フリート信頼度の推定手法と信頼性設計

石　川　　　浩*
谷　本　敏　夫**
木　村　　　等+
Masanobu Shinozuka++

Statistical Fleet Reliability Estimators and Reliability-Based Design

By
Hiroshi Ishikawa, Toshio Tanimoto,
Hitoshi Kimura and Masanobu Shinozuka

ABSTRACT

An effort has been recently made by A. M. Freudenthal to estimate the fleet reliability based on the scatter factor defined as the ratio of the maximum likelihood estimator of the scale parameter of the two-parameter Weibull distribution with a known shape parameter, assumedly describing the life distribution of structural elements or components, to the "time to first failure T_1" among a fleet of nominally identical elements or components subjected also to nominally identical operating conditions. Unfortunately, however, his definition of the fleet reliability R' does not rigorously represent the true fleet reliability R to be defined theoretically as $R=P[T_1 \geq t_1^*]$, where t_1^* is the

* 香川大学商業短期大学部（〒760 高松市幸町2―1）
** 同志社大学工学部（〒602 上京区烏丸今出川東入ル）
\+ 香川大学経済学部（〒760 高松市幸町2―1）
\+\+ Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Columbia University, New York, N.Y. 10027 U.S.A.

service life (minimum life) specified for the fleet. Further, R' in itself inherently involves a statistical nature and therefore needs to be deemed as an estimator of R.

In this respect, a new estimator of R, designated by $\hat{R}$ in the case of known shape parameter, has been introduced in the present study. Statistical natures of R' and $\hat{R}$ have been carefully examined and compared with the aid of Monte Carlo techniques, which has revealed the more advantage in using $\hat{R}$ in the reliability assessment rather than in using R'.

The mathematical difficulty multiplies when the Weibull shape and scale parameters are both assumed to be unknown. However, this is undoubtedly the case which is consistent with engineering reality. For these conditions, therefore, the reliability estimators $\check{R}$ and R'' have also been introduced as a natural extension of aforementioned $\hat{R}$ and R', respectively. Procedures involving Monte Carlo techniques have been established to evaluate the statistical properties of these estimators. Simulated results show that $\check{R}$ plays the more crucial role in the reliability-based design than R''. The effect of the size to be used in the fatigue test, of the fleet size and of the reliability level on the accuracy of such estimation has also been discussed.

The fleet reliability can then be estimated based on either $\hat{R}$ in the case of known shape parameter or $\check{R}$ unknown shape. This satisfies the essential part of the requirement in the reliability-based design of machines and structures.

(Received July 21, 1980)

1 はじめに

ビル建造物，橋梁，原子炉圧力容器等それらの破壊がいずれも直接・間接に多くの人命に関与するような重要な機械・構造物に対しては，設計の段階から破壊に対する信頼性（reliability）を充分に考慮し，安全な設計を行う必要があることは言うまでもない。ここにおいて，信頼性に基づく安全設計（信頼性設計）(reliability-based design）ということが重大な社会的要請として近時急速な関心を集めるに至っている。[(1)~(6)] とりわけ米国においては，空軍（USAF）を中心として，航空機の設計，検査および編隊管理等に関する緊急要請に基づき，広範囲にわたった信頼性基準の導入がすでに試みられており，それに伴って機

体材料の選択，作用荷重スペクトルの推定，構造幾何の決定，検査手法あるいは保証試験等々，設計・製作・試験の全段階を通じて信頼性の考え方を有機的に反映させるにはどのようにすべきかといった研究が極めて活発に行われていることは周知の通りである[(1)]。多くの研究成果が信頼性基準遂行上の不可欠の資料として積極的に援用されているが，一方においては未だ解明を要する問題も多々あり，更なる継続研究が示唆されていることもまた事実である。そのような継続研究課題として取り扱われているものの1つに Scatter Factor（スキャター・ファクター）の問題がある[(7)]。Scatter Factor の概念は従来の許容応力設計法 (working stress design method) における安全率 (factor of safety) と類似の概念として A. M. Freudenthal[(8)] によって提案されたものであり，明らかに従来の安全率に比べてはるかに明確な確率・統計論的基盤の下に構造物信頼性と密接に関連づけられたものである。

言うまでもなく信頼性を考慮した安全設計手法とは，理論的に厳密な根拠をもったものであるばかりでなく，既存のデータの可能な限りの有効利用を図ったものであって，かつ容易に実施できるものでなければならない[(6), (7)]。さらにはまた従来の設計手法との類似性をも具備せしめることによって，初めてこれを試行しようとする者に非常な違和感を与えることのないよう配慮されていることが望ましく，しかもその根底には現実のもつ様々な不確定性 (uncertainties) をできるだけ考慮に入れた確率・統計論的基盤を備えたものである必要がある[(2)]。上述のScatter Factor は正しくこのような相反する要請を満足した特徴的なものと言うことができよう。

さて，Freudenthal によって提案された Scatter Factor とは，具体的に言えば，ある作用条件下における構造部材（もしくは構造物）の寿命分布が2母数ワイブル分布 (two-parameter Weibull distribution)[(17)] に従うとしたとき，その尺度母数 (scale parameter) の最尤推定量 (maximum likelihood estimator, 略してMLE) を，同一作用条件を受ける同一構造部材（もしくは構造物）のフリート[(次頁 注1)] (fleet) 中における最弱要素の寿命（最小寿命 (minimum life) もしくは初めて破壊が生じるまでの時間 (time to first failure, 略して，

