XX}(\omega_k) \Delta\omega \\ &= 2\pi G_{XX}(\omega_k) / T \end{aligned} \quad (27-a)$$

すなわち、

$$G_{XX}(\omega_k) = TW(\omega_k) / (2\pi) \quad (27-b)$$

で定義し、離散スペクトルを連続スペクトルに拡張することを考えよう。

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega = 2\pi/T \quad (28)$$

とすれば、

$$\omega_k = k\Delta\omega = 2\pi k/T = k\Delta\omega_k \quad (29)$$

となるから、式 (25), (27-a) ~ (29) より

$$\phi_T = \sum_{k=0}^{\infty} G_{XX}(\omega_k) \Delta\omega = \sum_{k=0}^{\infty} G_{XX}(k\Delta\omega_k) \Delta\omega_k \quad (30)$$

ここで  $T \rightarrow \infty$  とすれば、離散的円周波数列  $\omega_k$  は連続的円周波数  $\omega$  となり、また  $\Delta\omega_k$  および  $\sum$  はそれぞれ  $d\omega$  および  $\int$  で置換えられ、さらに  $x_T(t) \rightarrow x(t)$ ;  $\phi_T \rightarrow \phi_X$  (= 確率過程  $X(t)$  の任意の1つの標本関数  $x(t)$  が単位時間当たりに消費する平均パワー) となって、結局式 (30) は次のように表現される。

$$\begin{aligned} \phi_X &= \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \phi_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{x(t)\}^2 dt \end{aligned} \quad (31)$$

式 (31) における  $G_{XX}(\omega)$  が確率過程  $X(t)$  の（パワー）スペクトル密度と呼ばれるものである。 $X(t)$  はエルゴード性を有するものと仮定しているから、式 (31) はまた集会的表現を用いて、

$$\begin{aligned}
 E[\{X(t)\}^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{x^{(k)}(t)\}^2 \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{x(t)\}^2 dt \\
 &= \int_0^\infty G_{XX}(\omega) d\omega = \phi_X
 \end{aligned} \tag{32}$$

とも書き表すことができる。すなわち確率過程  $X(t)$  のもつ単位時間当たりの平均パワー  $\phi_X$  はパワー・スペクトル密度  $G_{XX}(\omega)$  の  $\omega$  に関する積分で与えられ、これはまた数値的には  $X(t)$  の自乗平均値 (mean square value) に等しい。この意味において  $G_{XX}(\omega)$  はまた自乗平均スペクトル密度 (mean square spectral density) とも呼ばれる。この際注意すべきことは、円周波数  $\omega$  を連続変数として捕えれば、ある特定の円周波数  $\omega$  のもつパワーは、 $G_{XX}(\omega)$  が有限であることから、

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} G_{XX}(\omega) \Delta\omega = 0$$

となってしまうことである。すなわち、ある特定の円周波数のもつパワーの論議はできず、微小円周波数範囲 ( $\omega, \omega + d\omega$ ) でのパワー  $G_{XX}(\omega) d\omega$  を論じなければならない。これは丁度連続的確率変数  $X$  がある特定の実現値  $x$  をとる時の確率が 0、つまり  $P[X=x] = 0$  という関係と類似的である。

以上においては円周波数  $\omega$  は  $\omega \geq 0$  として取扱っており、物理的意義を有したものであった。しかしながら後述するように数学的取扱いの簡便さのためには、円周波数  $\omega$  の領域を  $(-\infty, \infty)$  に拡張し、しかもパワー成分が  $(-\infty, \infty)$  の円周波数領域で絶対値の等しい円周波数に対して、全く同一の値をもつものと考える場合がしばしばある。このような場合には新たに  $S_{XX}(\omega)$  なる関数を導入し、

$$\begin{aligned}
 S_{XX}(\omega) &= S_{XX}(-\omega) \\
 &= G_{XX}(\omega)/2, \text{ ただし } \omega \geq 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

と定義する。すなわち  $S_{XX}(\omega)$  は偶関数であって、その値は対応する  $G_{XX}(\omega)$  の半分である。 $S_{XX}(\omega)$  もまたパワー・スペクトル密度と呼ばれる。とくに、両者を区別する必要がある場合には、 $G_{XX}(\omega) (\omega \geq 0)$  を片側 (連続型) スペ

クトル密度 (one-sided spectral density) あるいは片側自乗平均スペクトル密度 (one-sided mean square spectral density) と称し,  $S_{XX}(\omega)$  ( $-\infty < \omega < \infty$ ) を両側(two-sided)(自乗平均)スペクトル密度と呼ぶ。  $G_{XX}(\omega)$  と  $S_{XX}(\omega)$  との関係は図3に示す通りである。

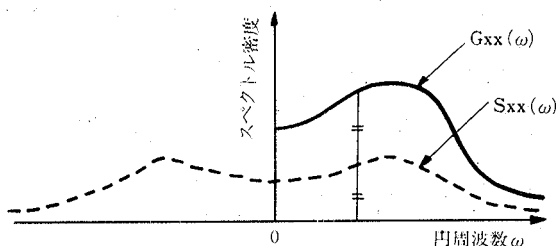


図3 片側(自乗平均)スペクトル密度  $G_{XX}(\omega)$  と両側(自乗平均)スペクトル密度  $S_{XX}(\omega)$  との関係

次に式(19)で与えられる擬周期関数モデル  $x_T(t)$  の複素数表示を考えよう。正弦・余弦関数を指数式で表示すれば ( $j$  を虚数単位として),

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega_k t &= (e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t})/2 \\ \sin \omega_k t &= (e^{j\omega_k t} - e^{-j\omega_k t})/(2j) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

で表されるという事実と, 式(20)で与えられる  $a_k, b_k$  および  $\omega_k$  を  $k$  の負の領域に拡張すれば

$$\left. \begin{aligned} a_{-k} &= a_k \\ b_{-k} &= -b_k \\ \omega_{-k} &= -\omega_k \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

なる関係があるという事実に基づき, 簡単な考察を行って結局  $x_T(t)$  は次式のごとく表される。

$$x_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_X(\omega_k) e^{j\omega_k t} \quad (36)$$

ただし,

$$F_X(\omega_k) = \frac{T}{2} (a_k - j b_k)$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) (\cos \omega_k t - j \sin \omega_k t) dt \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \{ \cos(-\omega_k t) + j \sin(-\omega_k t) \} dt \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad (37)
\end{aligned}$$

ここで再び式 (28) および式 (29) を用いて、式 (36) および式 (37) を  $T \rightarrow \infty$  の極限における連続的周波数の場合に拡張すれば、

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{\Delta\omega_k \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_X(k\Delta\omega_k) e^{jk\Delta\omega_k t} \Delta\omega_k \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (38)
\end{aligned}$$

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (39)$$

となることが分かる。式 (39) の  $F_X(\omega)$  は一般には複素数であって、これを  $x(t)$  のフーリエ変換 (Fourier transform) といい、また式 (38) の  $x(t)$  は  $F_X(\omega)$  の逆フーリエ変換 (inverse Fourier transform) と呼ばれる。すなわち式 (38) と (39) はいわゆるフーリエ変換の対 (Fourier transform pair) を構成する<sup>(41)</sup>。式 (39) から実数関数  $x(t)$  に対しては

$$F_X(-\omega) = F_X^*(\omega) \quad (40)$$

であることが容易に分かる。ただし記号「\*」は共役複素数を表す。

さて前述したパワー・スペクトル密度と上述のフーリエ変換との関係について考える。式 (20), (24), (27-b) および (37) から

$$\begin{aligned}
G_{XX}(\omega_k) &= TW(\omega_k) / (2\pi) \\
&= T(a_k^2 + b_k^2) / (4\pi) \\
&= \left\{ \frac{T}{2}(a_k - jb_k) \right\} \left\{ \frac{T}{2}(a_k + jb_k) \right\} / (\pi T) \\
&= F_X(\omega_k) \cdot F_X(-\omega_k) / (\pi T) \\
&= |F_X(\omega_k)|^2 / (\pi T) \quad (41)
\end{aligned}$$

ここで、 $T \rightarrow \infty$  とすれば、

$$\begin{aligned}
 G_{XX}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} G_{XX}(\omega_k) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega_k)|^2}{\pi T} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (42)
 \end{aligned}$$

ただし,  $\omega \geq 0$

一方, 式 (33) を用いれば

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \quad (43)$$

式 (42) あるいは式 (43) がパワー・スペクトル密度の定義式を与える。<sup>(注2)</sup>なお, 式 (41) は Persaval の定理と呼ばれることがある。

次に, 確率過程  $X(t)$  の自己相関関数について考える。定常エルゴード性を仮定すれば, 自己相関関数  $R_{XX}(\tau)$  は通常次式で定義されるようなものである。

$$\begin{aligned}
 R_{XX}(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t+\tau) dt \quad (44)
 \end{aligned}$$

ここに,  $x(t)$  は確率過程  $X(t)$  の任意の 1 つの標本関数である。再び式 (18-a) で定義され, 式 (19) のようにフーリエ級数展開される擬周期関数モデル  $x_T(t)$  を考えれば, 形式上  $x_T(t+\tau)$  は

$$x_T(t+\tau) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos \omega_k(t+\tau) + b_k \sin \omega_k(t+\tau)\} \quad (45)$$

(注2) ここでは確率過程  $X(t)$  の任意の標本関数  $x(t)$  を用いて  $S_{XX}(\omega)$  の定義を与えているが, より一般的には次のように考えればよい。すなわち, まず区間  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  における確率量

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

を考え,  $T \rightarrow \infty$  におけるこの  $S_T(\omega)$  の期待値を  $S_{XX}(\omega)$  と定義する。

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[S_T(\omega)]$$

なお上の  $S_{XX}(\omega)$  が確定するためには  $R_{XX}(\tau)$  が絶対積分可能でなければならない。

として与えられるが、この  $x_T(t+\tau)$  は、式 (18-a) で与えられる  $x_T(t) = x(t)$  の定義域が  $(-T/2, T/2)$  であることから、図4に例示するように、 $x_T(t+\tau) = x(t+\tau)$  となる定義域が  $(-T/2, T/2)$  とは一致せず、次の計算式において

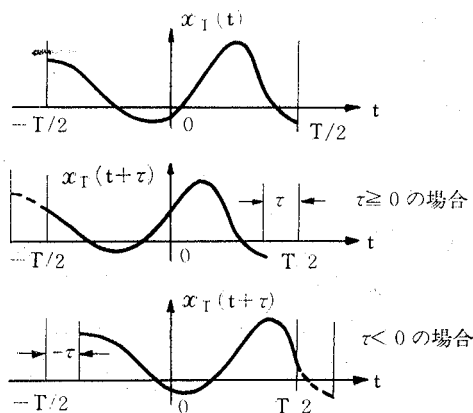


図4 擬周期関数  $x_T(t)$  と  $x_T(t+\tau)$  の定義域の差違

として示されるような誤差を生じる。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) x_T(t+\tau) dt \\
 &= -\frac{1}{T} \left[ T \left\{ (a_0/2)^2 + (1/2) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \cos \omega_k \tau \right\} + \xi \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} W(\omega_k) \cos \omega_k \tau + \xi/T \quad (\because \text{式 (24) より}) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} G_{XX}(\omega_k) (\cos \omega_k \tau) \Delta \omega_k + \xi/T \quad (\because \text{式 (27-a), (28) より})
 \end{aligned}$$

上式において  $T \rightarrow \infty$  の極限を考えれば  $R_{XX}(\tau)$  が得られ、したがって

$$\begin{aligned}
 R_{XX}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) x_T(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{\substack{\Delta \omega_k \rightarrow 0 \\ (T \rightarrow \infty)}} \sum_{k=0}^{\infty} G_{XX}(\omega_k) (\cos \omega_k \tau) \Delta \omega_k + \lim_{T \rightarrow \infty} \xi/T
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (46)$$

また式 (46) から,

$$\begin{aligned} R_{XX}(-\tau) &= \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \cos \omega(-\tau) d\omega \\ &= \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \\ &= R_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

となるから,  $R_{XX}(\tau)$  は偶関数であることが分かる。式 (33) の関係を用いれば  $R_{XX}(\tau)$  は両側スペクトル密度  $S_{XX}(\omega)$  と次のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \\ &= 2 \int_0^{\infty} S_{XX}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (S_{XX}(\omega), \cos \omega \tau \text{ が共に偶関数であるから}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) (\cos \omega \tau + j \sin \omega \tau) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (47) \end{aligned}$$

なお上式においては  $S_{XX}(\omega)$  が偶関数,  $\sin \omega \tau$  が奇関数であることから

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \sin \omega \tau d\omega = 0$$

となる関係を用いてある。

式 (47) の最後に現れる  $R_{XX}(\tau)$  と  $S_{XX}(\omega)$  の関係は先に述べた逆フーリエ変換の形となっている。それゆえにまた  $S_{XX}(\omega)$  は  $R_{XX}(\tau)$  のフーリエ変換として次式のように表すことができる。

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (48)$$

一般には, 式 (47) と式 (48) を Wiener-Khintchine ( $W-K$ ) 変換もしくは Wiener-Khintchine 関係式と呼ぶことが多い。ここで注意すべきことは, 普通に定義されたフーリエ変換では, 時間領域  $t$  から周波数領域  $\omega$  への変換の際には係数  $1/(2\pi)$  が現れず, 逆変換のときに  $1/(2\pi)$  を考えるが,  $W-K$  変換ではこれが逆となっている点である。これは確率過程  $X(t)$  の自乗平均 (平

均パワー) が  $\frac{1}{2\pi} S_{XX}(\omega)$  の積分ではなく,  $S_{XX}(\omega)$  の積分で表されるようにするためである。すなわち, 式 (44) および式 (47) にて  $\tau=0$  とすれば,

$$\begin{aligned} R_{XX}(0) &= E[\{X(t)\}^2] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{x(t)\}^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (49)$$

同様に

$$\begin{aligned} G_{XX}(\omega) &= 2 S_{XX}(\omega) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \end{aligned} \quad (50)$$

式 (46) と式 (50) もまた Wiener-Khintchine 変換と呼ばれることが多い。この場合もまた  $\int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) d\omega$  が直接に自乗平均を与えるように係数  $2/\pi$  の位置が普通のフーリエ余弦変換 (Fourier cosine transform) の対とは逆になっている。

以上述べたように, 定常エルゴード確率過程  $X(t)$  の自己相関関数  $R_{XX}(\tau)$  とスペクトル密度  $G_{XX}(\omega)$  もしくは  $S_{XX}(\omega)$  は相互に変換可能であり, 一方が既知であれば他方は少なくとも原理的には計算されうるものである。また  $G_{XX}(\omega)$  と  $S_{XX}(\omega)$  を比較した場合, 数学的には  $S_{XX}(\omega)$  の方がはるかに取扱いやすいので, 一般には  $S_{XX}(\omega)$  を (自乗平均) スペクトル密度として用いることが多い。

## 2. 5 確率的入力に対する線形系の応答特性について

工学的見地から構造物の入出力関係を例にとって議論を進める。一般に構造物に不規則確率過程としての外部荷重が作用するとき, 構造物というフィルタを通して現れるその応答値も確率論に支配された不規則確率過程となるであ

ろうことは容易に想像される。

いま、簡単のため入力としての不規則荷重も出力としての不規則応答も 1 成分であるとし、前者を  $X(t)$ 、後者を  $Y(t)$  とする。また系 (system) は定係数 (constant parameters) の線形系 (linear system) であって、たとえば  $L$  を時間についての線形微分演算子 (linear differential operator)

$$L = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \quad (51)$$

としたとき、 $X(t)$  と  $Y(t)$  とは

$$Y(t) = L[X(t)] \quad (52)$$

で結ばれていると仮定する。ここに定係数とは系の基本的性質が時間的に不変、すなわち式 (51) の係数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  が時間の経過に対して不変の定数であることを意味し、また  $L$  が線形変換であるというのは、 $f(t)$  および  $g(t)$  を  $n$  階の微係数を有する任意の  $t$  の関数であるとしたとき、任意の定数  $b$  および  $c$  に対して、

$$L[bf(t) + cg(t)] = bL[f(t)] + cL[g(t)] \quad (53)$$

が成立することを意味している。さらに、確率過程  $X(t)$  ならびに  $Y(t)$  の間の関係を示す式 (52) の確率的表示は、 $X(t)$  を構成するすべての標本関数  $x^{(k)}(t)$  と、それに対応する  $Y(t)$  の標本関数  $y^{(k)}(t)$  との間で満足される関係を示すものと解釈するものとする。

さて、定係数線形系の動的特性は、単位の衝撃関数 (unit impulse function) もしくはデルタ関数 (delta function)  $\delta(t)$  を入力とした場合のその系の出力として定義される単位衝撃応答関数 (unit impulse response function) あるいは重み関数 (weighting function) と呼ばれる関数  $h(t)$  を用いて完全に記述される。すなわち、入力  $X(t)$  に対して、系の出力 (応答)  $Y(t)$  はたたみ込み積分 (convolution integral; これはまた時として重ね合せ積分 (superposition integral) とも呼ばれることがある) を用いて

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) X(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau \\
 &= h(t) * X(t)
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

(注3)

と表すことができる。ここに記号「\*」はたたみ込み関係を示すものである。定係数線形系が物理的に実現可能 (physically realizable) であるためには、系は過去の入力に対してのみ応答することが必要であり、このためには

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \tag{55}$$

が満足されなければならないので、物理的な系を取扱う場合には式 (54) の積分の有効下限は $-\infty$ とする必要がない。また、系への入力が有界であるとき、その出力もまた有界であるならば、その系は安定 (stable) であるといわれる。このような安定条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \tag{56}$$

すなわち、定係数線形系の衝撃 (インパルス) 応答関数  $h(t)$  が絶対積分可能であるという条件によって満足される。<sup>(注4)</sup>

つぎに系の周波数応答関数 (frequency response function)  $H(\omega)$  について考えよう。周知のように、 $H(\omega)$  は  $h(t)$  のフーリエ変換として定義され、したがって  $H(\omega)$  と  $h(t)$  は次のようなフーリエ変換の対を形成する<sup>(42), (43)</sup>。

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \tag{57}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{58}$$

ただし、式 (57) の積分の下限値は式 (55) に示した条件から実際には0としてよい。

(注3) 記号「\*」は先に共役複素数を表すものとしても用いたが、その場合には右肩につけ、ここでは四則演算の記号と同じく真中におくものとして区別する。

$$(注4) \quad |y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau$$

であり、 $x(t)$  が有界であるという条件から、すべての  $t$  に対して  $|x(t)| \leq A$  を満足する定数  $A$  が存在する。したがって、

$$|y(t)| \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

さて、 $X(t)$  および  $Y(t)$  のフーリエ変換をそれぞれ  $F_X(\omega)$  および  $F_Y(\omega)$  とすれば、

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt \quad (59)$$

$$F_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-j\omega t} dt \quad (60)$$

ここで、式 (54) のフーリエ変換を考える。一般に2つの関数のたたみ込み積分のフーリエ変換は各々の関数のフーリエ変換の積として表されることが分か<sup>(注5)</sup>っているから、式 (54) のフーリエ変換は

$$F_Y(\omega) = H(\omega) F_X(\omega) \quad (61)$$

を与える。すなわち、周波数応答  $H(\omega)$  をもつ系の、入力  $X(t)$  に対する応答  $Y(t)$  のフーリエ変換は入力のフーリエ変換と  $H(\omega)$  との積で与えられる。

応答  $Y(t)$  の集合平均について考えよう。一般に集合平均と積分順序は入換えてもよい<sup>(44)</sup>から、式 (54) を用いて

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) E[X(\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (61)$$

したがって入力  $X(t)$  が弱定常確率過程 (平均値  $\mu_X$ ) であれば

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \\ &= \mu_X H(0) = \mu_Y \end{aligned} \quad (62)$$

すなわち応答過程  $Y(t)$  の平均値  $\mu_Y$  は定数となる。さらに、

$$(\text{注5}) \quad f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

とし、 $F(\omega)$ 、 $F_1(\omega)$  および  $F_2(\omega)$  をそれぞれ  $f(t)$ 、 $f_1(t)$  および  $f_2(t)$  のフーリエ変換とすると、

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t-\tau) dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\tau+s)} f_2(s) ds \right] d\tau \quad (\because t-\tau=s \text{ と変換する}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega s} f_2(s) ds \\ &= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \end{aligned}$$



$$E[Y(t)Y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)E[X(t-\tau_1)X(t+\tau-\tau_2)]d\tau_1d\tau_2 \quad (63)$$

と表されるから、弱定常過程  $X(t)$  の自己相関関数を  $R_{XX}(\tau)$  とすれば、

$$E[X(t-\tau_1)X(t+\tau-\tau_2)] = R_{XX}(\tau+\tau_1-\tau_2)$$

となる事実を用いて、

$$\begin{aligned} E[Y(t)Y(t+\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_{XX}(\tau+\tau_1-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= R_{YY}(\tau) \end{aligned} \quad (64)$$

と書き表すことができる。この  $R_{YY}(\tau)$  は応答過程  $Y(t)$  の自己相関関数であって、 $R_{XX}(\tau)$  と同じく、時間差  $\tau$  のみに依存したものとなる。先に式 (48) に示したと同じく、この  $R_{YY}(\tau)$  の Wiener-Khintchine 変換で与えられる  $Y(t)$  の (自乗平均) スペクトル密度  $S_{YY}(\omega)$  を考えれば、

$$S_{YY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (65)$$

式 (64) を式 (65) に代入すれば、

$$S_{YY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_{XX}(\tau+\tau_1-\tau_2)e^{-j\omega\tau}d\tau_1d\tau_2d\tau$$