TTFF)とも呼ばれる)で除したものであって,当然確率量となる。Freudenthalは2母数ワイブル分布の形状母数(shape parameter)が既知であるという仮定の下に Scatter Factor の理論分布を誘導し,それに基づいてフリート信頼度(fleet reliability)(注2)を求める手法を示している。しかしながら,形状母数が既知という仮定は Scatter Factor の理論分布を解析的な形で導出できるという便利さを有しはするものの,現実問題としてこの仮定は特別な場合を除いてはなかなか正当化され難いものと考えられる。これはすなわち,ドリル穴あけ作業における人為的誤差等,構造部材の材料特性の本来的な変動性(variability)に加えて,製造・組立て等の諸過程で混入するであろう様々な不確定性を考えれば明らかであろう。さらにはまた,Scatter Factor をフリート信頼度に結びつける過程において理論的な疑義を生じる点が皆無ではない。

以上の諸点を鑑み,本論文ではまず信頼性の取り扱いに際して極めて重要な役割をもつ順序統計(order statistics)の概念について簡単に論じ,[(9)~(12)] 次で Freudenthal の Scatter Factor に基づくフリート信頼度 R' が真のフリート信頼度 R といかなる関係にあるのかという点を理論的に考察し,両者が相異なるものであること,ならびに R' は統計的性質をもつものであって,言わば真の R の推定量(estimator)として取り扱われるべき性質のものであること等を指摘するとともに,新しく真の R を適正に推定すべき推定量 $\hat{R}$ を提案した。併せて形状母数が既知の場合に,推定量 R' および $\hat{R}$ の統計的性質をモンテカルロ・シミュレーション手法(Monte Carlo simulation method)を用いて求め,両者の得失を論じた。さらに,工学的要請が形状母数既知の仮定を正当化し難い現状を勘案して,[(13),(14)] 形状母数ならびに尺度母数がともに未知の場合に

(注1) フリートとは同一作用条件下における多数の同一構造部材(もしくは構造物)を集団として考えたときの概念である。例えば,m 個の同一構造部材で構成される構造物の各々の部材要素が同一荷重条件下にあるとするとき,この構造物が1つのフリートとなる。また,m 機の同一航空機が同一作用条件下にあるとするとき、その m 機全体としての集団が1つのフリートである。この場合 m をフリート寸法(fleet size)という。もちろん $m=1$ の場合もフリートの取り扱いに含めて考えることとする。

(注2) 先に(脚注1)で述べたように,フリート信頼度は見方を変えれば構造物信頼度(structural reliability)と同義である。それゆえ,本論文ではフリート信頼度という言葉を多用することにする。

R' および $\hat{R}$ の両者を拡張することを考え，真のフリート信頼度 R の推定量 R'' および $\check{R}$ を新たに提案した。両母数が未知の場合には母数推定の統計的手法は非常に複雑なものとなって，R'' および $\check{R}$ の理論分布を簡単な解析的な形で表すことは不可能であるが，理論的な考察によって母数によらない統計量（parameter-free statistics）を構成し，以てモンテカルロ技法を援用した R'' および $\check{R}$ の統計的性質のシミュレーション手法を確立した。シミュレーションの結果は，この場合にも $\check{R}$ が R'' に比べてはるかに統計的性質の良いことを示しており，したがって以上により，形状母数が既知・未知のいずれをも問わず，新たに提案した $\hat{R}$ ならびに $\check{R}$ が真のフリート信頼度 R の推定量として極めて優れた性質を有することを確認するとともに，これらによって与えられた信頼度に基づく安全設計を行いうることを示した。

2　順序統計量の確率分布

初めに信頼性解析において重要な役割をもつ順序統計の概念についてはっきりさせておきたい。

一般に無作為抽出（ランダム・サンプリング；random sampling）によって得られたデータ組を系統的に，例えば大きさの順に並べた順位付きデータ列に注目することによって，より一層多くの情報が引き出されるであろう。破壊寿命の分布等を考える場合においても，抽出データの中心傾向のみを考えるよりも，初めての破壊が起こるまでの時間（最小寿命）TTFF や最後の破壊が生じるまでの時間（最大寿命；maximum life または time to last failure, 略して TTLF と呼ばれる）等を考える方が合理的であるという場合がしばしば生じる。[15], [16] 事実，Freudenthal の Scatter Factor では TTFF を考えていることはすでに述べた通りである。

さて，確率密度関数 $f(t)$ ならびに分布関数 $F(t)$ をもつ破壊寿命 $T(T \geqq 0)$ の母集団からランダム・サンプリングされた n 個の標本を $T_{(1)}, T_{(2)}, \cdots, T_{(n)}$ としよう。これを大きさの順に小さなものから順次並べて，

$$T_1 \leqq T_2 \leqq \cdots\cdots \leqq T_n \qquad (2\cdot1)$$

と表すことにすれば，T_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は大きさ n の第 i 番目の順序統計量（i—th order statistic）と呼ばれ，容易にわかるようにこの T_i はまた確率変数であると考えられる。

ここで，この T_i を微小時間間隔 $(t_i,\ t_i+dt_i)$ に見出す確率 $f_{Ti}(t_i)dt_i$ を考えよう。Fig. 1 に示すように，これは次の3つの事象 A_1，A_2 および A_3 の

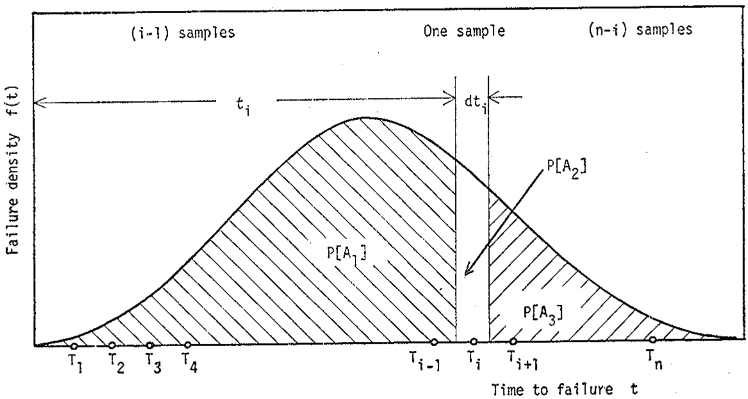

Fig. 1. Explanatory figure to find out the probability of occurrence of the i-th order statistic.