ここで、 $u=\tau_1$ ,  $v=\tau_2$ ,  $w=\tau+\tau_1-\tau_2$  なる変換を施せば上式は

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{j\omega u}du \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-j\omega v}dv \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(w)e^{-j\omega w}dw \right] \\ &= H(-\omega)H(\omega)S_{XX}(\omega) \\ &= |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \end{aligned} \quad (66)$$

となる。ここに  $S_{XX}(\omega)$  は式 (48) で与えられる  $X(t)$  のスペクトル密度である。すなわち、一般に線形系においては、応答  $Y(t)$  のスペクトル密度は入力  $X(t)$  のそれに系の周波数応答関数  $H(\omega)$  の絶対値の自乗を乗じたものとして表される。この関係は一般に工学的見地から構造物の設計を考えるというような場合に非常に重要な事実を示唆する。これを図示したのが図5である。図において (a) は入力のスペクトル密度  $S_{XX}(\omega)$  と構造物の応答特性  $|H(\omega)|^2$  のピークが重ならない場合を模式的に示し、(b) は両者のピークを与える周波数

がきわめて近接している場合を示している。 $S_{XX}(\omega)$  と  $|H(\omega)|^2$  の関係が図

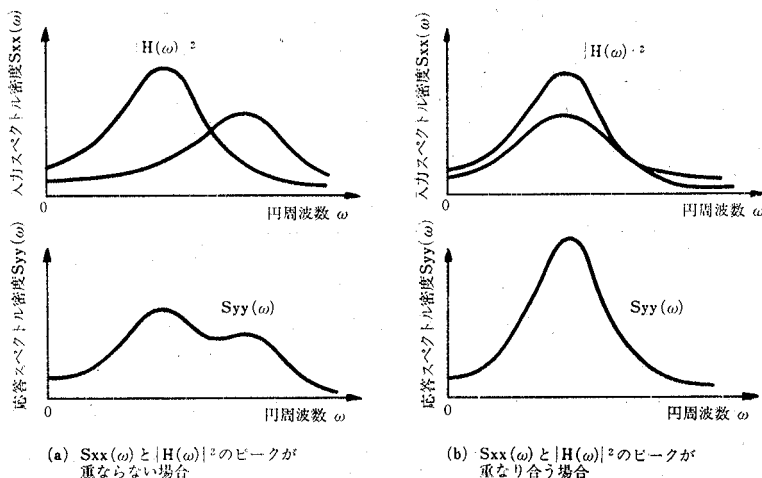


図5 入力スペクトル密度  $S_{XX}(\omega)$  と応答スペクトル密度  $S_{YY}(\omega)$  との関係

(b) のような場合には両者のピークの相乗作用のため  $S_{YY}(\omega)$  の値は一般に図 (a) の場合よりも大きくなるであろう。それゆえ  $S_{YY}(\omega)$  の  $\omega$  についての積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega) d\omega = R_{YY}(0) = E[\{Y(t)\}^2] \quad (67)$$

すなわち応答  $Y(t)$  の自乗平均値は図 (b) の場合の方が図 (a) の場合に比べてはるかに大きくなるものと考えられる。この関係は広義の共振 (resonance) 現象を表すものと解釈されるが、構造物の設計原理としては、入力スペクトル密度  $S_{XX}(\omega)$  が既知の場合には、このような共振が生じないように  $H(\omega)$  を定めるべく設計を行う必要がある。

ここで、スペクトル密度に関連して広帯域 (wide band) および狭帯域 (narrow band) という概念をはっきりさせておこう。確率過程  $X(t)$  のスペクトル密度を  $S_{XX}(\omega)$  とするとき、この  $S_{XX}(\omega)$  が図 6 中に点線で示したように非常

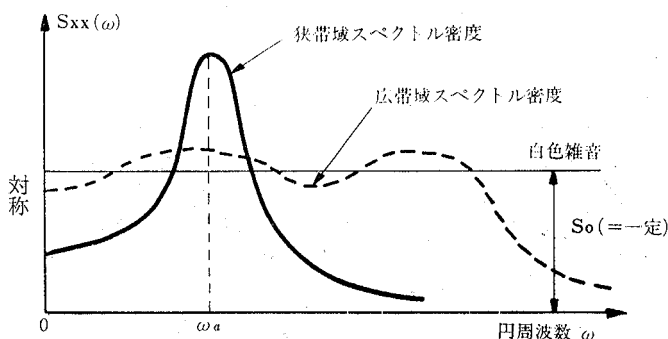


図6 広帯域スペクトル密度と狭帯域スペクトル密度

に広範囲の円周波数領域にわたってなだらかな変化を示すような場合には  $X(t)$  を広帯域の過程 (wide band process) と呼ぶ。これに対して図6中で実線で示したように  $S_{XX}(\omega)$  がある特定の周波数の近傍で大きなピークをもち、それ以外ではあまり大きな値をとらないような場合には、 $X(t)$  は狭帯域の過程 (narrow band process) であるといわれる。すでに述べたように、スペクトル密度がある周波数の成分波のもつパワーの程度を表すものであることを考えれば、広帯域過程にはいろいろの周波数成分波が同じような割合で幅広く混ざっているため、各々の標本関数のもつ波形は非常に乱れた (violentな) 様相を呈するであろう。これに反して、狭帯域過程の標本関数の示す波形は、ある円周波数の近傍に周波数成分が集中しているために、個々の極大、極小値の大きさおよび零値経過の間隔は確率的に変動するであろうが、全体としては正弦波あるいは余弦波に近いような様相を呈したものとなる。

さて、最後に白色雑音 (white noise) の概念を導入しよう。理想的に広帯域の白色雑音とはスペクトル密度  $S_{XX}(\omega)$  が  $\omega$  の全領域にわたって一定値

$$S_{XX}(\omega) = S_0 \quad (= \text{一定}) \quad (68)$$

であって、しかも  $E[X(t)] = 0$  であるような確率過程  $X(t)$  をいう。このよう

な確率過程は実在するものではないが、たとえば図 6 中に破線で示されるような広帯域のスペクトル密度の理想化として用いられることが多く、理論上は重要な確率過程である。白色雑音の自己相関関数  $R_{XX}(\tau)$  はデルタ関数の性質<sup>(注7)</sup>を用いて、式 (47) の Wiener-Khinchine の関係式から次のように求められる。

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= 2\pi S_0 \delta(\tau) \end{aligned} \quad (69)$$

なお、確率過程が広帯域であるか否か、さらにはこれを白色雑音として近似できるか否かの判断は、すべて確率過程のスペクトル密度  $S_{XX}(\omega)$  の広がり<sup>(注6)</sup>と、系応答の  $|H(\omega)|^2$  の広がりとの相対関係に基づいてなされる必要があるという点を充分認識しておく必要がある。

## 2.6 定常ガウス性確率過程の基本的統計諸量<sup>(30), (34)~(36), (45)</sup>

本研究においては定常ガウス性ランダム荷重に対する材料の疲労寿命の推定法を考えるのであるから、このような定常ガウス性確率過程のもつ基本的な統計的性質について明らかにしておく必要がある。既に第 1 節において述べたように、ガウス性 (正規性) という概念は非常に重要なものであるから、はじめにこれについて詳しく論じる。

(注 6)  $X(t)$  を理想的に広帯域の白色雑音とすると、

$$E[\{X(t)\}^2] = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega = \infty$$

となって、自乗平均が発散してしまうからである。

(注 7)  $t=t_0$  で連続な任意の関数  $\phi(t)$  に対して、デルタ関数  $\delta(t)$  とは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t+t_0) dt = \phi(t_0) \quad \text{--- ①}$$

で定義される。式①より  $\delta(t)$  のフーリエ変換  $F_\delta(\omega)$  は

$$F_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = [e^{-j\omega t}]_{t=0} = 1 \quad \text{--- ②}$$

したがって式②を逆変換することにより

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega \quad \text{--- ③}$$

$$\text{ゆえに } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t d\omega = 2\pi \delta(t) \quad \text{--- ④}$$

式④はしばしば用いられる重要な関係式である。

## 2. 6. 1 ガウス性確率過程の概念

第2・3節において  $M$  次元結合確率密度関数を用いて確率過程の定常性を厳密に論じたが、ここでもこの  $M$  次元確率密度関数を用いて議論することにする。

確率過程  $X(t)$  は任意の時刻  $t$  において連続型の確率変数であるとし、時刻  $t_i (i=1, 2, \dots, M)$  における  $X(t)$  の値を  $X(t_i)$  とする。しかるとき、ガウス性確率過程 (Gaussian random process) とは  $M$  個の  $X(t_i) (i=1, 2, \dots, M)$  に対して次の  $M$  次元確率密度がいかなる値の  $M$ 、いかなる  $(t_1, t_2, \dots, t_M)$  の組についても成立つ確率過程をいう。

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_M)}(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ = (2\pi)^{-M/2} |C_X|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} D_X^T C_X^{-1} D_X\right) \quad (70)$$

ここに、 $T$  は行列の転置を表す記号であり、 $C_X^{-1}$  は行列  $C_X$  の逆行列、また  $|C_X|$  は  $C_X$  の行列式を表し、さらに  $D_X$  は列ベクトル

$$D_X = [x_1 - \mu_{X_1}, x_2 - \mu_{X_2}, \dots, x_M - \mu_{X_M}] \quad (71)$$

ただし、

$$\mu_{X_i} = E[X(t_i)] \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (72)$$

を表す。行列  $C_X$  は共分散行列 (covariance matrix) と呼ばれ、次式

$$C_X = \begin{pmatrix} C_{X_{11}} & C_{X_{12}} & \dots & C_{X_{1M}} \\ C_{X_{21}} & C_{X_{22}} & \dots & C_{X_{2M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{X_{M1}} & C_{X_{M2}} & \dots & C_{X_{MM}} \end{pmatrix} \quad (73)$$

で定義される。ただし、 $C_{X_{ij}}$  は  $i=j$  のときは  $X(t_i) = X(t_j)$  の分散 (variance)  $s_{X_i}^2$  を表すものであって、

$$C_{X_{ii}} = \text{Var}[X(t_i)] = E\{[X(t_i) - \mu_{X_i}]^2\} = s_{X_i}^2 \quad (74)$$

また、 $i \neq j$  のときは  $X(t_i)$  と  $X(t_j)$  の共分散 (covariance) を表し、

$$C_{X_{ij}} = \text{Cov}[X(t_i), X(t_j)] \\ = E\{[X(t_i) - \mu_{X_i}][X(t_j) - \mu_{X_j}]\}$$

$$=E[X(t_i)X(t_j)]-\mu_{X_i}\mu_{X_j} \quad (75)$$

で与えられる。

式 (71) ~ (75) を用いれば、式 (70) はまた

$$\begin{aligned} & f_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_M)}(x_1, x_2, \cdots, x_M) \\ &= (2\pi)^{-M/2} |C_X|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M C_X^{ij}(x_i - \mu_{X_i})(x_j - \mu_{X_j})\right] \end{aligned} \quad (76)$$

とも表すことができる。ただし、 $C_X^{ij}$  は行列  $C_X^{-1}$  の第  $i$ - $j$  要素である。

さて、ここでガウス性確率過程  $X(t)$  は弱定常であると仮定しよう。しかるときは、すでに述べた弱定常性の性質から、 $\mu_{X_i} (i=1, 2, \cdots, M)$  は

$$\mu_{X_i} = E[X(t_i)] = E[X(t)] = \mu_X \quad (77)$$

となってすべて等しい定数  $\mu_X$  となり、式 (75) に与えた  $C_{X_{ij}} (i \neq j)$  は

$$C_{X_{ij}} = R_{XX}(t_j - t_i) - \mu_X^2 \quad (78)$$

すなわち時間差  $|t_j - t_i|$  のみの関数となる。さらに式 (74) の  $C_{X_{ii}}$  は

$$C_{X_{ii}} = \text{Var}[X(t_i)] = E\{[X(t_i) - \mu_X]^2\} = S_{X_i}^2 = R_{XX}(0) - \mu_X^2 \quad (79)$$

となることも分かる。自己相関関数  $R_{XX}(\tau)$  が偶関数であることに注意すれば、式 (78) および (79) から、 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_M)$  の共分散行列の対応する要素は全く等しく、したがってその逆行列要素間にも同様の関係

$$C_X^{ij} = C_X^{ji} \quad (80)$$

が成立する。さらに、弱定常性の性質から

$$E[X(t_i + \tau)] = E[X(t_i)] = \mu_X \quad (i=1, 2, \cdots, M) \quad (81)$$

となること、および時間の並進変換  $t \rightarrow t + \tau$  に対しては

$$(t_j + \tau) - (t_i + \tau) = t_j - t_i$$

となって  $\tau$  は含まれないこと等を勘案すれば、 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_M)$  の  $M$  次元確率密度関数は時間の並進変換  $t \rightarrow t + \tau$  に関して不変、すなわち、

$$f_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_M)}(x_1, x_2, \cdots, x_M) = f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\cdots X(t_M+\tau)}(x_1, x_2, \cdots, x_M) \quad (82)$$

であることが分かり、しかもこの不変性は  $M$  と  $\tau$  の値および  $(t_1, t_2, \cdots, t_M)$  の

いかなる組にも関係しないから、「ガウス性確率過程においては弱定常性は強定常性を意味する」ものといえる。

以上述べた所から定常ガウス性確率過程  $X(t)$  の具体的な（結合）確率密度関数の形が以下のように求まる。

$M=1$  のときは、

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_X^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_X)^2}{2s_X^2}\right] \quad (83)$$

$M=2$  のときは、

$$\begin{aligned} f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) \\ = \frac{1}{2\pi s_X^2 \sqrt{1-\rho_X^2(\tau)}} \exp\left[-\frac{1}{2s_X^2(1-\rho_X^2(\tau))} \left\{ (x_1-\mu_X)^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 2\rho_X(\tau)(x_1-\mu_X)(x_2-\mu_X) + (x_2-\mu_X)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (84)$$

ただし、 $\tau=t_2-t_1$  であって、

$$\rho_X(\tau) = \rho_{X(t_1), X(t_2)} = \frac{R_{XX}(\tau) - \mu_X^2}{s_X^2} \quad (85)$$

ここに  $\rho_{X(t_1), X(t_2)}$  は  $X(t_1)$  と  $X(t_2)$  の相関係数（coefficient of correlation）と呼ばれるものであって、次式で定義される。

$$\begin{aligned} \rho_{X(t_1), X(t_2)} &= \frac{\text{Cov}[X(t_1), X(t_2)]}{\sqrt{\text{Var}[X(t_1)]} \sqrt{\text{Var}[X(t_2)]}} \\ &= \frac{E\{[X(t_1) - E\{X(t_1)\}] \cdot [X(t_2) - E\{X(t_2)\}]\}}{\sqrt{\text{Var}[X(t_1)]} \cdot \sqrt{\text{Var}[X(t_2)]}} \\ &= \frac{E[X(t_1)X(t_2)] - E[X(t_1)] \cdot E[X(t_2)]}{\sqrt{\text{Var}[X(t_1)]} \cdot \sqrt{\text{Var}[X(t_2)]}} \end{aligned} \quad (86)$$

上式の定義から分かるように

$$-1 \leq \rho_{X(t_1), X(t_2)} \leq 1 \quad (87)$$

であって、 $\rho_{X(t_1), X(t_2)}$  は  $X(t_1)$  と  $X(t_2)$  との間の「線形」関係の程度を表す尺度である。つまり、

(i) もし  $\rho_{X(t_1), X(t_2)} = \pm 1$  であれば、 $X(t_1)$  と  $X(t_2)$  の間の関係は

$$X(t_2) = \pm aX(t_1) + b \quad (a \text{ は正, } b \text{ は任意の定数})$$

と書くことができ、逆もまた真である。

(ii) もし  $X(t_1)$  と  $X(t_2)$  が統計的に独立 (statistically independent) ならば

$$\rho_{X(t_1), X(t_2)} = 0$$

であるが、一般に逆は必ずしも真ではない。しかしながらガウス性確率過程の場合には式 (84) から分かるように  $\rho_{X(t_1), X(t_2)} = 0$  ならば  $X(t_1)$  と  $X(t_2)$  は統計的に独立となる。

## 2. 6. 2 確率過程のレベル交差の確率

確率過程  $X(t)$  があるレベルを超える確率について考える。ここでは取扱いの簡単さのために平均値  $\mu_X = E[X(t)] = 0$  と考えることとするが、これによって何ら議論の一般性を失うものではない。

さて、 $\mu_X = 0$  の確率過程  $X(t)$  があるレベル  $\sigma$  ( $\geq 0$ ) を微小時間  $(t, t+dt)$  の間に正の勾配で横切る確率を  $v^+(\sigma)dt$  とする。図 7 に示すように、この微小

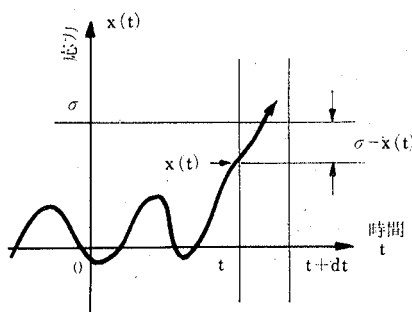


図 7 レベル  $\sigma$  を正勾配で横切る  $x(t)$  の截片

時間内では  $X(t)$  は直線的であると仮定すれば、そのような事象の起こる確率は次式で与えられる。

$$v^+(\sigma)dt = P\left[X(t) < \sigma, \dot{X}(t) > \frac{\sigma - X(t)}{dt}\right] \quad (88)$$

$X(t)$  と  $\dot{X}(t)$  の結合確率密度関数を  $f_{X(t), \dot{X}(t)}(\xi, \eta)$  とすれば、式 (88) 右辺に示した結合事象の確率は図 8 に示した  $\xi-\eta$  平面における斜線部領域  $D$  内での



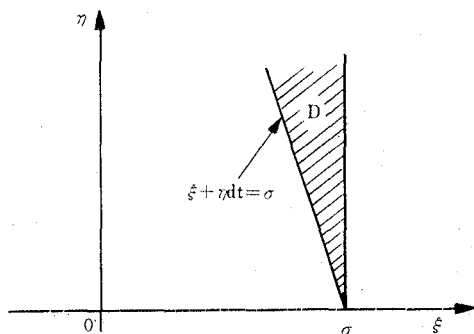


図8 式(88)の同時発生確率を求めるための積分領域D

$f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta)$  の積分で与えられることが容易にわかる。したがって、

$$\begin{aligned} \nu^+(\sigma)dt &= \int_D f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_0^\infty \int_{\sigma-\eta dt}^\sigma f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= dt \int_0^\infty \eta f_{X(t)\dot{X}(t)}(\sigma, \eta) d\eta \end{aligned} \quad (89)$$

両辺を  $dt$  で割って

$$\nu^+(\sigma) = \int_0^\infty \eta f_{X(t)\dot{X}(t)}(\sigma, \eta) d\eta \quad (90)$$

この  $\nu^+(\sigma)$  は  $X(t)$  がレベル  $\sigma$  を正の勾配で (下から上へ) 横切る単位時間当たりの平均回数の時刻  $t$  における値を表す。<sup>(注8)</sup>

ここで  $X(t)$  は平均値  $\mu_X = 0$  の定常ガウス性確率過程であるとして、結合確率密度  $f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta)$  を求めることを考えよう。ガウス性確率過程  $X(t)$  に線

(注8)  $dt$  は充分小さいから、 $(t, t+dt)$  で交差は1回起こるか、あるいは起こらないかのいずれかであると考えてよい。前者の確率を  $\nu^+(\sigma)dt$ 、後者の確率を  $1 - \nu^+(\sigma)dt$  とすると交差回数の期待値は

$$0 \times \xi + 1 \times \nu^+(\sigma)dt = \nu^+(\sigma)dt$$

したがってこれを  $dt$  で割った  $\nu^+(\sigma)$  は時刻  $t$  における単位時間当たりの平均交差回数を与える。

なお、時刻  $t$  と断る理由は、非定常過程においてはこの値  $\nu^+(\sigma)$  が時刻  $t$  を含む関数となることが考えられるからである。

形な操作（和・差・微分・積分など）を施して得られる確率過程はそれが存在する限りまたガウス性確率過程となることが分かっているから、 $\dot{X}(t) = dX(t)/dt$  もまた定常ガウス性確率過程であって、その平均値は

$$E[\dot{X}(t)] = \frac{d}{dt}\{E[X(t)]\} = \frac{d\mu_X}{dt} = 0$$

である<sup>(注9)</sup> また  $X(t)$  が定常ガウス性確率過程であれば、 $X(t)$  と  $\dot{X}(t)$  とは互いに独立であるから、 $\rho_{X(t)\dot{X}(t)} = 0$  となる。これらの事実を式 (76) から計算される  $X(t)$  と  $\dot{X}(t)$  の結合確率密度

$$f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi s_X s_{\dot{X}}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{X\dot{X}}^2)}\left(\frac{\xi^2}{s_X^2} - \frac{2\rho_{X\dot{X}}\xi\eta}{s_X s_{\dot{X}}} + \frac{\eta^2}{s_{\dot{X}}^2}\right)\right] \quad (91)$$

ただし、 $E[X(t)] = E[\dot{X}(t)] = 0$  から、

(注9) 一般に集合平均をとる操作と微分操作とは順序を入れかえてもよい。すなわち、

$$E\left[\frac{d^m X(t)}{dt^m}\right] = \frac{d^m}{dt^m}\{E[X(t)]\}$$

$$E\left[\frac{d^m X(t)}{dt^m} \frac{d^n X(s)}{ds^n}\right] = \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial s^n}\{E[X(t)X(s)]\}$$