結合事象の確率として以下のように与えられる。

$$f_{Ti}(t_i)\,dt_i = \mathrm{P}\,[t_i \leqq T_i \leqq t_i + dt_i]$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!}\{\mathrm{P}[A_1]\}^{i-1}\ \{\mathrm{P}[A_2]\}^{1}\ \{\mathrm{P}[A_3]\}^{n-i} \qquad (2\cdot 2)$$

ただし，

$A_1=$ $(i-1)$ 個の標本要素 T_1，$T_2, \cdots\cdots$，T_{i-1}，の各々が区間 $(0,\ t_i)$ に存在する事象。

$A_2=$第 i 番目の順序統計量 T_i が区間 $(t_i,\ t_i+dt_i)$ にある事象。

$A_3=$ $(n-1)$ 個の標本要素 T_{i+1}，T_{i+2}，$\cdots\cdots$，T_n の各々が区間 (t_i+dt_i, ∞) にある事象。

ところで事象 A_1，A_2，A_3 の発生確率は，それぞれ，

$$P\{A_1\} = \int_0^{t_i} f(\xi)\,d\xi = F(t_i) \tag{2·3—a}$$

$$\begin{aligned} P\{A_2\} &= \int_{t_i}^{t_i+dt_i} f(\xi)\,d\xi \\ &= F(t_i+dt_i) - F(t_i) \\ &\cong f(t_i)dt_i \end{aligned} \tag{2·3—b}$$

$$\begin{aligned} P\{A_3\} &= \int_{t_i+dt_i}^{\infty} f(\xi)\,d\xi \\ &= 1 - F(t_i+dt_i) \\ &\cong 1 - F(t_i) - f(t_i)\,dt_i \end{aligned} \tag{2·3—c}$$

と計算されるから，(2・3—a) ～(2・3—c) 式を (2・2) 式に代入すれば，

$$\begin{aligned} f_{Ti}(t_i)dt_i &= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\{F(t_i)\}^{i-1}\{f(t_i)dt_i\} \\ &\quad\times\{1-F(t_i)-f(t_i)\,dt_i\}^{n-i} \\ &= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \\ &\quad\times\{F(t_i)\}^{i-1}\{1-F(t_i)\}^{n-i}f(t_i)\,dt_i \\ &\quad+ (dt_i \text{ の2次以上の乗積項}) \end{aligned} \tag{2·4}$$

(2・4) 式の両辺を dt_i で割って，しかる後 $dt_i \to 0$ の極限をとれば，

$$\begin{aligned} f_{Ti}(t_i) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \\ &\quad\times\{F(t_i)\}^{i-1}\{1-F(t_i)\}^{n-i}f(t_i) \end{aligned} \tag{2·5}$$

となるから，これが T_i の密度関数を与える。したがってこの (累積確率) 分

布関数 $F_{Ti}(t_i)$ は,

$$F_{Ti}(t_i)=\int_0^{t_i} f_{Ti}(\xi)\,d\xi$$
$$=\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left\{F(t_i)\right\}^k\left\{1-F(t_i)\right\}^{n-k} \qquad (2\cdot 6)$$

で与えられる。(注3)

次に，第 i 番目の順序統計量 T_i と第 j 番目の順序統計量 T_j $(1\leqq i\leqq j\leqq n)$ の結合確率密度 $f(t_i, t_j)$（ここで，$0\leqq t_i\leqq t_j$ とする）を考えよう。これは Fig. 2 を参照することによって，多項分布の考え方から以下のように簡単に求められる。

$$f(t_i,t_j)dt_idt_j=\mathrm{P}\left[t_i\leqq T_i\leqq t_i+dt_i,\ t_j\leqq T_j\leqq t_j+dt_j\right]$$
$$=\frac{n!}{(i-1)!1!(j-i-1)!1!(n-j)!}$$
$$\times P_1^{i-1}\ P_2^1P_3^{j-i-1}\ P_4^1\ P_5^{n-j} \qquad (2\cdot 7)$$

(注3)　部分積分法を用いて以下のように計算できる。

$$F_{Ti}(t_i)=\int_0^{t_i} f_{Ti}(\xi)d\xi$$
$$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_0^{t_i}\left[\frac{\{F(\xi)\}^i}{i}\right]'\left\{1-F(\xi)\right\}^{n-i}d\xi$$
$$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\left[\frac{\{F(\xi)\}^i}{i}\left\{1-F(\xi)\right\}^{n-i}\right|_{\xi=0}^{\xi=t_i}$$
$$-\int_0^{t_i}\frac{\{F(\xi)\}^i}{i}(n-i)\left\{1-F(\xi)\right\}^{n-i-1}\left\{-\frac{dF(\xi)}{d\xi}\right\}d\xi$$
$$=\binom{n}{i}\left\{F(t_i)\right\}^i\left\{1-F(t_i)\right\}^{n-i}+\frac{n!}{i!(n-i-1)!}\int_0^{t_i}\left[\frac{\{F(\xi)\}^{i+1}}{i+1}\right]'\left\{1-F(\xi)\right\}^{n-i-1}d\xi$$
$$=\binom{n}{i}\left\{F(t_i)\right\}^i\left\{1-F(t_i)\right\}^{n-i}+\binom{n}{i+1}\left\{F(t_i)\right\}^{i+1}\left\{1-F(t_i)\right\}^{n-(i+1)}$$
$$+\frac{n!}{(i+1)!(n-i-2)!}\int_0^{t_i}\left[\frac{\{F(\xi)\}^{i+2}}{i+2}\right]'\left\{1-F(\xi)\right\}^{n-i-2}d\xi$$
$$=\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left\{F(t_i)\right\}^k\left\{1-F(t_i)\right\}^{n-k}$$

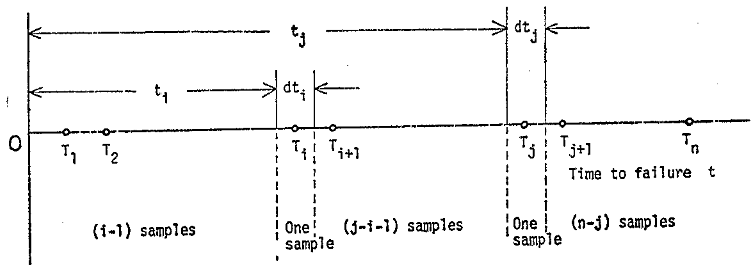

Fig. 2. Schematic representation of the i-th and the j-th order statistics.

ただし,

$P_1=(i-1)$ 個の標本要素の各々が区間 $(0,\ t_i)$ にある確率

$$=\int_0^{t_i} f(\xi)\,d\xi=F(t_i) \qquad (2\cdot 8-\mathrm{a})$$

$P_2=$第 i 番目の順序統計量 T_i が区間 $(t_i,\ t_i+dt_i)$ にある確率

$$=F(t_i+dt_i)-F(t_i)$$

$$\cong f(t_i)\,dt_i \qquad (2\cdot 8-\mathrm{b})$$

$P_3=(j-i-1)$ 個の標本要素の各々が区間$(t_i+dt_i,\ t_j)$にある確率

$$=F(t_j)-F(t_i+dt_i)$$

$$\cong F(t_j)-F(t_i)-f(t_i)\,dt_i \qquad (2\cdot 8-\mathrm{c})$$

$P_4=$第 j 番目の順序統計量 T_j が区間 (t_j, t_j+dt_j) にある確率

$$=F(t_j+dt_j)-F(t_j)$$

$$\cong f(t_j)\,dt_j \qquad (2\cdot 8-\mathrm{d})$$

$P_5=(n-j)$ 個の標本要素の各々が区間$(t_j+dt_j,\ \infty)$ にある確率

$$=1-F(t_j+dt_j)$$

$$\cong 1-F(t_j)-f(t_j)\,dt_j \qquad (2\cdot 8-\mathrm{e})$$

$(2\cdot 8-\mathrm{a})\sim(2\cdot 8-\mathrm{e})$ の式を $(2\cdot 7)$ 式に代入して,両辺を $dt_i\,dt_j$ で割り,しかる後に$dt_i\to 0$, $dt_j\to 0$ の極限をとれば,

$$f(t_i, t_j)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}\{F(t_i)\}^{i-1}\{F(t_j)-F(t_i)\}^{j-i-1}$$
$$\times\{1-F(t_j)\}^{n-j}\ f(t_i)\,f(t_j) \qquad (2\cdot 9)$$

ただし, $0\leqq t_i\leqq t_j<\infty$である。

3 Scatter Factor による信頼度推定式の検討

本節では, Freudenthal[8] の提案した Scatter Factor の概念について簡単に概括し, 次でそれを基にしたフリート信頼度の推定式の妥当性について検討を加えることとする。

いま, 構造部材（もしくは構造物）の寿命Tが2母数ワイブル分布[17]に従うものとし, 密度関数$f(t)$および, 分布関数$F(t)$が次式で与えられるものとする。

$$f(t)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \qquad (3\cdot 1)$$

$$F(t)=1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \qquad (3\cdot 2)$$

ここにαは形状母数であり, βは尺度母数である。

この母集団から無作為に抽出したn個の標本T_{0i} $(i=1,2,\cdots,n)$の結合確率密度Lは

$$L=f(t_{01},\ t_{02},\ \cdots\cdots,t_{0n})$$
$$=\prod_{i=1}^{n} f(t_{0i})$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \qquad (3\cdot 3)$$

で与えられる。上式はn個の標本確率変数T_{0i}がそれぞれある特定の実現値t_{0i}をとるとしたとき, これらの実現値の組が同時に生起する確からしさを表す1つの尺度を表すものと考えられるから, このLを標本点$(t_{01},t_{02},\cdots, t_{0n})$における尤度関数（likelihood function）と呼び, 明らかに母数α, βの値

に依存してその値を変える関数である。この際，尤度関数Lを最大にする母数の値のときに，標本点$(t_{01}, t_{02}, \cdots, t_{0n})$が最も実現しやすいであろうと考えるのが妥当な方法であり，これが最尤法の基本概念である。[18] そこで(3・3)式の尤度関数Lを最大にする母数値について考えよう。(3・3)式の対数をとれば，[注4]

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+(\alpha-1)\ln\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)-\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \quad (3\cdot 4)$$

となる。この$\ln L$を最大にする母数値は次の連立方程式を満足する解として求められる。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \alpha}=\dfrac{n}{\alpha}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}\ln\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)=0 & (3\cdot 5-\mathrm{a})\\[2ex] \dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta}=-n\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha}{\beta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}=0 & (3\cdot 5-\mathrm{b})\end{cases}$$

上2式を整理して書き直せば，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)-1\right\}\ln\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)=\frac{n}{\alpha} & (3\cdot 6-\mathrm{a})\\[2ex] \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}=1 & (3\cdot 6-\mathrm{b})\end{cases}$$

となり，これを尤度方程式と呼ぶ。[19]

さて，形状母数αが既知であるものとすれば，尺度母数βの最尤推定値$\hat{\beta}$は，n個の標本実現値t_{0i} $(i=1, 2, \cdots, n)$を用いて，(3・6—b)式から，

$$\hat{\beta}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_{0i}{}^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \quad (3\cdot 7)$$

として求められる。この推定値$\hat{\beta}$は標本組t_{0i}が異なる度に値を変えるものであることは明らかだから，1つの確率変数として取り扱われるべき性質のものである。それゆえ，尺度母数βの最尤推定量$\hat{B}$を

(注4)　これを対数尤度関数(log-likelihood function)という。対数関数は1価関数であるから，$\ln L$を最大にする母数値はLの最大値をも与える。

$$\hat{B} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{0i}{}^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \tag{3・8}$$