(注10)  $X(t)$  のスペクトル密度を  $S_{XX}(\omega)$  とすると、Wiener-Khinchine 変換から

$$R_{XX}(t-u) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega(t-u)} d\omega$$

したがって

$$E[X(t)\dot{X}(u)] = \frac{\partial}{\partial u}\{E[X(t)X(u)]\} = \frac{\partial}{\partial u}R_{XX}(t-u)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega(t-u)} d\omega$$

$$= -j \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_{XX}(\omega) e^{j\omega(t-u)} d\omega$$

$S_{XX}(\omega)$  が  $\omega$  の偶関数であることを勘案し、上式において  $u=t$  とすると

$$E[X(t)\dot{X}(t)] = -j \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_{XX}(\omega) d\omega = 0$$

$$\text{それゆえ、} \delta_{X(t)\dot{X}(t)} = \frac{E[X(t)\dot{X}(t)]}{s_{X(t)}s_{\dot{X}(t)}} = 0$$

となって、 $X(t)$  と  $\dot{X}(t)$  は互いに統計的に独立といえる。

$$\left. \begin{aligned} s_X^2 &= E\{\{X(t)\}^2\} \\ s_{\dot{X}}^2 &= E\{\{\dot{X}(t)\}^2\} \\ \rho_{X\dot{X}} &= E[X(t)\dot{X}(t)]/(s_X s_{\dot{X}}) \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

に適用して、最終的に定常ガウス性過程に対しては

$$f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi s_X s_{\dot{X}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{s_X^2} + \frac{\eta^2}{s_{\dot{X}}^2}\right)\right] \quad (93)$$

を得る。式(93)を式(90)に代入して $\nu^+(\sigma)$ を求めると、定常過程に対して

$$\begin{aligned} \nu^+(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \frac{s_{\dot{X}}}{s_X} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2s_X^2}\right) \\ &= \nu^+(0) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2s_X^2}\right) \end{aligned} \quad (94)$$

ここに、 $\nu^+(0)$ は定常ガウス性確率過程 $X(t)$ が単位時間当たり零零レベルを正勾配で横切る平均回数 (expected number of zero crossings) であって

$$\nu^+(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{s_{\dot{X}}}{s_X} \quad (95)$$

で与えられるものである。

なお、非定常ガウス性確率過程 $X(t)$ に対しては式(91)を式(90)に代入することにより

$$\begin{aligned} \nu^+(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \frac{s_{\dot{X}}}{s_X} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2s_X^2}\right) \left[ \sqrt{1 - \rho_{X\dot{X}}^2} \exp\left(-\frac{\rho_{X\dot{X}}^2 \sigma^2}{2(1 - \rho_{X\dot{X}}^2) s_X^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2\pi} \rho_{X\dot{X}} \frac{\sigma}{s_X} \Phi\left(\frac{\rho_{X\dot{X}} \sigma}{\sqrt{1 - \rho_{X\dot{X}}^2} s_X}\right) \right] \end{aligned} \quad (96)$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規確率分布関数 (standardized normal probability distribution function) であって

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\xi^2/2} d\xi \quad (97)$$

で定義される。確率過程が非定常 (nonstationary) の場合には一般に $s_X$ ,  $s_{\dot{X}}$ ,  $\rho_{X\dot{X}}$ が時間の関数であることから、式(96)の $\nu^+(\sigma)$ もまた時間の関数となる。

ここで式(95)の $\nu^+(0)$ をスペクトル密度を用いて表すことを考えよう。

$X(t)$  および  $\dot{X}(t)$  は共に平均値 0 の定常過程であるから、

$$\begin{aligned} s_X^2 &= E[\{X(t)\}^2] = R_{XX}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (98)$$

また (脚注 9) および (10) (34頁参照) に示した所から、

$$\begin{aligned} E[\dot{X}(t)\dot{X}(u)] &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} R_{XX}(t-u) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial u} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega(t-u)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) e^{j\omega(t-u)} d\omega \end{aligned} \quad (99)$$

上式で  $u=t$  とおけば

$$\begin{aligned} s_{\dot{X}}^2 &= E[\{\dot{X}(t)\}^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (100)$$

式 (98) および式 (100) を式 (95) に代入して、

$$\begin{aligned} \nu^+(0) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_0^{\infty} \omega^2 G_{XX}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) d\omega}} \end{aligned} \quad (101)$$

式 (91) および (93) に示した  $X(t)$  と  $\dot{X}(t)$  の結合確率密度の対称性を勘案すれば、式 (94) および (96) は共に  $X(t)$  が負の勾配で (上から下に) レベル  $-\sigma (\sigma \geq 0)$  を横切る単位時間当たりの平均回数  $\nu^-(-\sigma)$  を示すものとも考えられる。

### 2. 6. 3 極値 (ピーク値) の確率分布

平均値  $E[X(t)] = 0$  の確率過程  $X(t)$  が図 9 に示すように、時間領域  $(t, t+dt)$  において  $\sigma$  と  $\sigma+d\sigma$  の間の大きさの極大値 (maximum; 正ピーク (positive peak) ともいう) をもつ確率  $p(\sigma)d\sigma dt$  を考える。時間間隔  $dt$  は十分に小さい

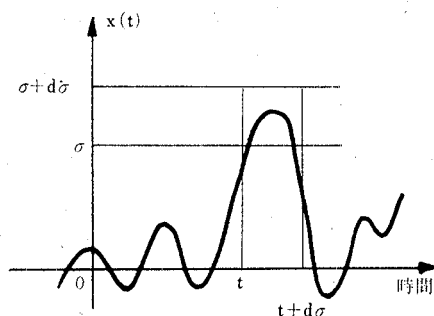


図9 確率過程が時間間隔  $(t, t+dt)$  の間に大きさ  $\sigma$  と  $\sigma+d\sigma$  の間の極大点をもつ状態

と考えるとよいので  $(t, t+dt)$  においては  $\ddot{X}(t)$  がほとんど変化せず一定値である, すなわち  $\dot{X}(t)$  がこの時間領域内では直線的であると仮定すれば, そのような事象が起きるための条件は, 図10を参照して, 次の (i)~(iii) の事象が同時に満足されることである。

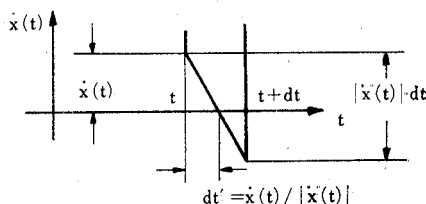


図10 微小時間  $dt$  内での  $\dot{x}(t)$  の時間的変化

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \ddot{X}(t) < 0 \\ \text{(ii)} \quad |\ddot{X}(t)| dt > \dot{X}(t) \\ \text{(iii)} \quad \sigma + d\sigma > X(t) + \frac{1}{2} \left\{ \dot{X}(t) \right\}^2 / |\ddot{X}(t)| > \sigma \end{array} \right\} \quad (102)$$

条件 (iii) は, 図9および図10に示すように, 時刻  $t+dt'$  ( $dt' \leq dt$ ) で  $X(t)$  が極大点をもち, またその極大値が

$$X(t+dt') \cong X(t) + \dot{X}(t) dt' + \frac{1}{2} \ddot{X}(t) (dt')^2$$

$$= X(t) + \frac{1}{2} \left\{ \dot{X}(t) \right\}^2 / |\ddot{X}(t)|$$

として近似計算される所から明白である。

ここで、先に  $\nu^+(\sigma)$  を考えたときと同じような考え方にに基づき、 $X(t)$ 、 $\dot{X}(t)$  および  $\ddot{X}(t)$  の結合確率密度関数を  $f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\xi, \eta, \zeta)$  とすれば、事象 (i) ~ (iii) が同時に起こる確率は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} p(\sigma) d\sigma dt &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{|\zeta| dt} \int_{\sigma - \frac{1}{2} \eta^2 / |\zeta|}^{\sigma + d\sigma - \frac{1}{2} \eta^2 / |\zeta|} f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ &= d\sigma dt \int_0^{-\infty} \zeta f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\sigma, 0, \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (103)$$

したがって、先に (脚注 8) で述べたと同様に  $p(\sigma) d\sigma$  は  $X(t)$  が、時刻  $t$  において、その大きさが  $(\sigma, \sigma + d\sigma)$  の範囲にある極大値をもつ単位時間当たりの平均回数を与えることが分かる。それゆえ式 (103) より得られる

$$p(\sigma) = \int_0^{-\infty} \zeta f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\sigma, 0, \zeta) d\zeta \quad (104)$$

は時刻  $t$  において  $X(t)$  が大きさ  $\sigma$  の極大値をもつ単位時間当たりの平均回数の発生密度を表すものといえる。 $p(\sigma)$  を  $(\sigma, \infty)$  の領域で積分し、これを  $\nu_p^+(\sigma)$  とすれば、

$$\begin{aligned} \nu_p^+(\sigma) &= \int_{\sigma}^{\infty} p(\sigma) d\sigma \\ &= \int_{\sigma}^{\infty} \int_0^{-\infty} \zeta f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\sigma, 0, \zeta) d\zeta d\sigma \end{aligned} \quad (105)$$

であって、この  $\nu_p^+(\sigma)$  は、 $X(t)$  が単位時間当たりレベル  $\sigma$  より上に極大点を有する平均回数の時刻  $t$  における値を与える。

式 (105) において  $\sigma = -\infty$  とした場合の値を  $\nu_m^+$  と書くことにすれば、

$$\begin{aligned} \nu_m^+ &= \nu_p^+(-\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{-\infty} \zeta f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\sigma, 0, \zeta) d\zeta d\sigma \\ &= \int_0^{-\infty} \zeta \int_{-\infty}^{\infty} f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\sigma, 0, \zeta) d\sigma d\zeta \\ &= \int_0^{-\infty} \zeta f_{\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(0, \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (106)$$

式 (106) で与えられる  $\nu_m^+$  は時刻  $t$  において  $X(t)$  が任意の値の極大点をもつ単位時間当たりの平均回数を表すものである。

さて、ここで確率過程  $X(t)$  にエルゴード性とガウス性を付与しよう。<sup>(注11)</sup> そうすれば、 $E[X(t)] = 0$  であるから  $\dot{X}(t)$  および  $\ddot{X}(t)$  の平均値もまた 0 となっており、また式 (76) から結合確率密度  $f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\xi, 0, \zeta)$  が次のように計算される。

$$f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\xi, 0, \zeta) = (2\pi)^{-3/2} |C|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(C^{11}\xi^2 + 2C^{31}\xi\zeta + C^{33}\zeta^2)\right] \quad (107)$$

ここに、 $C$  は  $X(t)$ ,  $\dot{X}(t)$ ,  $\ddot{X}(t)$  の共分散行列であって、

$$C = \begin{Bmatrix} \begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{matrix} \\ C_{ij} = E\left[\frac{d^{i-1}X(t)}{dt^{i-1}} \cdot \frac{d^{j-1}X(t)}{dt^{j-1}}\right] \\ (i, j = 1, 2, 3) \end{Bmatrix} \quad (108)$$

で与えられ、また  $C^{ij}$  は逆行列  $C^{-1}$  の第  $i-j$  要素である。(脚注 9) および (10) (34頁参照) の説明を応用して、

$$C_{11} = E[X(t) \cdot X(t)] = s_X^2 \quad (109-a)$$

$$C_{12} = C_{21} = E\left[X(t) \cdot \frac{dX(t)}{dt}\right] = E[X(t) \cdot \dot{X}(t)] = 0 \quad (109-b)$$

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{31} = E\left[X(t) \cdot \frac{d^2X(t)}{dt^2}\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} E[X(t)X(u)] \Big|_{u=t} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} R(t-u) \Big|_{u=t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega(t-u)} d\omega \Big|_{u=t} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega = -s_{\dot{X}}^2 \quad (\because \text{式 (100) より}) \\ &= -C_{22} \end{aligned} \quad (109-c)$$

(注11) すでに第 2・3 節で述べたように、確率過程がエルゴード性をもてばその確率過程は少なくとも弱定常過程である。

$$C_{23} = C_{32} = E\left[\frac{dX(t)}{dt} \cdot \frac{d^2X(t)}{dt^2}\right] = E\left[\dot{X}(t) \cdot \frac{d\dot{X}(t)}{dt}\right] = 0 \quad (109-d)$$

( $\because C_{12} = C_{21}$  の項参照)

$$\begin{aligned} C_{33} &= E\left[\left(\frac{d^2X(t)}{dt^2}\right)^2\right] = \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial u^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega(t-u)} d\omega \Big|_{u=t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_{XX}(\omega) d\omega = s_{\ddot{X}}^2 \end{aligned} \quad (109-e)$$

と計算されるから、これらを式(108)に代入して、

$$C = \begin{pmatrix} s_{\dot{X}}^2 & 0 & -s_{\ddot{X}}^2 \\ 0 & s_{\dot{X}}^2 & 0 \\ -s_{\ddot{X}}^2 & 0 & s_{\ddot{X}}^2 \end{pmatrix} \quad (110)$$

それゆえに

$$|C| = s_{\dot{X}}^2 (s_{\dot{X}}^2 s_{\ddot{X}}^2 - s_{\ddot{X}}^4) \quad (111)$$

となって、また  $|C| > 0$  である。<sup>(注12)</sup>

さて  $C$  が式(110)で与えられるから、同式から  $C^{ij}$  が求まり、これらを式(107)に代入すれば結合確率密度  $f_{X(t)\dot{X}(t)\ddot{X}(t)}(\xi, 0, \xi)$  が求まり、それを式(104)に適用すれば、 $p(\sigma)$  は最終的には次式のように計算される。

$$\begin{aligned} p(\sigma) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3 s_{\dot{X}}^2 s_{\ddot{X}}^2} \left[ s_{\dot{X}}^2 \sqrt{Q} \exp\left(-\frac{s_{\ddot{X}}^2}{2Q} \sigma^2\right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma s_{\ddot{X}}^4 \left| \frac{\pi}{2 s_{\dot{X}}^2 s_{\ddot{X}}^2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{s_{\ddot{X}}^2 \sigma}{s_{\dot{X}} \sqrt{2Q}}\right) \right\} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2 s_{\dot{X}}^2}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (112)$$

ただし、

$$Q = s_{\dot{X}}^2 s_{\ddot{X}}^2 - s_{\ddot{X}}^4$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$$

ここに、 $\operatorname{erf}(z)$  は誤差関数 (error function) と呼ばれるものである。

また式(106)の  $\nu_m^+$  は

$$\nu_m^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{s_{\ddot{X}}}{s_{\dot{X}}}$$

(注12) Schwarz の不等式から

$$s_{\ddot{X}}^4 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega \right]^2 < \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_{XX}(\omega) d\omega = s_{\dot{X}}^2 s_{\ddot{X}}^2$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_{XX}(\omega) d\omega \right\} / \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega \right\} \right]^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \left\{ \int_0^{\infty} \omega^4 G_{XX}(\omega) d\omega \right\} / \left\{ \int_0^{\infty} \omega^2 G_{XX}(\omega) d\omega \right\} \right]^{1/2} \quad (113)
 \end{aligned}$$

上記のように  $X(t)$  にガウス性ならびにエルゴード性を仮定した場合には  $p(\sigma)$  および  $\nu_m^+$  はともに  $t$  に無関係となることが分かる。また  $p(\sigma)d\sigma$  を時間的側面から解釈すれば、 $X(t)$  の任意の標本関数  $x(t)$  が単位時間当たり有する大きさ  $(\sigma, \sigma+d\sigma)$  の間の極大値の個数の期待値 (平均個数) を表すものと考えてよい。同様に  $\nu_m^+$  は単位時間当たりの任意の大きさの極大値の平均個数 (平均極大点総数) を表すものと解釈される。それゆえ、大きさ  $\sigma$  の極大値の発生密度を  $f_p(\sigma)$  とすれば、

$$f_p(\sigma)d\sigma = p(\sigma)d\sigma/\nu_m^+$$

すなわち

$$f_p(\sigma) = p(\sigma)/\nu_m^+ \quad (114)$$

式 (112) および (113) を式 (114) に代入して整理すれば、

$$\begin{aligned}
 f_p(\sigma) &= \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{2\pi S_X^2}} \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2(1-\lambda^2)S_X^2} \right] \\
 &\quad + \frac{\lambda\sigma}{S_X^2} \Phi \left[ \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{1-\lambda^2}S_X} \right] \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2S_X^2} \right) \quad (115)
 \end{aligned}$$

ここで  $\Phi(\cdot)$  は先に式 (97) で示した標準正規確率分布であり、また  $\lambda$  は任意の標本関数  $x(t)$  が正の勾配で (下から上に) 零レベル ( $\sigma=0$ ) を横切る単位時間当たりの平均個数  $\nu^+(0)$  の、同じく単位時間当たりの平均極大点総数  $\nu_m^+$  に対する比であって、いわゆる不規則度比 (irregularity ratio) もしくは零値経過率 (zero-crossing rate) といわれ、確率過程を構成する各々の標本関数の波形の乱れの程度を表すものと考えられる。式 (101) および式 (113) から

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\nu^+(0)}{\nu_m^+} = \frac{\dot{S}_X^2}{S_X S_{\ddot{X}}} \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega \right\} / \left[ \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_{XX}(\omega) d\omega \right\} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \int_0^\infty \omega^2 G_{XX}(\omega) d\omega \right\} / \left[ \left\{ \int_0^\infty G_{XX}(\omega) d\omega \right\} \left\{ \int_0^\infty \omega^4 G_{XX}(\omega) d\omega \right\} \right]^{1/2} \quad (116)$$

また（脚注12）（40頁参照）に示した結果から

$$0 < s\dot{x}^4 < s_x^2 s\ddot{x}^2$$

が明らかであるから、 $\lambda$ のとりうる値の範囲は

$$0 < \lambda < 1 \quad (117)$$

となることが分かる。

式（115）で示される極大値の確率密度 $f_p(\sigma)$ が不規則度比 $\lambda$ に応じてどのように変化するかを図11に示した。確率過程 $X(t)$ がエルゴード性をもち、平均値0のガウス性過程であるうえに、さらにそれが狭帯域過程（narrow band process）であれば、波形はほぼ正・余弦波に近いものとなり、 $v^+(0) \equiv v_m^+$ と

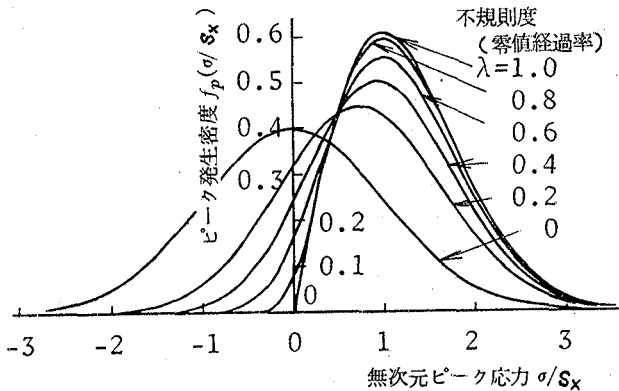


図11 不規則度比 $\lambda$ による極大ピーク応力発生密度の変化

考えられるので、不規則度比 $\lambda$ は $\lambda \rightarrow 1$ となって、 $f_p(\sigma)$ は次式で表されるレーレー分布（Rayleigh distribution）に近づく。

$$f_p(\sigma) |_{\lambda \rightarrow 1} = \frac{\sigma}{s_x^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2s_x^2}\right) \quad (\sigma \geq 0) \quad (118)$$

一方もし $X(t)$ が広帯域過程（wide band process）であるならば、その標本関数の波形は非常に乱れたものとなるであろうから、 $v^+(0) \ll v_m^+$ 、すなわち

$\lambda \rightarrow 0$  に近づくものと考えられ、それゆえ  $f_p(\sigma)$  は次のようなガウス分布に近づくであろう。

$$f_p(\sigma) \mid \lambda \rightarrow 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_x}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2s_x^2}\right) \quad (-\infty < \sigma < \infty) \quad (119)$$

上式はもし平均値 0 の ergodic なガウス性確率過程  $X(t)$  が理想的に広帯域であれば、その標本関数の極大値の分布が  $X(t)$  の分布と全く同一となるということを示している。

一般に実際の確率過程においては  $\lambda$  は上記両極端の中間の値をとるものと考えられるので、極大値の分布はレーレー分布とガウス分布の中間のものとなる。

以上、極大値に関して得られた結果は、ガウス分布の対称性から、当然極小値についても適用することができる。

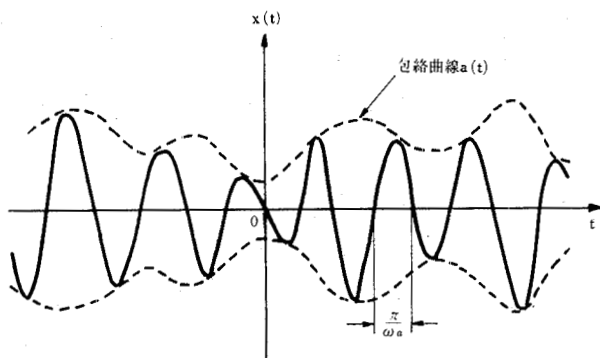
## 2. 6. 4 狭帯域確率過程の包絡線の分布

エルゴード性を有する平均値 0 のガウス性確率過程  $X(t)$  を考え、さらにそれが狭帯域であると仮定する。前節 2・6・3 で述べたように、理想的に狭帯域の確率過程では不規則度比  $\lambda$  は  $\lambda \rightarrow 1$  であり、したがって  $\nu^+(0) \equiv \nu_m^+$  が成立つ。このことは、 $X(t)$  の任意の標本関数  $x(t)$  において、波が零レベルを下から上に(上から下に)横切ればそれに対応して 1 つの極大値(極小値)が存在することを意味し、またある円周波数  $\omega_a$  の近くに周波数成分が集中しているために、結局  $x(t)$  の時間的な変化は図 12 に示すような三角関数的なものとなるであろうことが示唆される。波が単位時間当たりに零レベルを下から上に(または上から下に)横切る平均回数は式 (95) の  $\nu^+(0)$  で与えられるから、近似的に、これがいわゆる「見かけの振動数」となる。それゆえ見かけの円周波数  $\omega_a$  は次式

$$\omega_a = 2\pi\nu^+(0) = s_x^+ / s_x \quad (120)$$

で求まる。

さて、標本関数  $x(t)$  が以上のように三角関数的に変化するときには、この  $x(t)$  になめらかに接するような包絡曲線 (envelope curve)  $a(t)$  の存在が示