と表すことにする。(注5) ここに，T_{0i}は前述の寸法nのランダム・サンプルである。したがって，(3・7) 式の$\hat{\beta}$は (3・8) 式の$\hat{B}$の1つの実現値として考えることができる。

さてここで，同一の確率特性をもったm個の構造部材もしくは，構造物(フリート寸法m) のうちで，最弱要素の寿命 (TTFF) をT_1と表すことにすれば，このT_1の密度関数$f_{T1}(t_1)$ならびに，分布関数$F_{T1}(t_1)$は前節順序統計の考え方を用いて，(2・5) 式ならびに (2・6) 式において，$i=1$と置き，さらに (3・1) 式および (3・2) 式を代入することにより次式で与えられることがわかる。

$$f_{T1}(t_1) = \frac{\alpha}{\beta_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha}\right] \tag{3・9}$$

$$F_{T1}(t_1) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha}\right] \tag{3・10}$$

ここに，

$$\beta_1 = \beta/m^{1/\alpha} \tag{3・11}$$

Freudenthal は Scatter Factor S を

$$S = \hat{B}/T_1 \tag{3・12}$$

と定義し，形状母数αが既知という仮定の下に，このSの分布関数が

$$F_S(s) = \mathrm{P}\left[S \leqq s\right] = \left[\frac{s^{\alpha}}{(m/n)+s^{\alpha}}\right]^{n} \tag{3・13}$$

で与えられることを誘導している。もちろん (3・13)式の誘導に際しては，後述するように統計量$2nV = 2n(\hat{B}/\beta)^{\alpha}$が自由度$2n$の$\chi^2$分布に従うことを用いて

(注5) 推定量 (estimator) はサンプルの値に応じて種々の値をとりうるものであって，1つの確率変数である。これに対して，それが特定の値をとったとき，その値を推定値 (estimate) という。

いる。[8][18] それゆえ，尺度母数βの最尤推定量 $\hat{B}$（αが既知）の密度関数は，

$$f_{\hat{B}}(\hat{\beta})=\frac{\alpha n^{n}}{\beta\Gamma(m)}\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{\alpha n-1}\exp\left[-n\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{3・14}$$

で与えられることがわかり，また統計量

$$Z=\hat{B}/\beta \tag{3・15}$$

の密度関数は

$$f_{Z}(z)=\frac{\alpha n^{n}}{\Gamma(n)}z^{\alpha n-1}\exp\left\{-nz^{\alpha}\right\} \tag{3・16}$$

で与えられることになる。

ここで，次の確率変数Y_i（$i=1, 2, \cdots, n$），VおよびW

$$Y_i=\left(\frac{T_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3・17}$$

$$V=\left(\frac{\hat{B}}{\beta}\right)^{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{T_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i \tag{3・18}$$

$$W=\left(\frac{T_1}{\beta}\right)^{\alpha} \tag{3・19}$$

を考えよう。T_{0i}は（3・1）式の密度関数をもった2母数ワイブル分布に従う母集団からのランダム・サンプルであるから，やはり母集団と同じ分布に従うと考えられるので，その密度関数は，

$$f_{T_{0i}}(t_{0i})=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{t_{0i}}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \tag{3・20}$$

となることがわかる。それゆえ，（3・17）式のY_iの密度関数を$f_{Y_i}(y_i)$とすれば，変数変換の考え方から

$$f_{Y_i}(y_i)=f_{T_{0i}}(t_{0i})\left|\frac{dt_{0i}}{dy_i}\right|$$

$$=\exp(-y_i) \tag{3・21}$$

と表される。すなわち，Y_i（$i=1, 2, \cdots, n$）は母数α，βに依存しない指数分布（exponential distribution）に従う確率変数であって，また

$$\mathrm{E}\{Y_i\}=\int_0^{\infty}y_i\exp\{-y_i\}\,dy_i$$

$$=y_i\left[e^{-y_i}\right]\Big|_{y_i=0}^{y_i=\infty}+\int_0^\infty e^{-y_i}dy_i$$

$$=1 \tag{3・22}$$

から，その平均値が1であることがわかる。また Y_i が平均値1の指数分布に従うとき，

$$X_i=2Y_i \tag{3・23}$$

とした確率変数 X_i（$i=1, 2, \cdots, n$）の密度関数は

$$f_{X_i}(x_i)=f_{Y_i}(y_i)\left|\frac{dx_i}{dy_i}\right|^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\exp\left[-\frac{x_i}{2}\right] \tag{3・24}$$

ここで自由度 ϕ の χ 分布の密度関数が

$$f(\chi)=\frac{1}{2^{\phi/}\ \Gamma(\phi/2)}(\chi^2)^{\frac{\phi}{2}-1}\exp\left[-\frac{\chi^2}{2}\right] \tag{3・25}$$

であることに留意して，(3•25)式において $\phi=2$ とすれば，これは(3•24)式と全く一致する。すなわち，(3•23)式で定義される X_i は自由度 $\phi=2$ の χ 分布に従うことがわかる。それゆえ，χ^2 分布の再生性から，[20]

$$2nV=\sum_{i=1}^{n}2Y_i=\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{3・26}$$

は自由度 $\phi=2n$ の χ^2 分布に従い，したがって V の密度関数が以下のように与えられる。

$$f_V(v)=\frac{2n}{2^n\ \Gamma(n)}(2nv)^{n-1}\exp\left[-nv\right]$$

$$=\frac{n^n}{\Gamma(n)}v^{n-1}\exp\left[-nv\right] \tag{3・27}$$

さらに，(3・19)式の W は，T_1 が(3•9)式のワイブル分布に従うことから，(3・11)式を用いて

$$W=\left(\frac{T_1}{\beta}\right)^\alpha=\left(\frac{T_1}{\beta_1}\right)^\alpha\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^\alpha=\frac{1}{m}\left(\frac{T_1}{\beta_1}\right)^\alpha$$