図12 狭帯域確率過程  $X(t)$  とその包絡曲線  $A(t)$ 

唆されよう。この  $a(t)$  を標本関数とするような確率過程を  $A(t)$  で表すことにすれば、 $X(t)$  は近似的に次式のごとく書き表すことができる。

$$X(t) = A(t) \sin \omega_a t \quad (121)$$

しかるときは、

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \dot{A}(t) \sin \omega_a t + A(t) \omega_a \cos \omega_a t \\ &\cong A(t) \omega_a \cos \omega_a t \end{aligned} \quad (122)$$

ここで、 $A(t)$  はゆるやかに変化するであろうから、 $\dot{A}(t) \cong 0$  とみなした<sup>(46)</sup>。  
式 (121) および (122) から

$$A^2(t) = X^2(t) + \left\{ \frac{\dot{X}(t)}{\omega_a} \right\}^2 \quad (123)$$

つぎに、時刻  $t$  における  $A(t)$  の確率分布関数を  $F_A(\sigma)$  とすれば、これは  $X(t)$  および  $\dot{X}(t)$  の結合確率密度  $f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta)$  を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} F_A(\sigma) &= P[A(t) \leq \sigma] \\ &= P\left[X^2(t) + \left\{ \frac{\dot{X}(t)}{\omega_a} \right\}^2 \leq \sigma^2\right] \\ &= \iint_{\xi^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_a}\right)^2 \leq \sigma^2} f_{X(t)\dot{X}(t)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (124)$$

式 (93) を式 (124) に代入し,  $\xi = \frac{\eta}{\omega_a}$  なる変換を施せば,

$$F_A(\sigma) = \int \int_{\xi^2 + \zeta^2 \leq \sigma^2} \frac{\omega_a}{2\pi s_X s_X^*} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\xi^2}{s_X^2} + \frac{\omega_a^2 \zeta^2}{s_X^{*2}} \right) \right] d\xi d\zeta$$

上式に式 (120) を代入し, かつ  $\xi = r \sin \theta, \zeta = r \cos \theta$  なる変数変換を行えば, 変換のヤコビアンは

$$\left| \frac{\partial(\xi, \zeta)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ r \cos \theta & -r \sin \theta \end{vmatrix} = r$$

であるから,

$$\begin{aligned} F_A(\sigma) &= \int \int_{r^2 \leq \sigma^2} \frac{r}{2\pi s_X^2} \exp \left( -\frac{r^2}{2s_X^2} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^\sigma \frac{r}{s_X^2} \exp \left( -\frac{r^2}{2s_X^2} \right) dr \\ &= \int_0^{\sigma^2} \frac{1}{2s_X^2} \exp(-u) du \quad \left( \because \frac{r^2}{2s_X^2} = u \text{ と置く} \right) \\ &= 1 - \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2s_X^2} \right) \end{aligned} \quad (125)$$

式 (125) を微分すれば次の確率密度関数を得る。

$$f_A(\sigma) = \frac{\sigma}{s_X^2} \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2s_X^2} \right) \quad (126)$$

すなわち, エルゴード性を有した平均値 0 の狭帯域ガウス性確率過程の包絡曲線の分布はレーレー分布となり, これはその過程の極大値の分布に等しくなることが分かる。

### 3. 実働ランダム荷重に対する疲労寿命推定法について

前第 2 節で述べた確率過程の数学的記述法を援用して, 本節ではランダム荷重に対する理論的な材料の疲労寿命推定法について論じる。そのために, これまで考えてきた確率過程  $X(t)$  が材料に負荷される ergodic なガウス性ランダム荷重であるとみなすことにしよう。また簡単のため  $E[X(t)] = 0$  であると仮

定する。

### 3.1 ランダム荷重波の荷重頻度分布

一般に材料の疲労寿命を推定するに際しては、負荷される荷重波のもつ荷重頻度分布 (load frequency distribution) が明らかにされなければならない。荷重頻度分布としては負荷荷重波のピーク値に着目するのか、または振幅値 (レインジ値) に注目するのかによって種々の方法が提唱されている<sup>(47)</sup>が、ここでは理論的な観点から主としてピーク値によるものを考えることとする。

さて、平均値 0 のエルゴード性を有したガウス性ランダム荷重  $X(t)$  における極大ピーク応力の発生頻度  $f_p(\sigma)$  は式 (115) から明らかなように、零値経過率もしくは不規則度比  $\lambda$  の値に依存して異なった形状のものとなり、その変化の様子はすでに図11に示した通りである。ところで後述するように、本実験における  $\lambda$  の値は、炭素鋼の場合、そのほとんどすべてが  $\lambda=0.7\sim 1.0$  の間に分布したものであって (後述図24参照)、図11から観察されるように、疲労被害をもたらすと考えられる応力範囲においては、この程度の  $\lambda$  の差異による極大ピーク応力の発生頻度の相違はそれ程大きくないものと考えられる。またすでに述べたように、 $\lambda \rightarrow 1$  における  $f_p(\sigma)$  の形状はレーレー分布に一致し、数学的取扱いも簡単である。

以上の観点から、本節における疲労被害の算定に際して極大ピーク応力の頻度分布  $f_p(\sigma)$  を近似的に式 (118) のレーレー分布であると仮定する。したがって、 $E[X(t)] = 0$  のランダム荷重波  $X(t)$  のパワー (分散) を  $\phi_X = s_X^2$  とすると、

$$f_p(\sigma) = \frac{\sigma}{s_X^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2s_X^2}\right) \quad (\sigma \geq 0) \quad (127)$$

いま、極大ピーク応力の自乗平均値を  $\sigma_{rms}^2$  とすれば、これは式 (127) を用いて

$$\sigma_{rms}^2 = \int_0^\infty \sigma^2 f_p(\sigma) d\sigma = 2s_X^2 \quad (128)$$

ここに、 $\sigma_{rms}$  は極大ピーク応力の自乗平均平方根 (root mean square value)

を表すものであって、以後においては極大ピーク応力の rms 値もしくは rms ピーク応力と称することにする。式 (127) および (128) から、

$$f_p(\sigma) = \frac{2\sigma}{\sigma_{rms}^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\sigma_{rms}^2}\right) \quad (129)$$

したがって、極大ピーク応力の頻度を大きな応力レベルの方から累積した累積頻度分布  $\bar{F}_p(\sigma)$  は、

$$\bar{F}_p(\sigma) = \int_{\sigma}^{\infty} f_p(\sigma) d\sigma = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\sigma_{rms}^2}\right) \quad (130)$$

$\bar{F}_p(\sigma)$  はまた荷重超過曲線 (load exceedance curve) ともいわれることがある。式 (130) の両辺の自然対数をとって整理すれば、

$$\sigma^2 = -\sigma_{rms}^2 \ln\{\bar{F}_p(\sigma)\} \quad (131)$$

となって、 $\sigma^2$  と  $\ln\{\bar{F}_p(\sigma)\}$  が直線関係を示す。したがって、種々の応力計数法によって得た極大ピーク応力もしくは応力振幅の実測頻度分布にこの式を適用することによって頻度分布がレーレー分布に従うか否かの検定ができ、またレーレー分布に従う場合はその直線の傾きからピーク応力または応力振幅の rms 値、 $\sigma_{rms}$ 、が計算されうることになる。

### 3. 2 修正マイナーの方法による累積被害 $\Sigma(n/N)$ と等価応力 $\sigma_{eq}$

いま一定応力振幅負荷下における基本 S—N 曲線が次式

$$N\sigma^m = C, (\sigma \geq \sigma_w) \quad (132)$$

で表されるものとする。ただし、 $m, C$  は材料定数であり、 $\sigma_w$  は疲労限度である。ランダム荷重の応力頻度分布は式 (129) で表されるレーレー分布に従うと考えられるので、この頻度分布に基づき、基本 S—N 曲線を疲労限度  $\sigma_w$  以下にも延長したいわゆる修正マイナーの方法を適用して求めた累積被害  $\Sigma(n/N)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Sigma(n/N) &= (N_f/C) \int_0^{\infty} \sigma^m f_p(\sigma) d\sigma \\ &= (N_f/C) (\sigma_{rms})^m D(m) \end{aligned} \quad (133)$$

ここで、 $N_f$  はランダム荷重下での破断までの総繰返し数であり、また  $D(m)$

は次式で表される関数である。

$$D(m) = \int_0^{\infty} 2\sigma^{m+1} \exp(-\sigma^2) d\sigma$$

$$= \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \quad (134)$$

このような関数  $D(m)$  は  $m$  のみに依存した関数であり、 $m$  が定数ならば  $D(m)$  もまた定数となる。 $D(m)$  はランダム疲労における累積被害に関する情報を与えるものであるから、これを被害関数と称することにする。

つぎに、あるランダム荷重に対して、基本  $S-N$  曲線を用いて修正マイナーの方法により計算した累積被害  $\Sigma(n/N)$  が 1 となるような理論寿命  $N_{th}$  を考え、基本  $S-N$  曲線上でこの  $N_{th}$  に対応する応力振幅をもって、そのランダム荷重に対する等価応力  $\sigma_{eq}$  と呼ぶことにすれば、 $\sigma_{eq}$  は式 (132), (133) および  $\Sigma(n/N) \equiv 1$  の関係を用いて、

$$\sigma_{eq} = \sigma_{rms} \cdot \{D(m)\}^{1/m} \quad (135)$$

で与えられる。上式の両辺の対数をとれば、

$$\log \sigma_{eq} = \log \sigma_{rms} + \frac{1}{m} \log D(m) \quad (136)$$

### 3.3 ランダム $S-N$ 曲線

一般にランダム荷重下で得られた疲労試験結果に対して、基本  $S-N$  曲線を用いて修正マイナーの方法によって計算した累積被害  $\Sigma(n/N)$  の値は必ずしも 1 とはならないことが多い<sup>(48)~(50)</sup>。その理由は、ランダム荷重下では複雑な応力変動のために各応力レベルが疲労被害に及ぼす影響が一定力振幅下におけるものと異なるであろうことに一因があると考えられる。それゆえ、ランダム荷重下においては各応力レベルが実際にはどの程度の疲労被害を及ぼすものとみなしうるのかを知ることが疲労寿命推定に当たり重要となり、そのためには実際のランダム疲労試験結果から求めた累積被害  $\Sigma(n/N)$  が、ランダム荷重の統計的性質の 1 つである  $\sigma_{rms}$  とは無関係に、常に 1 となるような被害計算の基となる  $S-N$  曲線が求められれば好都合である。このような  $S-N$  曲線は



一般には一定応力振幅疲労試験によって得られる基本  $S-N$  線とは異なったものとなることが予想され、以後それをランダム  $S-N$  曲線<sup>(31),(32)</sup>と呼ぶことにする。以下、このようなランダム  $S-N$  曲線をどのようにして求めればよいかについて論じる。

いま、ランダム荷重の荷重頻度分布が式(129)で表されるレーレー分布に近似的に従うものとし、このようなランダム荷重下での疲労試験結果が rms ピーク応力  $\sigma_{rms}$  および破断までの総繰返し数  $N_f$  に関して次のような関係、

$$N_f(\sigma_{rms})^{m'} = C' \quad (m' \text{ および } C' \text{ は材料定数}) \quad (137)$$

を有しているものと仮定する。さらにランダム荷重下においては疲労被害はそのランダム荷重を構成する各応力レベル  $\sigma$  の  $m''$  乗に比例したものと仮定することによって、前述のランダム  $S-N$  曲線を

$$N\sigma^{m''} = C'' \quad (m'', C'' \text{ は材料定数}) \quad (138)$$

と表すことができる。式(138)で与えられるランダム  $S-N$  曲線を基にして修正マイナーの方法によって累積被害  $\Sigma(n/N)$  を計算すれば(式(133)参照)、それが常に1に等しいことから

$$\Sigma(n/N) = (N_f/C'')(\sigma_{rms})^{m''} D(m'') \equiv 1 \quad (139)$$

式(137)および式(139)より

$$(C'/C'')(\sigma_{rms})^{m''-m'} \cdot D(m'') \equiv 1 \quad (140)$$

ところで、 $m'$ 、 $C'$  は材料定数で既知数、また式(140)が  $\sigma_{rms}$  の値のいかんを問わず成立することから、結局  $m''$ 、 $C''$  は以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} m'' &= m' \\ C'' &= C' \cdot D(m'') = C' \cdot D(m') \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

したがって式(138)で表されるランダム  $S-N$  曲線は次式のようになることが分かる。

$$N\sigma^{m'} = C' \cdot D(m') \quad (142)$$

式(137)および式(142)を比較すれば明らかなように、ランダム  $S-N$  曲線は両対数グラフ上でランダム疲労試験結果を表す  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線より  $(1/m')$   $\log D(m')$  だけ上に位置し、かつそれに平行なものとなる。

さて、先に述べた等価応力  $\sigma_{eq}$  とランダム荷重下での総破断繰返し数  $N_f$  との関係を考えよう。式 (135) および式 (137) を用いて、 $\sigma_{rms}$  を消去すれば、次式が得られる。

$$N_f(\sigma_{eq})^{m'} = C' \cdot \{D(m)\}^{m'/m} \tag{143}$$

すなわち、 $\sigma_{eq}-N_f$  曲線は両対数グラフ上で  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線を  $(1/m) \log D(m)$  だけ上に平行移動したものとなっていることが分かる。また、ある応力レベルにおける  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線と基本  $S-N$  曲線との寿命軸方向の差は、式 (132)、(133) および (135) から、

$$\begin{aligned} \log N_f - \log N_{th} &= \log N_f - \log \{C/(\sigma_{eq})^m\} \\ &= \log \{ (N_f/C) (\sigma_{rms})^m \cdot D(m) \} \\ &= \log \Sigma(n/N) \end{aligned} \tag{144}$$

となって、修正マイナーの方法で計算した累積被害  $\Sigma(n/N)$  の対数値を表すことが分かる。

図13は式 (134) で与えられる被害関数  $D(m)$  の対数値  $\log D(m)$  と、等価応力  $\sigma_{eq}$  ならびにランダム  $S-N$  曲線を求める際に使用する  $(1/m) \log D(m)$

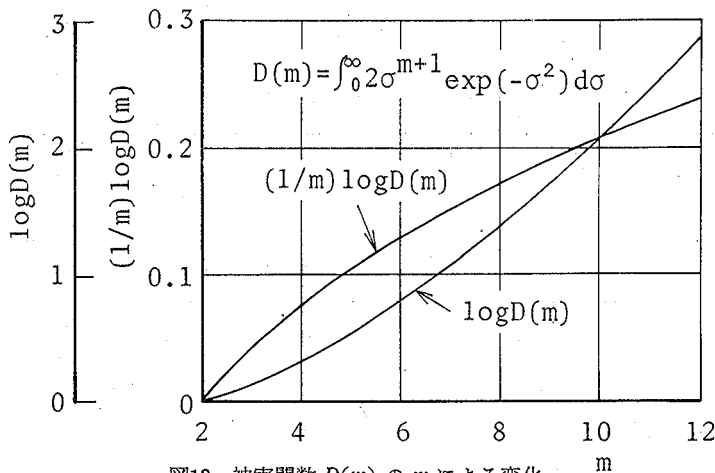


図13 被害関数  $D(m)$  の  $m$  による変化

との、 $m$  の値に対する変化を示したものである。この  $D(m)$  を用いてランダム

荷重下での疲労被害に関する種々の計算が可能である。

#### 4. 供試材料および実験方法

##### 4. 1 供試材料および試験片

本研究においてはS40C鋼と7075-T6アルミ合金の2種類の金属材料を供試材料とした。前者は素材を試験片に機械加工後、830℃で30分間真空焼鈍を施し、また後者は試験片に機械加工のまま熱処理は行わずに試験に供した。S40C鋼の化学成分および機械的性質をそれぞれ表1および表2に、またアルミ合金におけるものを表3および表4に示した。

表1 S40C鋼の化学成分(%)

C	Si	Mn	P	S	Cu	Cr	Al
0.39	0.23	0.51	0.015	0.18	0.09	0.07	0.001

表2 S40C鋼の機械的性質

上降伏点 $\sigma_{so}$ kg/mm <sup>2</sup>	下降伏点 $\sigma_{su}$ kg/mm <sup>2</sup>	引張強さ $\sigma_B$ kg/mm <sup>2</sup>	真破断力 $\sigma_T$ kg/mm <sup>2</sup>	伸 び $\phi$ %	絞 り $\psi$ %	熱 処 理
35.3	32.8	54.3	93.8	28	51	830℃, 30分 真空焼鈍

表3 7075-T6アルミ合金の化学成分(%)

Cu	Si	Fe	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	Al
1.4	0.10	0.30	0.09	2.3	0.20	5.30	0.05	$R_e$

表4 7075-T6アルミ合金の機械的性質

降 伏 点 $\sigma_s$ kg/mm <sup>2</sup>	引張強さ $\sigma_B$ kg/mm <sup>2</sup>	真破断力 $\sigma_T$ kg/mm <sup>2</sup>	伸 び $\phi$ %	絞 り $\psi$ %
65.2	69.0	75.4	12	12

試験片としては、S40C鋼においては、図14(a)~(c)に示すような3種類の形状のものを用いた。それぞれを順次、平滑試験片、切欠きA試験片、切欠

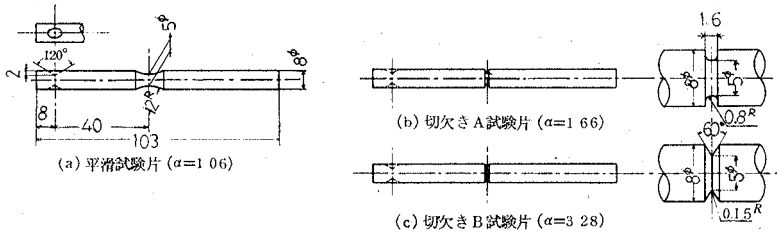


図14 平滑および切欠き疲労試験片

きB試験片と呼ぶことにする。これらの試験片の平面曲げ荷重形式負荷に対する形状係数 (shape factor or stress concentration factor) はそれぞれ、 $\alpha=1.06$ 、 $1.66$  および  $3.28$  である。一方、アルミ合金試験片としては図14(a) に示した平滑試験片のみを実験に供した。

4. 2 試験機および実験方法

本実験に使用した試験機は電磁式ランダム疲労試験機であって、その概要をブロック線図で示したのが図15である。定常ガウス性ランダム荷重の発生源は

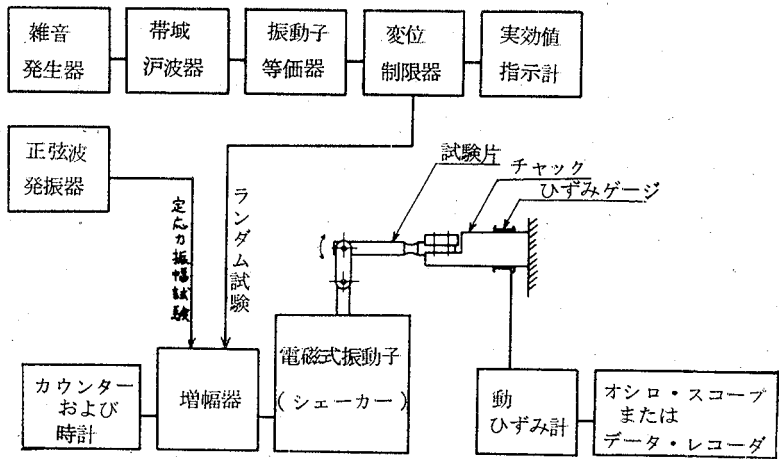


図15 電磁式ランダム疲労試験機の概要

雑音発生器 (random noise generator) であって、この出力を適当な帯域濾波

器 (band-pass filter) を用いて濾波し、振動子等価器 (shaker equalizer) によって振動子 (shaker) の電気—機械振動特性を改善し、さらに変位制限器 (displacement limiter) もしくは加速度制限器 (acceleration limiter) により装置全体を過大入力に対して保護し、しかる後電力増幅器 (power amplifier) を通して増幅して振動子を振動せしめる。これを試験片にランダム平面曲げ荷重として与える形式のものである。試験機各部の構造詳細はここでは省略した。なお、本試験機の最大加振力は約 $\pm 22\text{kg}$ であり、また振動子等価器を適正に設定することにより、周波数領域が DC $\sim$ 100Hz においてほぼ平坦な周波数応答特性が得られるように留意し、入力信号の電圧に比例した荷重が試験片に片持ち平面曲げ荷重として作用するようにしてある。