と変形することによって，先の Y_i と同じ考え方から母数に独立に平均値

$1/m$の指数分布に従うことがわかり，その密度関数は，

$$f_W(w)=m\ \exp\ [-mw] \tag{3・28}$$

で与えられる。

上述のように V および W はワイブル2母数 α および β に依存しない統計量であるから，V と W の標本値を同時に発生させることによって，その比

$$\frac{V}{W}=\left(\frac{\hat{B}}{T_1}\right)^{\alpha} \tag{3・29}$$

の分布を，それゆえにまたαが既知の場合には，Scatter Factor S

$$S=\frac{\hat{B}}{T_1}=\left(\frac{V}{W}\right)^{1/\alpha} \tag{3・30}$$

の確率特性を，モンテカルロ法によって容易にシミュレートすることができる。S の理論分布は（3・13）式に与えられているから，（3・30）式によるモンテカルロ・シミュレーションの結果を理論式（3・13）と比較することによってモンテカルロ・シミュレーションを行う場合の標本寸法(Monte Carlo sample size) Mの妥当性を検証することが可能である。

Fig. 3 は$\alpha=4.0$, $n=1$, $m=3$ の場合を例にとって，モンテカルロ標本寸

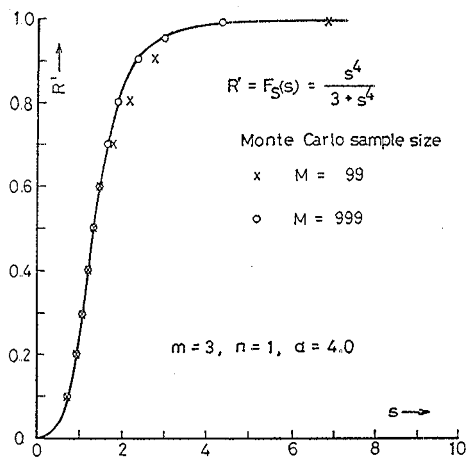

Fig. 3. Monte Carlo simulation results of the distribution function of scatter factor $F_S(s)$.

法 M がシミュレーション精度に及ぼす影響を調べたものである。モンテカルロ標本寸法は，$M=99$，999 および 1999の 3 種類とし，$M=1999$の結果は図中実線で描いた理論曲線と全く一致したので，繁雑さを避けるため，ここでは省略してある。図に明らかなように，$M \geqq 1000$程度であれば，モンテカルロ・シミュレーション結果は充分な精度をもつものと考えられるが，本研究では後述するように，形状母数 α と尺度母数 β がともに未知の場合のシミュレーションをも考えているので，モンテカルロ標本寸法としては $M=1999$ を採用することとした。

さて，ここで $t_1{}^*$ を設計に要請されている最小寿命(minimum service life)とし，フリートはこの最小寿命の要請をフリート信頼度 R で満足する必要があるものとしよう。しかるときは，フリート信頼度 R は

$$R=\mathrm{P}\,[T_1 \geqq t_1{}^*] \tag{3・31}$$

として規定されるべきものである。しかしながら，Freudenthal は（3・31）式の R に代えて，n 個の寿命データ t_{0i} ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) が与えられたとき，（3・7）式によって計算される尺度母数 β の最尤推定値 $\hat{\beta}_0$ を用いて，

$$R'=\mathrm{P}\,\left[S \leqq \left(\frac{\hat{\beta}_0}{t_1{}^*}\right)\right] \tag{3・32}$$

としてフリート信頼度を定義している。（3・31）式および（3・32）式の R および R' はそれぞれ（3・10）式および（3・13）式を用いて以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} R &= 1-F_{T1}(t_1{}^*) \\ &= \exp\left[-\left(\frac{t_1{}^*}{\beta_1}\right)^{\alpha}\right] \\ &= \exp\left[-m\left(\frac{t_1{}^*}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \end{aligned} \tag{3・33}$$

$$R' = \left[\frac{(\hat{\beta}_0/t_1{}^*)^{\alpha}}{(m/n)+(\hat{\beta}_0/t_1{}^*)^{\alpha}}\right]^{n} \tag{3・34}$$

上述した 2 つのフリート信頼度 R および R' は明らかに互いに相異なるものである。この差異は R と R' をそれぞれ

$$R=\iint_{D_1\cup D_2} f_{T1}(t_1)\, f_{\hat{B}}(\hat{\beta})\, dt_1\, d\hat{\beta} \tag{3·35}$$

$$R'=\iint_{D_1\cup D_3} f_{T1}(t_1)\, f_{\hat{B}}(\hat{\beta})\, dt_1\, d\hat{\beta} \tag{3.36}$$

と積分表示することによって，はっきりと理解することができる。ここに，積分領域 $D_1\cup D_2$ および $D_1\cup D_3$ は Fig.4に示した通りである。すなわち，理

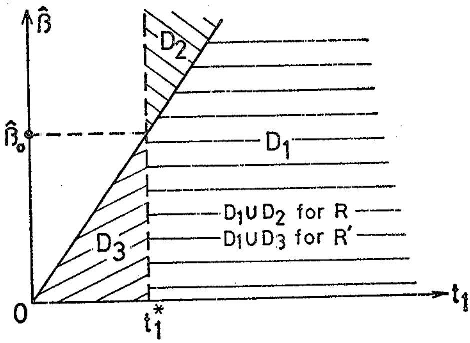

Fig. 4.　Domains of integration for fleet reliabilities R and R'.