ランダム疲労試験に際してはサイクロンにより電氣的雑音を発生させる雑音発生器を用いた。この雑音は平均値が零のガウス性ランダム波 (白色雑音) である。この雑音波は帯域濾波器などを通して振動子への入力信号となり本試験機が駆動される。ランダム疲労試験における試験周波数帯域の設定は、主として 6 $\sim$ 80Hz の広帯域とし、S40C 銅平滑試験片の場合のみはこの他に 20 $\sim$ 60 Hz および 40 $\sim$ 80Hz に濾波器を設定した実験を行い、周波数帯域のランダム疲労寿命 (強度) に及ぼす影響について研究した。一方、定応力振幅疲労試験に当たっては、雑音発生器の代りに正弦波発振器 (sinusoidal oscillator) を用いて、周波数 47Hz で実験した。これは広帯域ランダム試験 (6 $\sim$ 80Hz) における中心周波数の近傍の値である。

荷重測定は試験機本体チェック部に貼付したひずみゲージを用いて行った。定応力振幅疲労試験では応力波をオシロ・スコープで測定し、またランダム疲労試験では応力波をデータ・レコーダーに記録し、A—D変換器によって量子化した後、電子計算機を用いて応力波の解析を行った。荷重およびたわみは、試験のごく初期および破断の直前以外はあまり変化せず定常であるので、寿命の半分位の時点において測定したデータを以て実測荷重履歴を代表させた。ランダム荷重の時間履歴の測定時間は約13.5秒であるが、A—D変換の際のサンプリング速度が約  $\Delta t = 0.00146$  秒であるところから、ランダム荷重波を充分代

表することができるものと思われる。

ランダム荷重の応力頻度解析に際しては、前述した理論的手法によるものの他に、従来提案されている全ピーク計数法<sup>(51)</sup>、ピーク法、半波法<sup>(52)</sup>および全波法 (full wave count method)<sup>(47) (53)</sup>をも適用した。半波法および全波法においては、修正グッドマン線図 (modified Goodman's diagram)<sup>(54)</sup>を用いて、それぞれの平均応力をもった波を等価両振り応力として計数した。応力ピーク (振幅)  $\sigma$  の自乗平均平方根  $\sigma_{rms}$  の計算は、ピーク法、半波法および全波法では式(131)に示す頻度分布の直線の傾きから求めた。全ピーク計数法においてはのみは直接ピーク応力の自乗平均を電子計算機で計算したが、これによる  $\sigma_{rms}$  の値は式(131)を用いて求めた値とほとんど相違しなかった。

ランダム疲労試験における破断までの総繰返し数  $N_f$  は以下のようにして求めた。すなわち、全ピーク計数法、半波法および全波法においては、正負を含めた単位時間当たりの平均ピーク数を  $n_p$ 、破断までの実測時間を  $T_f$  とすると、2個のピークで1波を構成すると考えられるので、

$$N_f = n_p T_f / 2 \quad (145)$$

また、ピーク法では波全体の平均応力レベル (本実験の場合は零レベルに相当する) を基準として、それより上側では正ピーク、それより下側では負ピークのみを数えるので、それら両者の単位時間当たりの総数を  $n_p'$  とし、次式で求めた。

$$N_f = n_p' T_f / 2 \quad (146)$$

一般に  $n_p'$  は  $n_p$  より小さいが、不規則度比  $\lambda$  が1に近づくほど  $n_p'$  は  $n_p$  に近づいた値となる。

## 5. 実験結果およびその考察

### 5.1 一定応力振幅疲労試験結果

S40C 鋼ならびにアルミ合金の一定応力振幅疲労試験結果をそれぞれ図16および図17に示す。両図より明らかなように、基本  $N-S$  曲線を式(132)の形で表すことができる。両図から最小自乗法を用いて求めた各供試材に対する定数

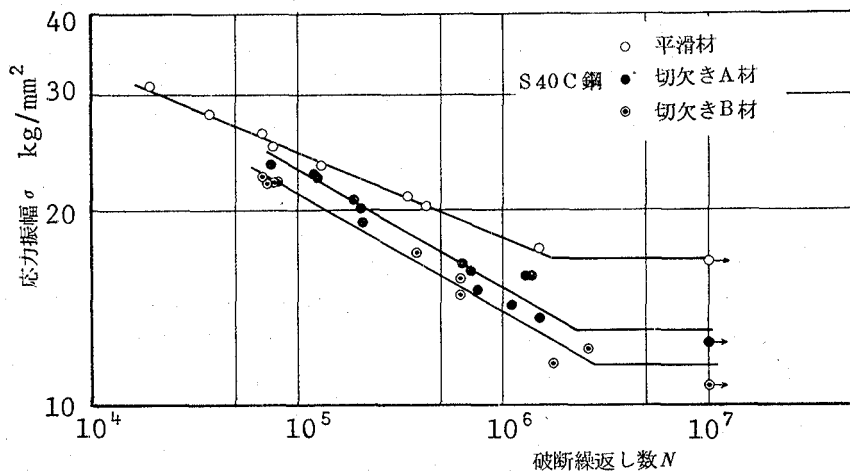


図16 S40C鋼の一定応力振幅疲労試験結果（基本S-N曲線）

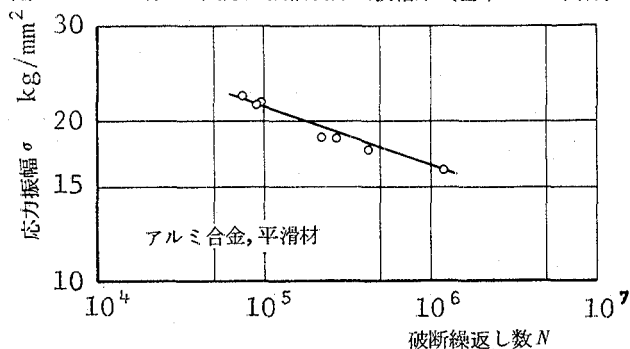


図17 アルミ合金の一定応力振幅疲労試験結果（基本S-N曲線）

表5 一定応力振幅疲労試験結果

試験片 定 数		S 40 C 鋼			7075-T6アルミ 合 金 平 滑 材
		平 滑 材	切欠き A 材	切欠き B 材	
形状係数 $\alpha$		1.06	1.66	3.28	1.06
基本 $S-N$ 曲線 の定数* $N\sigma_m=C$	$m$	7.53	5.50	5.45	9.44
	$C$	$2.89 \times 10^{15}$	$3.12 \times 10^{12}$	$1.71 \times 10^{12}$	$3.25 \times 10^{17}$
疲労限度 $\sigma_w$ kg/mm <sup>2</sup>		16.8	13.0	11.5	—

\* 最小自乗法による値

$m, C$  および疲労限度  $\sigma_w$  を表 5 に示した。

## 5.2 定常ガウス性ランダム荷重の実測荷重頻度分布

図18(a)~(c) は各周波数帯域に制限されたガウス性ランダム応力波のペン・オシロによる記録例を示したもので、全体の平均応力レベルは零に設定されている。図に見られる限りでは、周波数帯域による波形の差は明瞭には観察されない。

図19および図20は各々の帯域制限ランダム荷重波において、式(44)で定義される自己相関関数  $R_{XX}(\tau)$  の計算結果を例示したものである。両図において縦軸には  $R_{XX}(\tau)$  を遅延時間(delay time)  $\tau=0$  のときの値  $R_{XX}(0)$  で割った、いわゆる自己相関係数をとってある。<sup>(注13)</sup> S40C鋼平滑試験片の場合は、図19に見られるように、ほぼ  $\tau=0.07$  秒付近で零に収束する。図20に示したS40C鋼切欠き試験片の場合も同様であるが、一方アルミ合金試験片の場合は  $\tau=0.1$  秒付近で零に収束する。

つぎに、上述の  $R_{XX}(\tau)$  を用いて、式(50)によって計算したパワー・スペクトル密度(片側)  $G_{XX}(\omega)$  を図21~図23に示した。図21はS40C鋼平滑試験片において、周波数帯域を3種類に

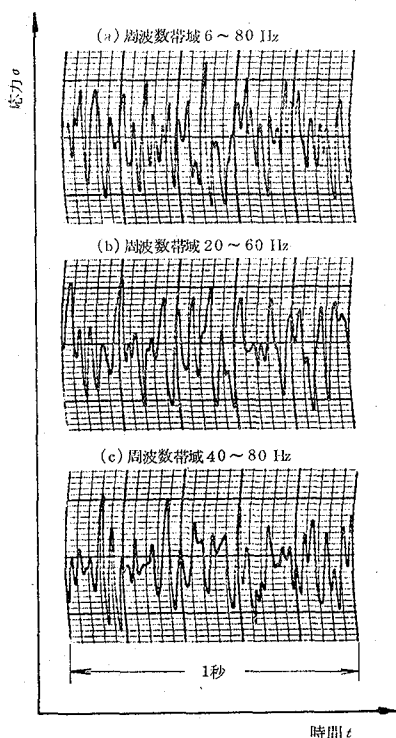


図18 帯域制限ランダム荷重波の記録例

(注13) 式 (85), (87) から

$$|R_{XX}(\tau) - \mu_X^2| \leq s_X^2$$

また式 (79) から

$$s_X^2 = R_{XX}(0) - \mu_X^2$$



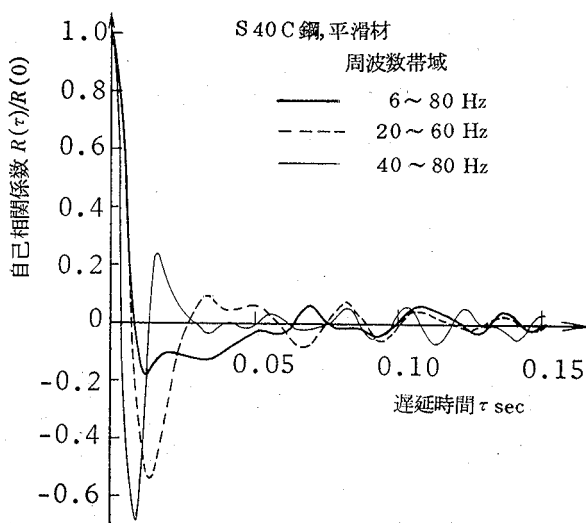


図19 周波数帯域の異なる帯域制限ランダム荷重波の自己相関数の計算例 (S40C鋼平滑材)

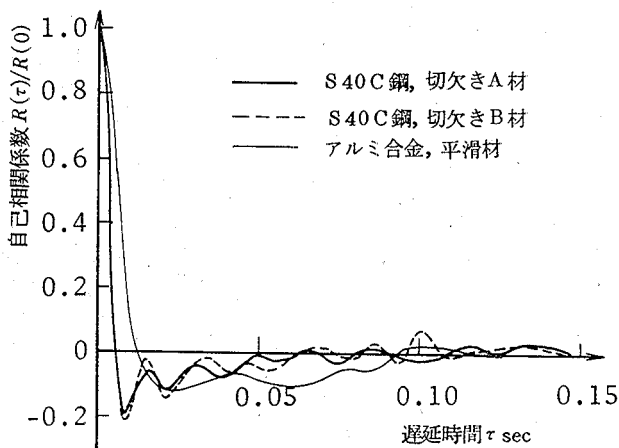


図20 平滑材と切欠き材に対する自己相関関数の計算例 (周波数帯域6~80Hz)

したがって,  $E\{X(t)\} = \mu_X = 0$  の場合

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) \quad (\because R_{XX}(0) = E\{X(t)\}^2 = \phi_X > 0, \text{ここに } \phi_X \text{ は } X(t) \text{ の平均パワー})$$

つまり,  $\frac{|R_{XX}(\tau)|}{R_{XX}(0)} \leq 1$  である。

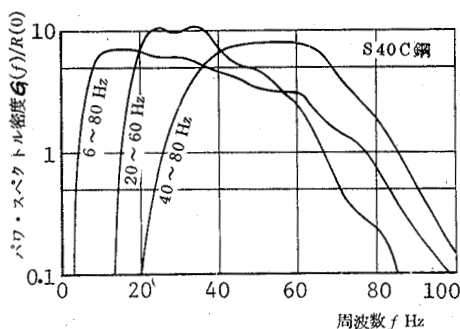


図21 周波数帯域の異なるランダム荷重波のパワ・スペクトル密度分布

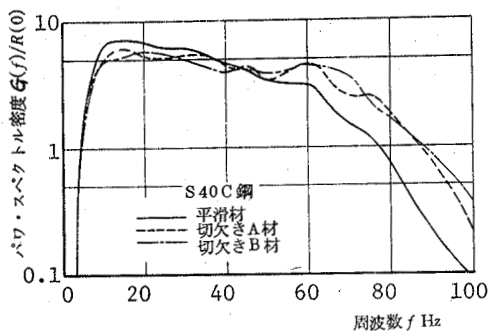


図22 平滑材および切欠き材によるパワ・スペクトル密度分布の相違

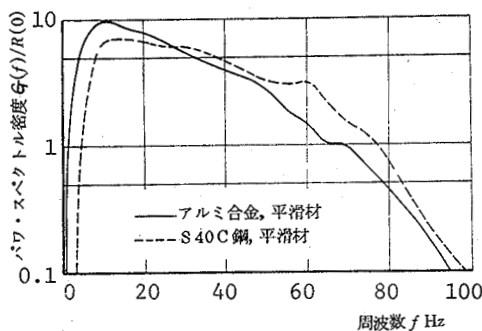


図23 S40C鋼ならびにアルミ合金平滑試験片のパワ・スペクトル密度分布 (6~80Hz)

変化させた場合を図示したものである。図によれば、いずれの場合も設定周波数帯域外で完全にパワーが遮断されたというような理想的なものとはなっていないが、これは帯域濾波器の性能および増幅器へのフィード・バックの機能等に一因があると考えられる。しかしながら、各場合による差異は明らかであり、また設定周波数帯域内ではほぼ一様のスペクトル密度分布が得られているとみなしうるので、本実験の目的にはそれほど支障をもたさないと考えてよいであろう。以後においては、設定周波数帯域が6~80Hzのものを広帯域、20~60Hzのものを帯域を狭くした場合、また40~80Hzのものを低周波数成分を除外した場合として取扱うことにする。

図22はS40C鋼平滑および切欠き試験片に同様の広帯域(6~80Hz)ランダム荷重を与えて、そのスペクトル密度分布を比較したものである。図に見られるように、形状係数の相異によるスペクトル密度の差違はほとんど認められず、同じスペクトル密度のもとでの実験として取扱いうる。一方図22に示したアルミ合金試験片の場合には、試験片の弾性定数が異なるためにS40C鋼の場合と多少の差違が認められる。なお図中に破線で示してあるのは対応するS40C鋼のスペクトル密度であって、比較のためのものである。

すでに述べたように、ランダム波の乱れの程度を表す不規則度比 $\lambda$ は式(116)を用いてスペクトル密度から理論的に計算することができる。いまランダム波が有限周波数、 $f_L \sim f_H$ (Hz)(ここで $f_H > f_L$ とする)においてのみ一様なパワー・スペクトル密度 $G_{xx}(\omega) = G_0$ をもち、それ以外ではパワーが零の理想的な帯域制限白色雑音である場合には、 $\lambda$ は次式のように与えられる。

$$\lambda = \left\{ \int_{2\pi f_L}^{2\pi f_H} G_0 \omega^2 d\omega \right\} / \left[ \left\{ \int_{2\pi f_L}^{2\pi f_H} G_0 d\omega \right\} \left\{ \int_{2\pi f_L}^{2\pi f_H} G_0 \omega^4 d\omega \right\} \right]^{1/2} \\ = \sqrt{5} (f_H^3 - f_L^3) / \{ 9 (f_H - f_L) (f_H^5 - f_L^5) \}^{1/2} \quad (147)$$

(注14) この場合、 $f_L$ を下限遮断周波数(lower cut-off frequency)といい、また $f_H$ を上限遮断周波数(upper cut-off frequency)という。さらに周波数(振動数) $f$ (cycle/sec)と円周波数(円振動数) $\omega$ (radian/sec)の間には

$$\omega = 2\pi f$$

の関係がある。

本実験におけるランダム荷重波がこのような理想的な帯域制限白色雑音的なものであると仮定すれば、各々の設定周波数に対応した不規則度比の理論値  $\lambda_{th}$  は式 (147) から、

- (a) 広帯域 (6~80 Hz) の場合 :  $\lambda_{th}=0.775$
- (b) (a) より狭帯域 (20~60 Hz) の場合 :  $\lambda_{th}=0.881$
- (c) 低周波数成分を除外した場合 :  $\lambda_{th}=0.937$

と計算される。一方、ランダム荷重の実測時間履歴を用いて実際に解析して求めた不規則度比  $\lambda$  を図示したものが図24である。<sup>(注15)</sup> 上記(a)の場合には、S40C

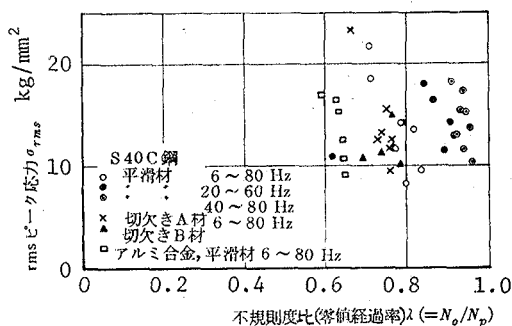


図24 不規則度比  $\lambda$  の実測値

鋼では平滑試験片、切欠き試験片ともに  $\lambda=0.7\sim0.8$  であり、アルミ合金試験片では少し小さく0.63程度である。S40C平滑試験片で周波数帯域を狭くすると、 $\lambda$  は1に近づき、(b)の場合には  $\lambda=0.89$ 、(c)の場合には  $\lambda=0.94$  程度となり、ほとんど両振り応力に近くなる。実際の解析結果はいずれも  $\lambda$  の理論値  $\lambda_{th}$  にはほぼ等しく、試験片に与えられたランダム荷重が充分満足なものであることを示唆している。

図25~図27は本実験に用いたランダム応力波の測定結果から解析して求めた経過頻度を正規確率紙にプロットした例を示したものである。いずれの場合も良い直線性を示しており、式 (94) を参照して、ランダム応力波が明らかにガウス性を有したものであることが観察される。

(注15) 時として  $\lambda=N_o/N_p$  と書くことがあるが、この場合には  $N_o=\nu^+(0)$ 、 $N_p=\nu_m^+$  を表す。

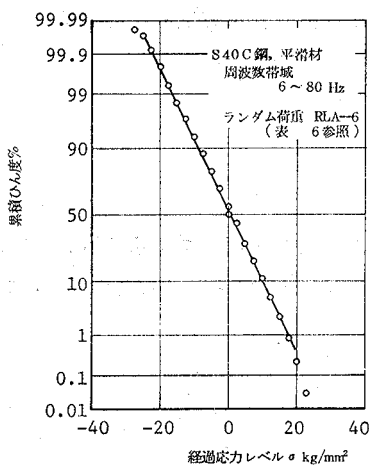


図25 ランダム荷重の経過頻度  
(S40C鋼平滑材; 6~80Hz)

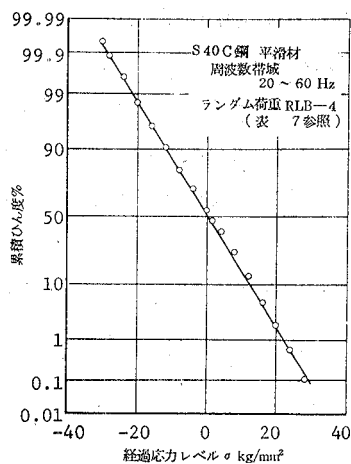


図26 ランダム荷重の経過頻度  
(S40C鋼平滑材; 20~60Hz)

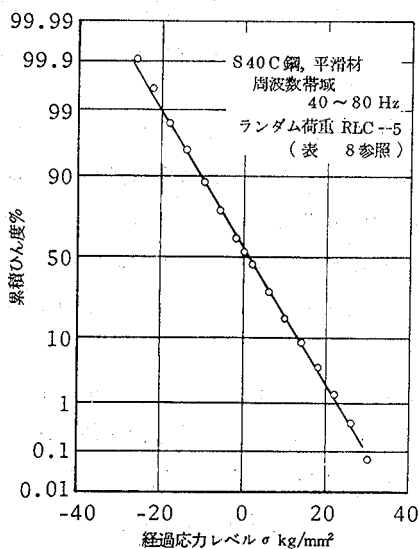


図27 ランダム荷重の経過頻度 (S40C鋼平滑材; 40~80Hz)

図28～図33に種々の場合のランダム荷重の測定結果から各応力計数法を用い

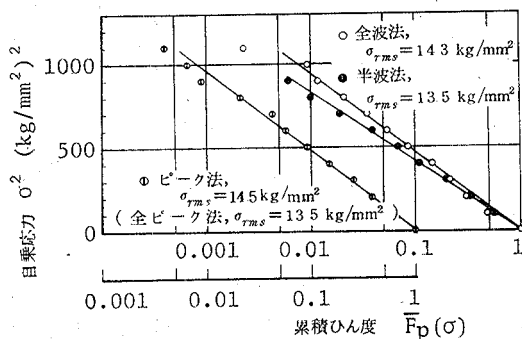


図28 ランダム荷重の実測荷重頻度分布 (S40C鋼平滑材; 6～80Hz)

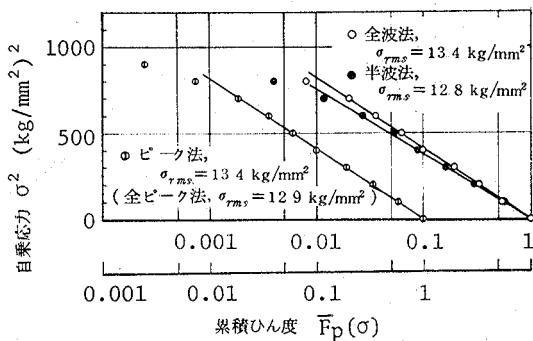


図29 ランダム荷重の実測荷重頻度分布 (S40C鋼平滑材; 20～60Hz)

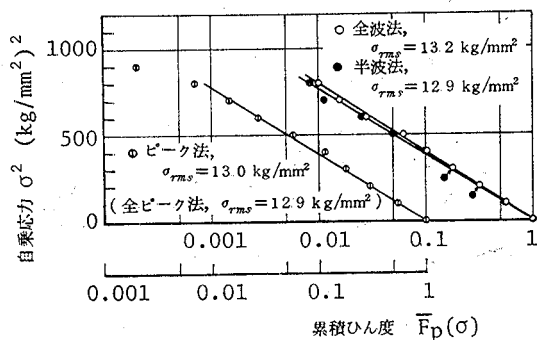


図30 ランダム荷重の実測荷重頻度分布 (S40C鋼平滑材; 40～80Hz)

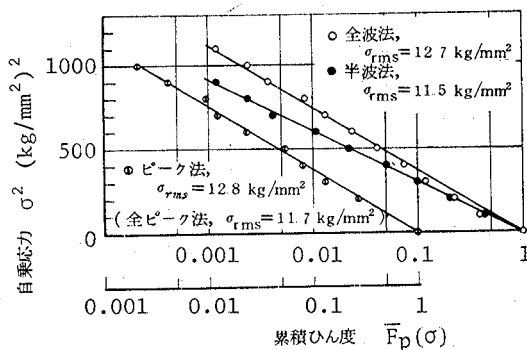


図31 ランダム荷重の実測荷重頻度分布 (S40C 鋼切欠きA材; 6~80Hz)

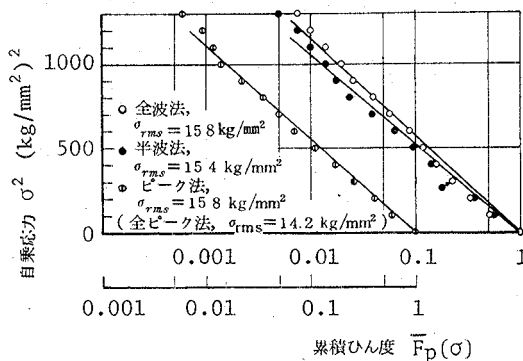


図32 ランダム荷重の実測荷重頻度分布 (S40C 鋼切欠きB材; 6~80Hz)

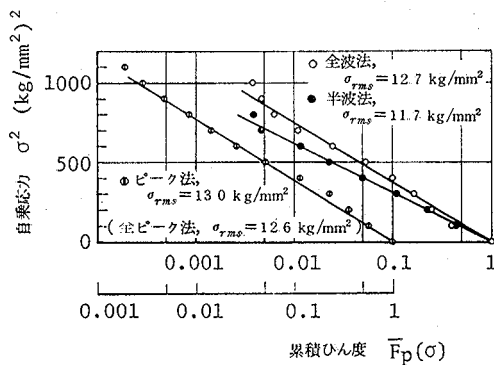


図33 ランダム荷重の実測荷重頻度分布 (アルミ合金平滑材; 6~80Hz)

て解析して得た荷重の累積頻度分布の例を示した。いずれの図においても、全波法、半波法およびピーク法による計数結果を図示したが、繁雑さを避けるため、ピーク法による計数結果だけは、横軸をずらしたスケールでプロットしてある。これらの図から観察されるように、いずれの応力計数法による結果に対しても  $\log \sigma^2 - \log \bar{F}_p(\sigma)$  の関係はほぼ直線性を有するものとみなしえ、ランダム荷重の荷重頻度分布がレーレー分布で近似されうることが認められる。ただし、累積頻度が1%以下の大応力成分は、解析に用いた実測データの測定時間内では10個程度しか計数されず、その数が少ないこともあって、測定時間内に出現するか否かが偶然性に支配されることが多く、直線性の範囲からはずれる結果となったものと思われる。式(131)に示されているように、これらの直線の傾きからピーク応力もしくは応力振幅の自乗平均平方根  $\sigma_{rms}$  が求められる。

なお、表6～表11は本実験において実施したそれぞれの場合に対するランダム疲労試験結果ならびにそれに基づく解析結果を表示したものである。

表6 ランダム疲労試験結果ならびに解析結果 (S40C鋼平滑材；周波数帯域6～80Hz)

ランダム 荷重の 種類	不規則 度 $\lambda = \frac{N_0}{N_p}$	破断ま 比での実 時間 $T_f, \text{sec}$	ピーク応力または応力振幅の rms 値 $\sigma_{rms} \text{ kg/mm}^2$				破断実寿命 $N_f$	
			全ピーク 計数法	ピーク法	半波法	全波法	ピーク 法以外	ピーク法
RLA-1	0.71	1247	21.8	23.4	21.4	21.4	$6.76 \times 10^4$	$5.78 \times 10^4$
RLA-2	0.71	2421	18.5	19.7	18.7	19.8	$1.36 \times 10^5$	$1.15 \times 10^5$
RLA-3	0.79	7400	14.1	15.3	14.7	15.1	$3.80 \times 10^5$	$3.36 \times 10^5$
RLA-4	0.82	8940	13.5	14.5	13.5	14.3	$4.44 \times 10^5$	$3.95 \times 10^5$
RLA-5	0.78	15090	11.6	12.3	11.1	11.9	$7.87 \times 10^5$	$6.93 \times 10^5$
RLA-6	0.84	39970	9.5	9.9	9.1	9.9	$1.94 \times 10^6$	$1.74 \times 10^6$
RLA-7	0.80	59020	8.2	8.7	7.6	8.3	$2.90 \times 10^6$	$2.56 \times 10^6$
$\sigma_{rms} - N_f$ 曲線の 定数* $N_f \sigma_{rms}^{m'} = C'$			$m'$	3.88	3.86	3.60	3.86	
			$C'$	$1.08 \times 10^{10}$	$1.17 \times 10^{10}$	$5.03 \times 10^9$	$1.19 \times 10^{10}$	
勾配比 $\beta = m'/m$				0.515	0.513	0.479	0.513	

\* 最小自乗法による計算値



表7 ランダム疲労試験結果ならびに解析結果 (S40C鋼平滑材; 周波帯域20~60Hz)

ランダム 荷重の 種類	不規則 度比 $\lambda = \frac{N_0}{N_p}$	破断ま での実 時間 $T_f$ , sec	ピーク応力または応力振幅の rms 値 $\sigma_{rms}$ kg/mm <sup>2</sup>				破断実寿命 $N_f$	
			全ピーク 計数法	ピーク法	半波法	全波法	ピーク法 以外	ピーク法
RLB-1	0.85	2172	19.0	19.2	19.2	19.6	$1.05 \times 10^5$	$9.67 \times 10^4$
RLB-2	0.87	5025	16.4	16.7	16.5	16.7	$2.20 \times 10^5$	$2.04 \times 10^5$
RLB-3	0.91	9216	14.2	15.0	14.4	14.6	$4.13 \times 10^5$	$3.71 \times 10^5$
RLB-4	0.92	10190	12.9	13.4	12.8	13.4	$4.54 \times 10^5$	$4.33 \times 10^5$
RLB-5	0.89	15300	11.4	12.1	11.6	12.0	$7.11 \times 10^5$	$6.57 \times 10^5$
RLB-6	0.62	23920	10.9	12.3	11.4	11.6	$1.01 \times 10^5$	$8.31 \times 10^5$
$\sigma_{rms}-N_f$ 曲線の 定数*			$m'$	3.78	4.28	3.90	4.03	
$N_f \sigma_{rms}^{m'} = C'$			$C'$	$7.94 \times 10^9$	$3.30 \times 10^{10}$	$1.15 \times 10^{10}$	$1.78 \times 10^{10}$	
勾配比 $\beta = m'/m$				0.503	0.569	0.519	0.536	

\* 最小自乗法による計算値

表8 ランダム疲労試験結果ならびに解析結果 (S40C鋼平滑材; 周波数帯域40~80Hz)

ランダム 荷重の 種類	不規則 度比 $\lambda = \frac{N_0}{N_p}$	破断ま での実 時間 $T_f$ , sec	ピーク応力または応力振幅の rms 値 $\sigma_{rms}$ kg/mm <sup>2</sup>				破断実寿命 $N_f$	
			全ピーク 計数法	ピーク法	半波法	全波法	ピーク法 以外	ピーク法
RLC-1	0.91	3095	18.0	18.0	18.0	18.6	$1.93 \times 10^5$	$1.84 \times 10^5$
RLC-2	0.94	3764	16.3	16.4	16.4	16.8	$2.34 \times 10^5$	$2.26 \times 10^5$
RLC-3	0.93	5214	15.4	15.6	15.4	15.6	$3.29 \times 10^5$	$3.16 \times 10^5$
RLC-4	0.94	6079	15.0	15.0	14.9	15.2	$3.68 \times 10^5$	$3.54 \times 10^5$
RLC-5	0.95	7934	12.9	13.0	12.9	13.2	$4.92 \times 10^5$	$4.79 \times 10^5$
RLC-6	0.92	20470	11.6	11.7	11.0	11.7	$1.24 \times 10^6$	$1.19 \times 10^6$
RLC-7	0.94	24270	11.5	11.6	11.2	11.6	$1.47 \times 10^6$	$1.41 \times 10^6$
RLC-8	0.96	34810	10.3	10.9	10.3	10.6	$2.13 \times 10^6$	$2.06 \times 10^6$
$\sigma_{rms}-N_f$ 曲線の 定数*			$m'$	4.55	4.77	4.28	4.42	
$N_f \sigma_{rms}^{m'} = C'$			$C'$	$9.62 \times 10^{10}$	$1.50 \times 10^{11}$	$3.92 \times 10^{10}$	$6.38 \times 10^{10}$	
勾配比 $\beta = m'/m$				0.605	0.634	0.569	0.587	

\* 最小自乗法による計算値

表9 ランダム疲労試験結果ならびに解析結果(S40C鋼切欠きA材;周波帯域6~80Hz)

ランダム 荷重の 種類	不規則 度 $\lambda = \frac{N_0}{N_p}$	破断 までの 実時間 $T_f$ , sec	ピーク応力または応力振幅の rms 値 $\sigma_{rms}$ kg/mm <sup>2</sup>				破断実寿命 $N_f$	
			全ピーク 計数法	ピーク法	半波法	全波法	ピーク法 以外	ピーク法
RLD-1	0.65	680	23.3	23.5	23.6	24.4	$4.39 \times 10^4$	$3.63 \times 10^4$
RLD-2	0.75	2174	15.5	16.8	16.3	17.2	$1.32 \times 10^5$	$1.15 \times 10^5$
RLD-3	0.74	3303	13.2	15.4	14.3	15.3	$1.90 \times 10^5$	$1.65 \times 10^5$
RLD-4	0.73	5904	12.6	14.2	12.5	13.6	$3.69 \times 10^5$	$3.19 \times 10^5$
RLD-5	0.77	6870	12.6	13.9	12.8	13.9	$4.10 \times 10^5$	$3.62 \times 10^5$
RLD-6	0.76	12610	11.7	12.8	11.5	12.7	$7.76 \times 10^5$	$6.83 \times 10^5$
RLD-7	0.76	21120	9.5	10.4	9.3	10.2	$1.26 \times 10^6$	$1.11 \times 10^6$
$\sigma_{rms}-N_f$ 曲線 の定数*			$m'$	3.88	4.48	3.78	4.06	
$N_f \sigma_{rms}^{m'} C'$			$C'$	$7.07 \times 10^9$	$4.40 \times 10^{10}$	$5.76 \times 10^9$	$1.63 \times 10^{10}$	
勾配比 $\beta = m'/m$				0.705	0.814	0.686	0.738	

\* 最小自乗法による計算値

表10 ランダム疲労試験結果ならびに解析結果(S40C鋼切欠きB材;周波帯域6~80Hz)

ランダム 荷重の 種類	不規則 度 $\lambda = \frac{N_0}{N_p}$	破断 までの 実時間 $T_f$ , sec	ピーク応力または応力振幅の rms 値 $\sigma_{rms}$ kg/mm <sup>2</sup>				破断実寿命 $N_f$	
			全ピーク 計数法	ピーク法	半波法	全波法	ピーク法 以外	ピーク法
RLE-1	0.77	1025	14.9	16.6	15.5	16.7	$6.00 \times 10^4$	$5.35 \times 10^4$
RLE-2	0.79	1323	14.2	15.8	15.4	15.8	$7.89 \times 10^4$	$6.96 \times 10^4$
RLE-3	0.77	2693	11.8	13.9	12.8	14.0	$1.57 \times 10^5$	$1.39 \times 10^5$
RLE-4	0.74	5075	11.2	12.8	11.7	12.9	$3.00 \times 10^5$	$2.64 \times 10^5$
RLE-5	0.78	9597	10.1	12.0	11.2	11.7	$5.83 \times 10^5$	$5.18 \times 10^5$
RLE-6	0.70	23330	10.8	11.1	10.3	10.3	$1.29 \times 10^6$	$1.07 \times 10^6$
$\sigma_{rms}-N_f$ 曲線 の定数*			$m'$	6.96	7.42	6.87	6.49	
$N_f \sigma_{rms}^{m'} C'$			$C'$	$7.43 \times 10^{12}$	$5.16 \times 10^{13}$	$8.45 \times 10^{12}$	$4.79 \times 10^{12}$	
勾配比 $\beta = m'/m$				1.27	1.36	1.26	1.19	

\* 最小自乗法による計算値

表11 ランダム疲労試験結果ならびに解析結果 (7075-T6アルミ合金; 周波数帯域 6 ~ 80Hz)

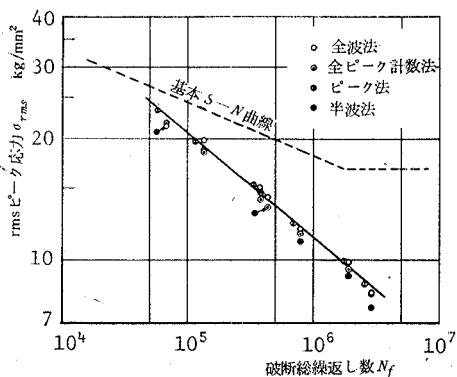
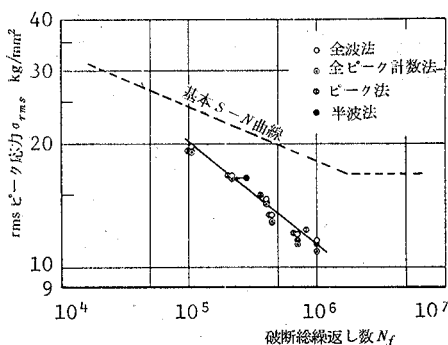
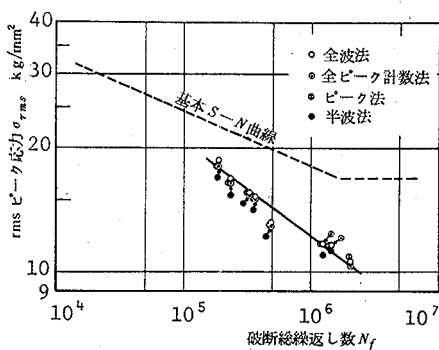
ランダム 荷重の 種類	不規則 度 $\lambda = \frac{N_o}{N_p}$	破断 比 までの 実時間 $T_f$ sec	ピーク応力または応力振幅の rms 値 $\sigma_{rms}$ kg/mm <sup>2</sup>				破断実寿命 $N_f$	
			全ピーク 計数法	ピーク法	半波法	全波法	ピーク法 以外	ピーク法
RLF-1	0.59	2340	17.0	17.8	15.3	16.4	$1.28 \times 10^5$	$1.02 \times 10^5$
RLF-2	0.63	2733	16.5	18.0	15.8	17.4	$1.48 \times 10^5$	$1.21 \times 10^5$
RLF-3	0.63	4052	15.3	15.7	13.4	13.6	$2.15 \times 10^5$	$1.76 \times 10^5$
RLF-4	0.65	10450	12.6	13.0	11.7	12.7	$4.95 \times 10^5$	$4.08 \times 10^5$
RLF-5	0.65	17890	10.6	12.1	10.1	10.4	$8.21 \times 10^5$	$6.76 \times 10^5$
RLF-6	0.65	35230	9.10	10.4	8.63	9.48	$1.53 \times 10^6$	$1.27 \times 10^6$
$\sigma_{rms}-N_f$ 曲線 の定数*			$m'$	3.91	4.56	4.17	4.04	
$N_f \sigma_{rms}^{m'} = C'$			$C'$	$8.65 \times 10^9$	$5.35 \times 10^{10}$	$1.25 \times 10^{10}$	$1.17 \times 10^{10}$	
勾配比 $\beta = m'/m$				0.369	0.473	0.442	0.428	

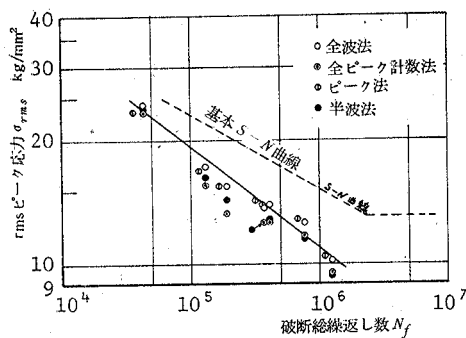
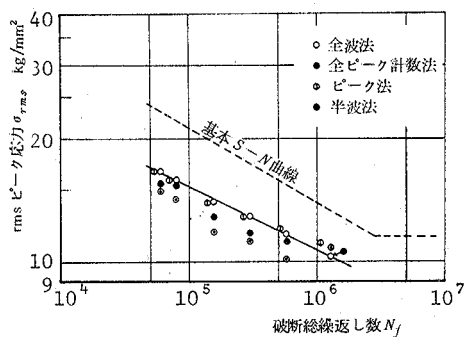
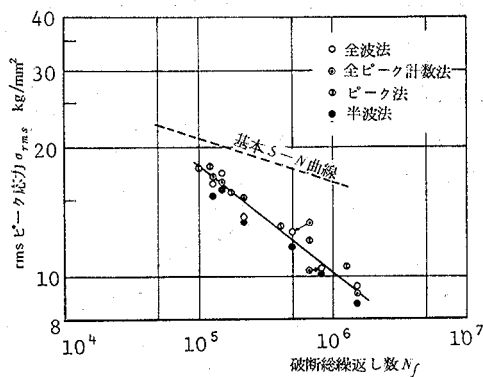
\* 最小自乗法による計算値

5. 3 定常ガウス性ランダム荷重下での疲労

5. 3. 1 ランダム荷重疲労試験結果 ( $\sigma_{rms}-N_f$  曲線)

本研究における種々の場合のランダム疲労試験結果を  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線の形で表示したのが図34~図39である。このうち、図34~図36は S40C 鋼平滑試験片を用いて、周波数帯域をそれぞれ 6 ~ 80Hz, 20 ~ 60Hz, および 40 ~ 80Hz に設定したランダム荷重を与えた場合の結果に対応し、図37および図38は S40C 鋼切欠き試験片を用いて 6 ~ 80Hz の帯域制限ランダム荷重を与えた場合の結果で、前者は切欠き A 試験片、後者は切欠き B 試験片に対応したものである。また図39はアルミ合金平滑材の 6 ~ 80Hz の帯域制限ランダム荷重下での疲労試験結果を図示したものである。いずれの図においても、図中の実線は全波法による応力計数結果に対応した実験点に対して最小自乗法を適用して求めた直線を描いたものであり、また破線は比較のために示した一定応力振幅負荷下における各場合に対応した基本 S-N 曲線を表している。各々の場合において  $\sigma_{rms}-$


図34  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線 (S40C 鋼平滑材; 6~80Hz)

図35  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線 (S40C 鋼平滑材; 20~60Hz)

図36  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線 (S40C 鋼平滑材; 40~80Hz)

図37  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線 (S40C鋼切欠きA材; 6~80Hz)図38  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線 (S40C鋼切欠きB材; 6~80Hz)図39  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線 (アルミ合金平滑材; 6~80Hz)

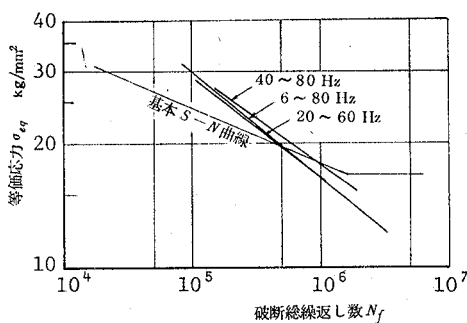
$N_f$  曲線は両対数表示で直線近似されることが観察され、式 (137) の仮定が満足されていることが明らかである。

また、不規則度比  $\lambda$  が 1 に近い比較的狭周波数帯域の場合には、図35および図36に見られるように、いずれの応力計数法を用いても計数結果にそれほど相違は認められない。これはランダム荷重波の乱れが少なくなり、ほとんど両振りのな波形となってくるため当然のことである。全般的には、半波法を用いた計数の場合にやや小さめの  $\sigma_{rms}$  の値を得ることとなり、他の計数法によるよりも危険側の計数結果となる。これに反して、ピーク法および全波法による計数結果は、概して、他の計数結果より大きめの  $\sigma_{rms}$  の値を示して安全側となるが、ピーク法においては個々の波の平均応力が考慮に入れられないため、本実験におけるように  $\lambda$  が 1 に近い場合以外では、このピーク法を適用するのは寿命推定が厳し過ぎる結果となるきらいがある<sup>(47),(55)(56)</sup>。すべての場合に見られるように、 $\sigma_{rms}-N_f$  曲線の傾きに関しては、各計数法による相違が少ないので、以後の整理には現時点で最も妥当な応力計数法であると考えられる全波法による計数結果のみを用いることとした。