論的に正しいフリート信頼度Rを与える積分領域は図において$t_1\geqq t_1^*$を満足する領域$D_1\cup D_2$であるが，Freudenthal によるR'は正しい領域$D_1\cup D_2$からD_2を取り去り，代わりにD_3を加えたもの（$D_1\cup D_3$）となっていることがわかる。

以上を要するに，Freudenthal の Scatter Factor Sを用いたフリート信頼度の求め方は，従来の安全率による設計手法に類似した簡便なものではあるが，真の信頼度Rとは異なるものであって，1つの近似式として取り扱われるべきものと考えられる。さらに，(3·34) 式における$\hat{\beta}_0$について考えれば，これは与えられたn個のデータt_{0i} ($i=1, 2, \cdots, n$) から求められた1つの推定値であるから，別のデータ組が与えられた場合には，$\hat{\beta}_0$の値もまた異なったもの

となるであろう。すなわち，（3•34）式で与えられる R' は確率変数的取り扱いを必要とするものであって，真のフリート信頼度 R の1つの推定量と考える方が妥当であると思われる。

4 新しいフリート信頼度の推定式

第3節での議論を鑑み，本節では，真のフリート信頼度 R を正しく推測すべき手法を，ワイブル形状母数 α が既知の場合ならびに両母数が未知の場合に分けて論じる。

4•1 形状母数 α が既知の場合

設計に要請される最小寿命を $t_1{}^*$，またフリート寸法を m とすれば，このフリートの満足すべき真の信頼度 R は前節（3•33）式から

$$R=\exp\left[-m\left(\frac{t_1{}^*}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{4•1}$$

で与えられる。今の場合，形状母数 α の値は既知であるから，寸法 n のランダム•サンプル T_{0i}（$i=1, 2, \cdots, n$）による尺度母数 β の最尤推定量（MLE）$\hat{B}$（(3•8)式）を用いて，新しく次式

$$\hat{R}=\exp\left[-m\left(\frac{t_1{}^*}{\hat{B}}\right)^{\alpha}\right] \tag{4•2}$$

によって真の R を推定することにする。すなわち上式の $\hat{R}$ が形状母数 α が既知の場合の R の推定量を与えるものである。簡単な変形により，$\hat{R}$ は

$$\begin{aligned}\hat{R} &=\exp\left[-m\left(\frac{\beta}{\hat{B}}\right)^{\alpha}\left(\frac{t_1{}^*}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\\ &=\left\{\exp\left[-m\left(\frac{t_1{}^*}{\beta}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{(\beta/\hat{B})^{\alpha}}\\ &= R^{1/V}\end{aligned} \tag{4•3}$$

と表される。ここに V は（3•18）式で定義される変量である。V の分布は理論的に（3•27）式によって与えられるから，R を規定すれば，（4•3）式から $\hat{R}$ の分布も理論的に求められることになるが，ここでは変量 V が母数によらない統

計量であって，標本寸法 n を与えれば（3•18）式を用いて簡単にシミュレートできるという特徴をもつことを利用して，モンテカルロ法によって $\hat{R}$ が真の R の回りにどのように分布するのかを調べることとした。すなわち，真の R をパラメータとして，$\hat{R}$ の期待値 $E[\hat{R}]$ と R の比，$E[\hat{R}]/R$，ならびに $\hat{R}$ の変動係数 $V_{\hat{R}}$ の挙動を詳しく観察することが可能である。

一方，Freudenthal によるフリート信頼度 R' に関しては，（3•32）式および（3•34）式において，β_0 を確率変数，すなわち尺度母数 β の最尤推定量 $\hat{B}_0$ として取り扱い，

$$R' = P\left[S \leq \left(\frac{\hat{B}_0}{t_1{}^*}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{(\hat{B}_0/t_1{}^*)^\alpha}{(m/n)+(\hat{B}_0/t_1{}^*)^\alpha}\right]^n \tag{4•4}$$

として再定義し，この推定量 R' の確率特性を求めることが可能である。このためには，まず（4•1）式から

$$\left(\frac{t_1{}^*}{\beta}\right)^\alpha = -(\ln R)/m \tag{4•5}$$

を求め，（4•4）式の右辺の分子，分母に $(t_1{}^*/\beta)^\alpha$ を乗じた後に（4•5）式を代入すれば，

$$R' = \left[\frac{(\hat{B}_0/\beta)^\alpha}{(\hat{B}_0/\beta)^\alpha-(\ln R)/n}\right]^n$$

$$= \left[\frac{Z^\alpha}{Z^\alpha-(\ln R)/n}\right] \tag{4•6}$$

ここに，Z は先の（3•15）式と同じく

$$Z = \hat{B}_0/\beta \tag{4•7}$$

で定義される確率変数であって，$\hat{B}_0$ の密度関数が（3•14式）と同様に

$$f_{\hat{B}_0}(\hat{\beta}) = \frac{\alpha n^n}{\beta\Gamma(n)}\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{\alpha n-1}\exp\left[-n\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^\alpha\right] \tag{4•8}$$

で与えられることを用いて，その密度関数は

$$f_Z(z) = \frac{\alpha n^n}{\Gamma(n)} z^{\alpha n-1}\exp\left[-nz^\alpha\right] \tag{4•9}$$

で与えられることがわかる。それゆえ，R' の確率特性を求めることができる。すなわち，例えば原点回りの k 次のモーメントは，

$$\mathrm{E}\left[(R')^k\right] = \int_0^\infty \left[\frac{nz^\alpha}{nz^\alpha - (\ln R)}\right]^{kn} f_Z(z)\, dz \tag{4·10}$$

として求めることができる。なお上式における $f_Z(z)$ は（4·9）式で与えられる Z の密度関数である。（4·10）式を用いて，E〔R'〕／R および R' の変動係数 $V_{R'}$ が真の R の回りにどのような挙動を示すかを調べることは容易である。

4・2 両母数が未知の場合

2母数ワイブル分布において形状母数 α および尺度母数 β がともに未知の場合には，それらの最尤推定量を $\hat{A}$, $\check{B}$ とすれば，これらは，先に（3・6）式に与えたと同様な次の尤度方程式を満足する。[19]