### 5. 3. 2 周波数帯域がランダム疲労寿命に及ぼす影響

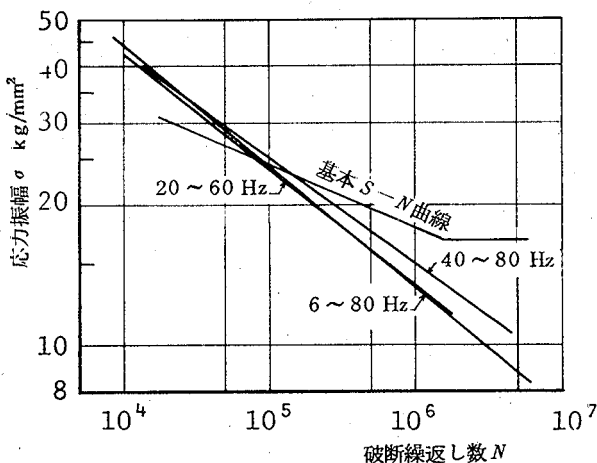
S40C 鋼平滑材を用いて、設定周波数帯域を 3 種類に変えて、その疲労寿命に及ぼす影響を調べた。その際に得られたランダム疲労試験結果はすでに図34～図36に  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線として示した通りである。

図40は表 6～表 8 に示した全波法による応力解析結果に基づき、式 (135) で計算した  $\sigma_{eq}$  と破断総繰返し数  $N_f$  とから得られる各実験点の真中を通るようにして描いた  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線を図示したものである。各実験点はほぼこの直線上に在り、計算結果が式 (143) に示される両対数グラフ上での  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線の直線性を満足したので、図には繁雑さを避けるため、それらの直線のみを示すこととした。図によれば、ランダム荷重の周波数帯域の相違による  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線の差異はあまり顕著でなく、6～80Hz と 20～60Hz による実験結果はほとんど一致する。ただ、40～80Hz の低周波成分を除外した場合の実験結果は、他の場合よりやや長寿命側にあり、 $\Sigma(n/N)$  が多少大きめの値をとるが、ばらつきの

図40  $\sigma_{eq}$ — $N_f$  曲線 (S40C鋼平滑材)

範囲を考えれば、あまり有意な (significant) な差があるとは断定できない。図中に比較のため示した基本  $S$ — $N$  曲線との関係を見れば、 $N_f = 5 \times 10^5$  付近を境にして、それより長寿命側では  $\Sigma(n/N) < 1$  であり、短寿命側では逆に  $\Sigma(n/N) > 1$  となり、また  $\log\{\Sigma(n/N)\}$  が  $\log \sigma_{eq}$  に対して直線関係を示すことが観察される。

つぎに、周波数帯域の影響を前述したランダム  $S$ — $N$  曲線という観点から見てみよう。図41は式 (142) から求めたランダム  $S$ — $N$  曲線を示したものである

図41 ランダム  $S$ — $N$  曲線 (S40C鋼平滑材)

が、いずれの周波数帯域の場合においても、この曲線は基本  $S-N$  曲線より傾きが急であり、ランダム荷重下においては定応力振幅負荷下におけるよりも、小さな応力レベルのもつ被害効果をより大きく、また逆に大きな応力レベルのもつ被害効果をより小さく評価する必要があることが示唆される。なお、式 (137) と式 (142) を比べれば明らかなように両対数表示のグラフ上では  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線とランダム  $S-N$  曲線の傾きは等しく、両者は平行な関係にあるので、傾きに関する一方の議論は他方についてもあてはまる。

従来、アルミ合金に関しては周波数帯域の相違が疲労寿命（強度）に及ぼす影響は認められないとの報告<sup>(27)</sup>が見られ、また通常の疲労試験においては繰返し速度が疲労寿命（強度）に及ぼす影響はないという結果<sup>(57)</sup>が報告されている。本実験の場合は、6～80Hz と 20～60Hz の実験結果に差が認められず、一方 40～80Hz の周波数帯域の場合には、大きな応力レベルでは他の場合との差異が認められないが、小さな応力レベルでは他の場合よりやや小さめの被害効果を示し、低周波数帯域を取除いたことによる影響が小さな応力域で認められるような傾向がある。しかしながら、前にも述べたように、この程度の差異では材料のばらつき特性などを考慮に入れば有意差があるとは断定できないと考えるのがむしろ普通であろう。それゆえ、周波数帯域が疲労に及ぼす影響は、特別な場合を除いて、それほど顕著なものではないと結論づけてもよいであろう。

### 5. 3. 3 ランダム荷重に対する切欠き効果

S40C 鋼において周波数帯域 6～80Hz のランダム荷重を与えて、図14に示した4種類の形状の試験片を用いて行った疲労試験の結果はすでに図34、図37 および図38に示した通りである。またその折のランダム疲労試験結果から求めた  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線およびランダム  $S-N$  曲線をそれぞれ図示したものが図42および図43である。図42によれば、切欠き試験片においては  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線と対応した基本  $S-N$  曲線との差は平滑試験片の場合より小さく、中程度の寿命域では修正マイナー則が比較的よく成立つことが観察される。切欠きA試験片と切欠きB試験片の場合を比較すれば、前者における結果の傾向は平滑試験片の場合



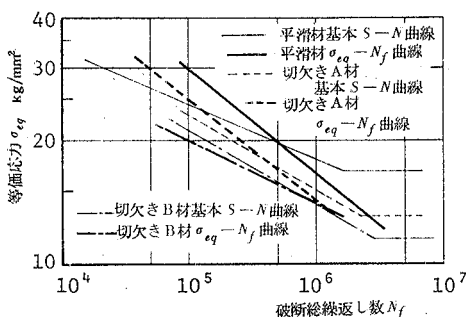
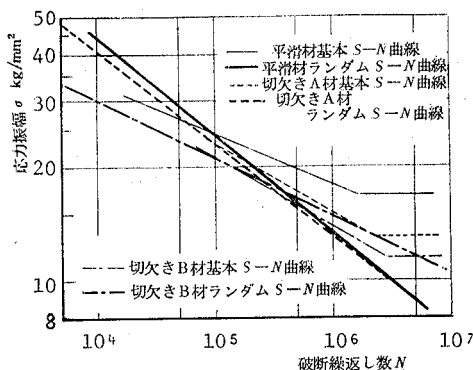
図42  $\sigma_{eq}$ — $N_f$  曲線 (S40C 鋼; 6~80Hz)

図43 ランダム S—N 曲線 (S40C 鋼; 6~80Hz)

と類似しており、短寿命域で  $\Sigma(n/N) > 1$  となるが、逆に後者の場合は短寿命域で  $\Sigma(n/N) < 1$  となって、この点が大いに異なる。

一方、切欠き効果を図43に示したランダム S—N 曲線の観点から考察すると、図が繁雑で分かりにくいのが、一般に切欠きのある場合は平滑の場合に比べて、ランダム S—N 曲線とそれに対応した基本 S—N 曲線との差が小さく、これは  $\sigma_{eq}$ — $N_f$  曲線の場合にも同様に観察される傾向である。形状係数の比較的小さい切欠き A 材における挙動は平滑材と類似し、定応力振幅負荷の場合に比べ、

ランダム荷重下では疲労被害を及ぼす割合は小応力レベルで大きく、大応力レベルで小さくなる。これに反して、 $\alpha=3.28$ の切欠きB材においては、小さな応力レベルによる被害は定応力振幅負荷の場合の方がランダム荷重下におけるよりもより大きいという逆の傾向を示している。この一因としては以下のようなことが考えられよう。すなわち、切欠きB材では全寿命の比較的早い時期にき裂が発生し、小頻度の大ピーク応力が大きな被害を及ぼしてき裂を進展させるのに対し、平滑材においてはき裂の発生が遅く、小頻度の大ピーク応力がひずみ硬化等に係わった強化作用を及ぼすが、一方このような大ピーク応力は発生頻度の高い小さな応力に対しては応力干渉によりそれらの小応力の被害効果を高める働きをもつためであろうと推測される。

先に、ランダム疲労試験結果を表した  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線（もしくは対応するランダム  $S-N$  曲線）と基本  $S-N$  曲線の傾きを比較すれば、前者の勾配が後者のそれに比べて急であることを述べた。基本  $S-N$  曲線は式(132)、また  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線もしくはランダム  $S-N$  曲線は式(137)または式(143)で表されるから、両対数表示した場合のそれらの直線の傾きは、それぞれ、 $(-1/m)$  および  $(-1/m')$  で与えられる。図44はこのような傾きに関連した定数  $m, m'$  およ

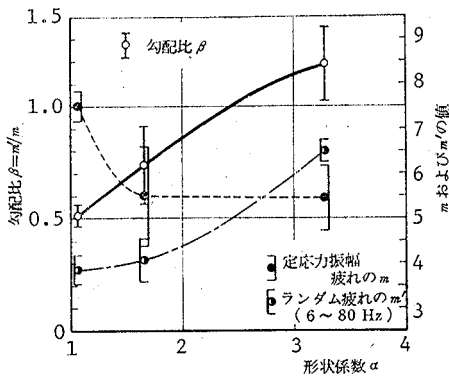


図44 基本  $S-N$  曲線およびランダム  $S-N$  曲線（もしくは  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線）の傾きならびに両者の比  $\beta$  に及ぼす形状係数  $\alpha$  の影響

び両曲線の傾きの比  $\beta = (-1/m)/(-1/m') = m'/m$  が形状係数の値に応じて

どのように変化するかを示したものである。図によれば、基本  $S-N$  曲線の定数  $m$  の値は切欠きが鋭くなるほど小さくなり、したがって傾きは急となるが、一方ランダム  $S-N$  曲線における  $m'$  値は逆に大きくなり傾きはゆるやかとなる。形状係数  $\alpha=1$  の近傍では  $\beta=0.5$  程度の値となり、 $\alpha=2\sim3$  の間で  $\beta=1$ 、すなわち基本  $S-N$  曲線とランダム  $S-N$  曲線の傾きが一致する場合が生じる。ランダム荷重下ではこのような切欠きの及ぼす複雑な影響に細心の注意を払わなければならない。なお図中、各実験点に与えた区切りのついた線分は各々の実験点のばらつきの範囲（標準偏差）を示したものである。

#### 5.3.4 アルミ合金のランダム疲労挙動

これまで主として S40C 鋼に関する実験結果について考察してきたが、ここではアルミ合金の場合を考える。ランダム疲労試験結果を表した  $\sigma_{rms}-N_f$  曲線はすでに図39に示した通りである。本供試材平滑試験片における  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線およびランダム  $S-N$  曲線を図45および図46に示した。両曲線の挙動は S40C 鋼平滑試験片の場合と全く同様の傾向を示し、先に論じた S40C 鋼に関する考察結果が本供試材の場合にもあてはまるので、重複を避けるため、本節でその詳細を論じることは割愛する。

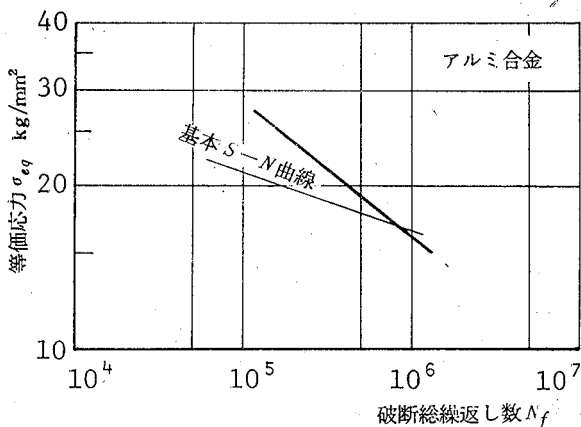


図45  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線 (アルミ合金平滑材; 6~80Hz)

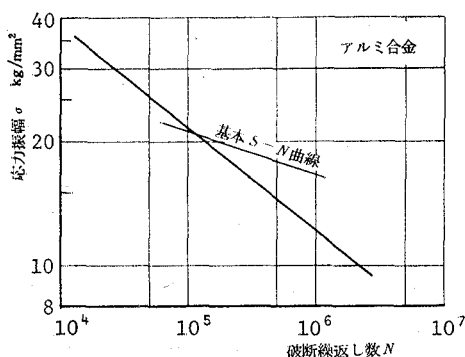


図46 ランダム S-N 曲線 (アルミ合金平滑材; 6~80Hz)

### 5. 3. 5 ランダム S-N 曲線による疲労寿命の推定について

ランダム疲労寿命(強度)に及ぼす周波数帯域ならびに切欠きの影響などに関してこれまで個々に考察してきたが、本節では本研究におけるすべてのランダム疲労試験結果を総括しながら、定常ガウス性ランダム荷重に対する材料の疲労寿命推定法について総合的に考究する。

さて、式(144)に示したように、 $\sigma_{eq}-N_f$  曲線と基本 S-N 曲線との寿命軸方向の差は修正マイナーの方法で計算した累積繰返し数比(累積被害)  $\Sigma(n/N)$  の対数値を表すものであることは明らかである。したがってこれら両曲線の交点は基本 S-N 曲線に基づいて修正マイナーの方法で計算した  $\Sigma(n/N)$  の値が丁度 1 に等しくなるようなランダム荷重下での疲労寿命値を示すものといえる。図47に本実験において得られたこのような交点の寿命値を表示したが、いずれの場合も  $4 \times 10^5 \sim 1 \times 10^6$  の範囲の寿命域に入っている。したがって、これより長寿命を示すと考えられるランダム荷重を受ける材料に対しては修正マイナー則を適用した疲労寿命推定は危険である。なお、図中に示した区切り付き線分は、図44の場合に説明したと同じく、標準偏差を以て表したばらつき範囲を示すものである。

ところで、式(142)で与えられるランダム S-N 曲線はこれに基づいて修正

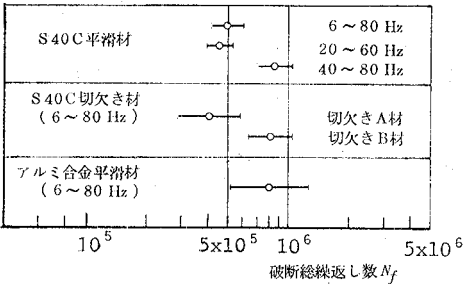


図47 基本  $S-N$  曲線と  $\sigma_{eq}-N_f$  曲線との交点の疲労寿命値

マイナーの方法で計算したランダム疲労試験結果の累積繰返し数比  $\Sigma(n/N)$  が常に1となるようなものであるから、このランダム  $S-N$  曲線が基本  $S-N$  曲線から何らかの方法で決定されうるならば、困難なランダム疲労試験を実施することもなく、一定応力振幅疲労試験結果からランダム荷重に対する疲労寿命や疲労強度が推定できることになってきわめて有用である。このためにはランダム  $S-N$  曲線と基本  $S-N$  曲線との相対関係を明確に把握して置く必要がある。すでに図44においては、両曲線の勾配比  $\beta = m'/m$  について形状係数  $\alpha$  との関連を明らかとしたが、図48は平滑試験片における種々の疲労試験結果から得られた  $m, m'$  および  $\beta$  の値を各々の場合別に相互に比較し易いように図

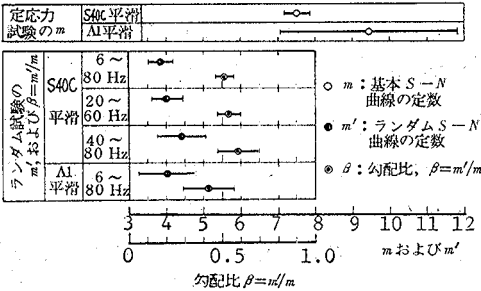


図48 材料定数  $m, m'$  および  $\beta = m'/m$  の値の比較 (平滑材)

示したものである。勿論これまでと同様にそれぞれの値のばらつきの幅も併記してある。図に見られるように、ランダム  $S-N$  曲線の傾きを表す定数  $m'$  は

いずれの場合においても  $m' \cong 4$  程度の値を示し、き裂進展を破壊力学的見地から破究した Paris<sup>(58)</sup> の 4 乗則との関連が示唆されて興味深い。また勾配比  $\beta$  は  $\beta=0.5$  付近の  $0.4 \sim 0.6$  の範囲にある。 $\beta$  がほぼ  $0.5$  近傍の値をとるということは、菊川ら<sup>(59)</sup> の引張り圧縮ランダム荷重による実験結果 (S40C 鋼,  $\beta=0.52$ ) とも一致しており、それゆえ平滑試験片に対しては  $\beta=0.5$  程度とみなしてもよいであろう。切欠き材の場合には  $\beta$  の値が相違することは図44に示した通りである。

基本  $S-N$  曲線とランダム  $S-N$  曲線の勾配の比は以上のように明らかとなったが、ランダム  $S-N$  曲線を基本  $S-N$  曲線から推定するためには勾配比  $\beta$  を知っただけでは不充分であって、もう一つ何らかの他の指標が考えられねばならない。両曲線を併記した各々の図を縦覧して容易に想起されるもう一つの指標としては両曲線の交点が考えられる。図49はこのような交点の示す寿命値

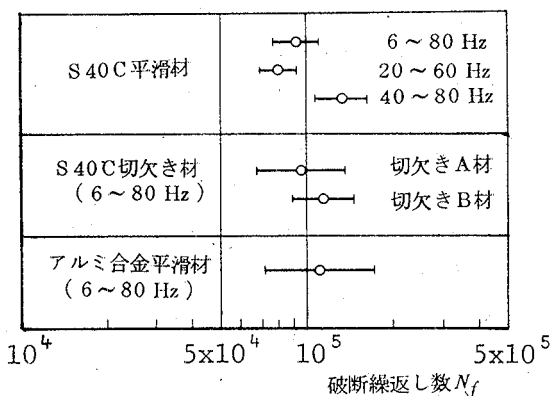


図49 基本  $S-N$  曲線とランダム  $S-N$  曲線との交点の疲労寿命値

を、本研究におけるすべてのランダム疲労試験の場合に対して、図示したものである。図によれば、種々の試験条件の相異にもかかわらず、本実験の範囲内では交点の疲労寿命値はほぼ  $1 \times 10^5$  近傍の値を示すことが観察される。この

実験事実に対して現時点において何らかの物理的根拠を与えるということは困難であるが、いま仮にこれを是認するものとすれば、定常ガウス性ランダム荷重に対する材料の疲労寿命は以下のようにして推定することが可能である。すなわち、いま与えられた材料に対して、その基本  $S-N$  曲線が既知であるとする。しかるときはランダム  $S-N$  曲線は、この基本  $S-N$  曲線上で破断繰返し数  $N=10^5$  の点を通り、部材の形状係数に応じて図44から求められる勾配比  $\beta$  (平滑材に対しては  $\beta=0.5$  としてよい) によって定まる傾きをもった直線として決定することができるので、このランダム  $S-N$  曲線を基にして実測荷重頻度分布に修正マイナーの方法を適用して  $\{\Sigma(n/N)\}_0$  を計算すれば、これがランダム荷重の1サイクル当たりの平均被害量を与えるものと解釈される。それゆえ  $N_f$  を

$$N_f \{\Sigma(n/N)\}_0 = 1 \quad (148)$$

として求めれば、この  $N_f$  がその荷重頻度分布をもつランダム荷重に対する部材の疲労寿命を与えることになる。

以上述べたランダム  $S-N$  曲線による疲労寿命の推定法は Colten-Dolan の方法<sup>(60)</sup>と基本  $S-N$  曲線の傾きを修正するという点では似ているが、この修正  $S-N$  曲線と基本  $S-N$  曲線との交点を Corten-Dolan の方法では実測荷重履歴の最大応力点とするのに対し、本法では実験結果に基づき疲労寿命  $N=10^5$  点とする所が異なる。実働ランダム荷重の実測履歴中に観察される最大応力値は標本関数毎に異なった値をとるであろうことが予測され、いわば確率変数として取扱われるべき性質のものである。このことを勘案すれば、本ランダム  $S-N$  曲線による方法が一つのより実用的な疲労寿命推定法となりうるが示唆される。

#### 5.4 重複ランダム荷重に対する疲労寿命推定法に関する一考察

機械・構造物に作用する実働荷重を定常でかつガウス性を有した確率過程として捕え、材料のランダム疲労寿命の推定を理論的にまた実験工学的にいかん適切に行うかについてはこれまで論じてきた通りである。ガウス性ランダム荷

重は、その特有な特性のために、ランダム荷重に対する材料の疲労挙動説明のための基礎的荷重モデルとして最適のものであることは論を待たないが、一般により複雑な機械・構造物の設計ということを考える場合、それらが全寿命期間を通じて全く統計的特性の等しいランダム荷重のみを常時負荷されているとは考えられ得ない場合も少なくない。たとえば航空機などは一飛行中に種々の乱気流中を通過するであろう。この場合、それぞれの乱気流 (air turbulence) による突風荷重 (gust load) はある強さ (パワー) をもったガウス性ランダム荷重に相当すると考えられる<sup>(14), (61), (62)</sup> ので、一飛行サイクルとしてはこれらを合成した荷重ひん度分布をもった、いわゆる重複ランダム荷重 (composite random load) を受けるものと考えられ、このような場合に対する材料の疲労寿命をいかに推定するかが重要な課題となる。強さの異なるガウス性ランダム荷重の重複負荷下における疲労寿命の推定法ということに関して、基礎的な重複ランダム荷重の場合に対してはすでに著者らの一人が報告した通りである<sup>(63)</sup> から、適宜それを参照していただくとして、ここではもっと一般的な観点から本課題に関する取扱い方を考えてみたい。

さて、いま仮に航空機が実用中に受ける荷重を考えるとすれば、それは図50に模式的に示したように、離着陸 (taking-off and landing) に伴って、

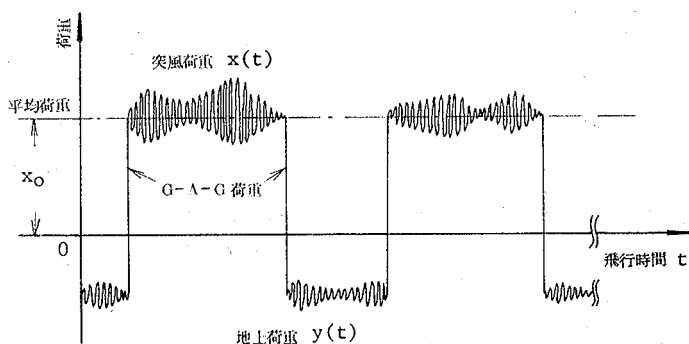


図50 航空機主翼に作用する実働荷重履歴の模式図

地上から受ける地上荷重 (ground load)  $Y(t)$  と飛行中の突風荷重  $X(t)$  を交



互に繰返して受け、両者の過渡期にはいわゆる G-A-G (Ground-Air-Ground) 荷重と呼ばれる  $Z(t)$  が作用する。このうち、地上荷重  $Y(t)$  は部材に圧縮応力を生ぜしめ、それがためにもたらされる引張りの残留応力 (residual stress) が時として弱化作用を及ぼし注意を要する<sup>(64)</sup>。さて、これらの荷重を繰返し受けて航空機が破壊するわけであるが、これらの荷重のうち破壊は本質的には突風荷重によってもたらされると考えられ、これが最も重要である。そこでこの突風荷重について中心的に考えることにすると、このような突風荷重  $X(t)$  は、図51に示すように、強さ (パワー) の異なる種々の単純ガウス性ランダム荷重の重複されたものとしてモデル化することができる。図51において、 $s_i (i=1, 2, 3, \dots)$  は各々の構成単純ガウス波  $X_i(t)$  の標準偏差であり、先に示した式

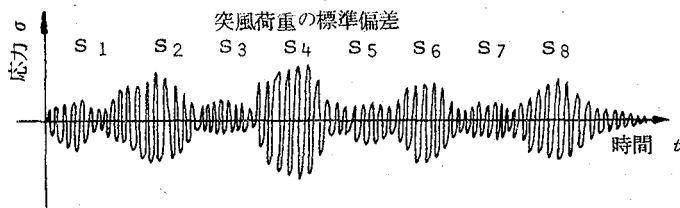


図51 突風荷重の重複ランダム負荷モデル

(32) および式 (79) の関係から、そのパワー (自乗平均値)  $\phi_i$  との間に次の関係をもっている。

$$\left. \begin{aligned} s_i^2 &= \phi_i - x_0^2 \\ \phi_i &= E[\{X_i(t)\}^2] \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

ここで、 $x_0$  は構成単純ガウス波  $X_i(t)$  の平均値であり、 $i$  に無関係に一定と考えてよく、前図50にみられる通り、重力の加速度  $1g$  に関連した応力を表すものである。また各  $X_i(t)$  のパワー・スペクトル密度を  $G_i(\omega)$  とすれば  $G_i(\omega)/s_i^2$  は  $i$  に無関係に一定、つまり構成単純ガウス波はすべて同じ形状のスペクトル密度をもつものと考えてよい<sup>(64)(65)~(67)</sup>。

単純ガウス波  $X_i(t)$  が単位時間当たりあるレベル  $\sigma$  を下から上に超えて上昇する平均期待数は、すでに述べた式 (94) で与えられるが、これを荷重1サイ

クル当りに換算したあるレベル  $\sigma$  の経過率を改めて  $\nu(\sigma, s_i)$  と書くことにすれば、

$$\nu(\sigma, s_i) = \exp\{-(\sigma - x_0)^2 / 2 s_i^2\} \quad (150)$$

と表すことができる。ただし上式においては平均値  $x_0$  の存在を考慮してある。各々の構成単純ガウス波の標準偏差  $s_i (i=1, 2, 3, \dots)$  は統計的に互いに独立であり、しかも半正規分布 (half-normal distribution) に従うランダム変数であると考えてよいとの報告<sup>(13), (14)</sup>を参照して、標準偏差  $s_i$  の確率密度関数  $f_s(u)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_s(u) = & P_c \sqrt{2/(\pi s_c^2)} \exp\{-u^2/(2 s_c^2)\} \\ & + P_t \sqrt{2/(\pi s_t^2)} \exp\{-u^2/(2 s_t^2)\} \end{aligned} \quad (151)$$

ただし、 $P_c$  および  $P_t$  はそれぞれ標準偏差  $s_c$  および  $s_t$  をもった晴天時の乱気流 (nonstorm turbulence) および荒天時の乱気流 (thunderstorm turbulence) の寄与率を表すものであり、当然

$$P_c + P_t = 1 \quad (152)$$

となる。 $P_c, P_t, s_c$  および  $s_t$  などは種々の条件下においてそれぞれの値が定められるが、容易に推測されるように  $P_c \gg P_t, s_t > s_c$  である。したがって通常は式 (151) における右辺第 2 項は無視してさしつかえないであろう。

突風荷重  $X(t)$  が式 (151) で与えられる確率分布をもった一連の標準偏差を有した単純ガウス波で構成される場合、その突風荷重があるレベル  $\sigma$  を横切る経過頻度  $\nu_X(\sigma)$  は、式 (150), (151) を用いて、

$$\begin{aligned} \nu_X(\sigma) = & \int_0^\infty \nu(\sigma, u) \cdot f_s(u) du \\ = & P_c \exp\{-(\sigma - x_0)/s_c\} \\ & + P_t \exp\{-(\sigma - x_0)/s_t\} \end{aligned} \quad (153)$$

として与えられる。これは明らかに指数分布を表すものであって、単純ガウス波に対するガウス (正規) 分布とは異なったものである。したがって本論文で述べたように、破断まで統計的性質の不変な単純ガウス性ランダム荷重のみを受ける場合の材料の疲労挙動を基礎的な立場から明らかにすると同時に、無限

個の単純ガウス波が重複負荷された重複ランダム荷重のもつ荷重頻度分布が指数分布となるという本節での考察結果をも踏まえて、より複雑な実際問題へのアプローチを試みるのが今後ますます要求される重要課題となってくるものと思われる。

## 6. 結 言

不規則現象を確率過程として把握し、数学的に明確に記述することによって、外見的には無秩序とも見える不規則現象の中に存在する統計的規則性をどのように適確に見出すべきかについてまず論じた。ついで、このような統計的規則性に基づいた不規則現象に係わる問題解決の理論的手法に関して、工学的問題を例にとりて、研究した。具体的には、S40C鋼およびアルミ合金を供試材として定常ガウス性ランダム荷重を与えた疲労試験を行い、このようなランダム荷重下での材料の疲労寿命の推定法に関して研究し、あわせてランダム荷重のスペクトル密度分布の周波数帯域が疲労寿命に及ぼす影響ならびに切欠きが寿命に及ぼす影響に関して考察した。得られた結果を要約すれば以下のようである。

(1) 定常ガウス性ランダム荷重の統計的性質は数学的に取扱いうるものであり、またそのピーク応力頻度分布  $f_p(\sigma)$  は次のようなレーレー分布

$$f_p(\sigma) = \frac{2\sigma}{\sigma_{rms}^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\sigma_{rms}^2}\right)$$

で近似して取扱うことができる。ここで、 $\sigma_{rms}$  は rms (root mean square) ピーク応力を表す。

(2) 応力頻度分布を上記のようなレーレー分布で近似した場合、次式で与えられる被害関数  $D(m)$ ,

$$D(m) = \Gamma(1 + m/2) = \int_0^\infty 2\sigma^{m+1} \exp(-\sigma^2) d\sigma$$

を用いて疲労被害の算定を行うことができる。

(3) ランダム荷重下の疲労においては rms ピーク応力  $\sigma_{rms}$  と破断までの総繰返し数  $N_f$  との間には両対数グラフ上で線形関係が成立する。この  $\sigma_{rms}$ —

$N_f$  曲線の傾きは平滑材の場合には基本  $S-N$  曲線の傾きよりも約 2 倍ほど急なものとなる。しかしながら、切欠きの鋭さ（形状係数  $\alpha$ ）が増すとともにその傾きはゆるやかとなって、 $\alpha=3.28$  では基本  $S-N$  曲線の傾きよりもさらにゆるやかなものとなる。

(4) スペクトル密度の周波数帯域の相違が材料のランダム疲労寿命（強度）に及ぼす影響はほとんど認められない。低周波数帯域を取除いた場合には、小振幅の応力の及ぼす被害効果がそのような低周波数帯域をも含む広帯域ランダム荷重の場合よりも多少小さくなる傾向が示されるようにも思われるが、ばらつきを考慮すればその差は有意とはいえない。

なお、周波数帯域が狭くなればガウス性ランダム荷重波の乱れの程度は弱くなって両振り応力波的なものとなり、不規則度比  $\lambda$  は 1 に近づく。

(5) ランダム荷重下での疲労に関して、修正マイナーの方法で計算した  $\Sigma(n/N)$  の値が常に  $\Sigma(n/N) \equiv 1$  となるようなランダム  $S-N$  曲線を両対数グラフ上で直線として理論的には次式で求めることができる。

$$N\sigma^{m'} = C' \cdot D(m')$$

ここで、 $m'$  および  $C'$  は  $\sigma_{rms} - N_f$  曲線を  $N_f \sigma_{rms}^{m'} = C'$  と表したときの材料定数である。

(6) 上記 (5) に述べたランダム  $S-N$  曲線を基本  $S-N$  曲線から簡便に求めるためには、基本  $S-N$  曲線上の疲労寿命  $N=10^5$  に対応する点から、切欠きの鋭さ（形状係数）に応じた両曲線の勾配比  $\beta$  ——たとえば平滑材では  $\beta=0.5$  となる——を用いて傾きを決め、直線を引くことにすればよい。こうして求まったランダム  $S-N$  曲線を用いて、ランダム荷重の実測荷重頻度分布に対して修正マイナーの方法によって  $\{\Sigma(n/N)\}_0$  の値を計算し、

$$\Sigma(n/N) = N_f \{\Sigma(n/N)\}_0 = 1$$

として、そのランダム荷重に対する疲労寿命  $N_f$  を推定することができる。ただし、ここでいう両曲線の交点を寿命値  $N=10^5$  の点とする方法は本実験の範囲内での結果に基づくもので、基本  $S-N$  曲線からランダム  $S-N$  曲線を決定するに当たっては、今後のデータの蓄積を待って充分熟慮して行く必要がある。

る。

以上、本研究の結果を概括したが、不規則現象を数学的に記述し、その統計的性質を問題解決に応用するという手法は本研究で取上げた工学的問題に対してのみならず、勿論社会科学の分野における問題に対しても適用可能なものであることを強調しておきたい。

さらに、工学的問題に関連しては、近年、機械・構造物の信頼性設計手法に対する関心がとみに高まり、活発な研究が行われるに至っている<sup>(68)~(66)</sup>。周知のように、信頼性設計に際しては、非決定論的な外的使用件と同じく非決定論的な強度や寿命とを結合事象的に考慮し、確率統計論的の基盤に立脚して物事を考えて行くということが基本的姿勢となるものである。それゆえに本論で述べた不規則現象の数学的記述が正に必要とされる応用分野であり、非常に興味深いものがあるが、これに関しての詳細は別稿に委ねる。

#### 参 考 文 献

- (1) 河本 実, 日本機械学会誌, 73-621 (昭45) p.1331.
- (2) トヨタ自動車工業(株)第2技術部強度実験課実働疲労研究会, 疲れ設計ハンドブック (SAE, Fatigue Design Handbook の訳書), (昭45), p.62.
- (3) Press, H., Houbolt, J. C., and Walls, J. H., NACA TN-3305 (1956).
- (4) 川合平夫, 森崎健二, 自動車技術会論文集, 18-11 (昭39), p.836.
- (5) 磯部孝編, 相関関数およびスペクトル——その測定と応用——, (昭42), p.97, 東京大学出版会.
- (6) 中村一郎, 文献(5)の p.90.
- (7) 中村 宏ほか, 東海道新幹線に関する研究報告, 第2冊 (昭35).
- (8) Pierson, W. J., and Marks, W., Trans. of Amer. Geophysical Union, 33-6 (1952), p.834.
- (9) Denis, M. St., and Pierson, W. J., Trans. of the Soc. Naval Architects & Marine Engineers, Vol. 61 (1953), p.280.
- (10) Jasper, N. H., Trans. of the Soc. Naval Architects & Marine Engineers, Vol. 64 (1956), P.154.
- (11) 竹沢誠二, 造船協会論文集, No. 114 (昭38), p.44.
- (12) Military Specification MIL-A-00861A (USAF), Airplane Strength and Rigidity, Flight Loads, (1971-3)
- (13) Press, H., Meadows, M. T., and Hadlock, I., NASA Report 1272 (1956).

- (14) Houbolt, J. C., et al., NACA Report, TR R-119 (1964), Langley Research Center, Virginia, USA.
- (15) Houbolt, J. C., AFFDL-TR-70-106 (1970), Air Force Flight Dynamics Labo. (USA).
- (16) McClosky, J. N., et al., AFFDL-TR-71-29 (1971), Air Force Flight Dynamics Labo. (USA).
- (17) Lin, Y. K., and Fujimori, Y., AIAA Journal, 11-3 (1973), p.334.
- (18) Shinozuka, M., Journal of the ASCE, 90-EM 5 (1964), p.147.
- (19) Shinozuka, M., Proc. of the Japan Soc. of Civil Engineers, No. 28(1972), p.137.
- (20) Sherlock, R. H., Journal of the ASCE, 78-126 (1952), p.26.
- (21) 石川 浩, 実働荷重に対する材料の疲れ寿命推定に関する研究 (昭50), 昭和堂印刷所 (京都).
- (22) Parzen, E., Stochastic Processes, (1962), p.88, Holden Day.
- (23) 下郷太郎, 機械の研究, 21-11 (昭44), p.1543.
- (24) 三上 操, 統計的推測, (昭44), p.111, 筑摩書房.
- (25) Gibra, I. N., Probability and Statistical Inference for Scientists and Engineers, (1973), p.123, Prentice-Hall.
- (26) Shinozuka, M., Proc. of Seminar in the Application of Statistics in Structural Mechanics, (1966), p.4, Columbia University Press.
- (27) Sherman, A., et al., NASA TR R-266 (1967).
- (28) 河本 実, 石川 浩, 井上伸夫, 日本機械学会論文集, 40-340 (昭49), p.3245.
- (29) 河本 実, 石川 浩ほか共著, 金属の疲れと設計, (昭47), p.141, コロナ社.
- (30) Rice, S. O., Bell System Technical Journal, Vol. 23 (1944), p.282; Vol. 24 (1945), p.46; Reprinted in N. Wax, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, (1954), p.133, Dover Publications, New York.
- (31) 河本 実, 石川 浩, 加藤元三, 日本機械学会講演論文集, No. 724-2 (昭47), p.40.
- (32) 河本 実, 石川 浩, 加藤元三, 高木俊治, 日本機械学会講演論文集 No. 730-1 (昭48), p.65.
- (33) K. S. ミラー著, 佐藤常三, 藤井澄二共訳, 技術者の数学Ⅱ, (昭35), p.328, 共立出版.
- (34) 宮脇一男, 雑音解析, (昭36), p.2, 朝倉書店.
- (35) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-264 (昭50), p.914.
- (36) 小西一郎編, 鋼橋 (基礎編Ⅱ), (昭52), p.815, 丸善.
- (37) 下郷太郎, 機械の研究, 21-12 (昭44), p.1669.

- (38) 堀川 明, ランダム変動の解析, (昭40), p.104, 共立出版.
- (39) A. パポリス著, 平岡寛二監訳, 工学のための応用確率論 (確率過程編), (昭47), p.343, 東海大学出版会.
- (40) Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, (1967), p.444, John Wiley & Sons.
- (41) Papoulis, A., *Fourier Integral and Its Applications*, (1962), p.1, McGraw-Hill Book Co.
- (42) 星谷 勝, 確率論的手法による構造解析, (昭48), p.49, 鹿島出版会.
- (43) 高岡宣善, 工学のための応用不規則関数論, (昭50), p.94, 共立出版.
- (44) 文献 (39) の p.316 参照.
- (45) 小西一郎, Shinozuka, M., 日本鋼構造協会誌, 11-111 (昭50), p.9.
- (46) Crandall, S. H., and Mark, W. D., *Random Vibration in Mechanical System*, (1963), p.48, Academic Press.
- (47) 河本 実, 石川 浩, 尾上暉隆, 日本機械学会論文集, 37-296 (昭46), p.657.
- (48) 河本 実, 石川 浩, 日本機械学会誌, 73-621 (昭45), p.1367.
- (49) 河本 実, 伊吹幸彦, 石川 浩, 日本材料学会誌, 17-173 (昭43), p.97.
- (50) 河本 実, 石川 浩, 柴田俊忍, 日本材料学会誌, 17-173 (昭43), p.103.
- (51) 文献 (29) の p.125.
- (52) Starkey, W. L., and Marco, S.M., *Trans. of ASME*, 79-6 (1957), p.1329.
- (53) Kawamoto, M. and Ishikawa, H., *Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University*, 35-1 (1973), p.37.
- (54) ASTM, *ASTM Standards, Part 3* (1961), p.215.
- (55) Kowalewski, J., *Full-Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures*, (1961), p.60, Pergamon Press.
- (56) Payne, A. O., *Full-Scale Fatigue Testing of Aircraft Structures*, (1961), p.76, Pergamon Press.
- (57) 河本 実, 金属の疲労, (昭37), p.63, 朝倉書店.
- (58) Paris, P. C., *Proc. of the 18-th Sagamore Army Materials Research Conference*, (1964), p.107, Syracuse Univ. Press.
- (59) 菊川 真, 大路正嗣, 城野政弘, 日本機械学会論文集, 35-278 (昭44), p.2020.
- (60) Colten, H. T., and Dolan, T. J., *Proc. of the International Conference on Fatigue of Metals*, (1956), p.235; Colten, H. T., *Trans. of SAE*, 72(1964), p.447.
- (61) 田中道七, 柴田俊忍, 日本材料学会誌, 17-173 (昭43), p.195.
- (62) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-266 (昭50), p.1072.
- (63) 河本 実, 石川 浩, 高木俊治, 日本材料学会誌, 24-260 (昭50), p.469.

- (64) Schijve, J., ASTM STP—No. 338, (1963), p.193, ASTM.
- (65) Shinozuka, M., AFFDL-TR-76-29, (1976), WPAFB, USA.
- (66) Yang, J. N., and Trapp, J. W., AFML-TR-75-29, (1975), WPAFB, USA.
- (67) Yang, J. N., and Trapp, J. W., AIAA Journal, 12-12 (1974), p.1623.
- (68) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-259 (昭50), p.344.
- (69) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-260 (昭50), p.477.
- (70) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-261 (昭50), p.563.
- (71) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-262 (昭50), p.693.
- (72) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-263 (昭50), p.783.
- (73) 石川 浩, 日本材料学会誌, 24-265 (昭50), p.993.
- (74) 石川 浩, 「信頼性設計に関する講習会」教材, (昭51), p.15, 日本材料学会.
- (75) Freudenthal, A. M., and Shinozuka, M., Proc. of ASCE, 92-ST-1 (1966), p.267.
- (76) Ang, A. H-S., and Cornell, C.A., Journal of Structural Division, Proc. of ASCE, 100-ST-9 (1974), p.320.
- (77) 小西一郎, Shinozuka, M., 日本鋼構造協会誌, 11-110 (1975), p.9.
- (78) 石川 浩, 河本 実, 木村 等, 日本機械学会講演論文集, No. 765-1 (昭51), p.133.
- (79) 石川 浩, 河本 実, 木村 等, 疲労部門委員会シンポジウム「疲労における最近の諸問題」講演論文集, (昭51), p.92, 日本材料学会.
- (80) 岡田憲司, 石川 浩, 沖津昭慶, 高松工業高専研究紀要 Vol. 13 (昭52), p.19.
- (81) Tanimoto, T., Amijima, S., and Ishikawa, H., Proc. of HOPE International JSME Symposium, (1977), p.109, JSME.
- (82) 岡田憲司, 石川 浩, 全本勝行, 高松工業高専研究紀要, Vol. 14 (昭53), p.1.
- (83) 谷本敏行, 網島貞男, 石川 浩, 日本材料学会誌, 28-304 (昭54), p.40.
- (84) Shinozuka, M., and Ishikawa, H., "Reliability-Based Scatter Factors," Submitted to AIAA Journal (1979), (to appear).
- (85) Vaicaitis, R., Ishikawa, H., and Shinozuka, M., Proc. of Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, ASCE, (1979), Tucson, Az., USA, p.265.
- (86) Shinozuka, M., Takada, S., and Ishikawa, H., Journal of Pressure Vessel Technology, Trans. ASME, Vol. 101 (1979), p.31.