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\dfrac{T_{0i}}{\check{B}}\right)^{\hat{A}} - 1 \right\} \ln\left(\dfrac{T_{0i}}{\check{B}}\right) = \dfrac{n}{\hat{A}} & \text{(4·11—a)} \\ \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{T_{0i}}{\check{B}}\right)^{\hat{A}} = 1 & \text{(4·11—b)} \end{cases}$$

ここに，T_{0i} ($i=1, 2, \cdots, n$) はワイブル母集団からランダム・サンプリングによって得られた寸法 n のランダム・サンプルである。

次に，この場合における統計的 Scatter factor Q を（3·12）式の考え方を拡張して，

$$Q = \check{B}/T_1 \tag{4·12}$$

と定義することにする。T_1 はもちろんフリート寸法 m のフリートにおける最小寿命（TTFF）を表す。

ここで，Y_i, U および V_0 をそれぞれ

$$Y_i = \left(\frac{T_{0i}}{\beta}\right)^\alpha \tag{4·13}$$

$$U = \frac{\hat{A}}{\alpha} \tag{4·14}$$

$$V_0 = \left(\frac{\check{B}}{\beta}\right)^{\alpha} \tag{4・15}$$

と定義することによって，新しい確率変数 Y_i, U および V_0 を導入すれば，(4・11－a) および (4・11－b) 式は次式のように変形することができる。

$$\left\{\begin{array}{ll} V_0 = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i{}^{U}\right)^{1/U} & (4・16－a) \\ \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i{}^{U} \ln Y_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i{}^{U}} - \dfrac{1}{U} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i = 0 & (4・16－b) \end{array}\right.$$

既に述べたように，Y_i ($i=1, 2, \cdots, n$) は，平均値 1 の指数分布に従う確率変数であって，母数には依存しないから，(注6) (4・16－a) および (4・16－b) 式に明らかなように，U と V_0 もまた母数によらない統計量となることがわかる。それゆえ (4・16－a) および (4・16－b) 式を用いて，U と V_0 の結合確率分布を，モンテカルロ・シミュレーションによって求めることができる。すなわち，平均値 1 の指数乱数 Y_i を n 個発生させて，(4・16－a) および (4・16－b) 式を同時に満足する u と v_0 の値を求めれば，U と V_0 の実現値の組 (u, v_0) が 1 つ求まる。それゆえ，この手法をモンテカルロ寸法の M 回繰り返せば，U と V_0 の結合確率分布が求められるわけである。一方 Whittaker と Besuner[21] は同じくモンテカルロ法によって，

$$U^* = 1/U \tag{4・17}$$

$$V_0{}^* = V_0{}^U = \left(\frac{\check{B}}{\beta}\right)^{\hat{A}} \tag{4・18}$$

の経験分布を得ているが，本研究におけるシミュレーション結果 ($M=1999$) は，後述するように，彼らの結果と良い一致を示しており，本モンテカルロ手法の妥当性が示唆される。

(注6)　(3・21) 式および (3・22) 式を参照のこと。

さて，(4・12) 式から

$$Q^{\alpha}=\left(\frac{\check{B}}{T_1}\right)^{\alpha}=\left(\frac{\check{B}}{\beta}\right)^{\alpha}\Big/\left(\frac{T_1}{\beta}\right)^{\alpha}$$

$$=\frac{V_0}{W} \tag{4・19}$$

であるから

$$Q^*=Q^{\hat{A}}=\left(\frac{V_0}{W}\right)^{U} \tag{4・20}$$

となる。すなわち，Q^*の分布もまたシミュレーションによって，求められることがわかる。したがって次式で定義されるZ

$$Z=\log_{10}Q^*=U\log_{10}(V_0/W) \tag{4・21}$$

の分布もまたシミュレートされ，実用上はこのZの分布を用いる方が簡便である。(注7)

(4・4) 式の Freudenthal のフリート信頼度R'の定義式と同様な考え方から，両母数が未知の場合の Freudenthal の考え方に基づくフリート信頼度R''を

$$R''=\mathrm{P}\,[Q\leqq\check{B}/t_1^*]$$

$$=\mathrm{P}\left[Q^{\hat{A}}\leqq\left(\frac{\check{B}}{t_1^*}\right)^{\hat{A}}\right]$$

$$=\mathrm{P}\left[Z\leqq\log_{10}\left(\frac{\check{B}}{t_1^*}\right)^{\hat{A}}\right]$$

$$=F_Z\left[\log_{10}\left(\frac{\check{B}}{t_1^*}\right)^{\hat{A}}\right] \tag{4・22}$$

として定義する。ここに，$F_Z(z)$は (4・21) 式で定義される確率変数Zの分布関数であり，シミューレションによって求められるものである。しかるときは，(4・5) 式，(4・14) 式および (4・15) 式から

(注7)　(4・20) 式で定義されるQ^*は時として非常に大きな値をとりうるので，取り扱いの簡便を図るためQ^*の常用対数をとってZを用いることにした。

$$\left(\frac{\check{B}}{t_1{}^*}\right)^{\hat{A}}=\left\{\left(\frac{\check{B}}{t_1{}^*}\right)^{\alpha}\right\}^{\hat{A}/\alpha}$$

$$=\left\{\left(\frac{\check{B}}{\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{t_1{}^*}\right)^{\alpha}\right\}^{U}$$

$$=\left\{\frac{mV_0}{-\ln R}\right\}^{U}$$

$$=\left\{\frac{mV_0}{\ln(1/R)}\right\}^{U} \tag{4・23}$$

であるから，先の（4・22）式は，

$$R''=\mathrm{P}\left[Z\leqq U\log_{10}\left\{\frac{mV_0}{\ln(1/R)}\right\}\right]$$

$$=F_z\left[U\log_{10}\left\{\frac{mV_0}{\ln(1/R)}\right\}\right] \tag{4・24}$$

と表すことができ，U と V_0 の結合確率密度を f_{VU_0}（u，v_0）とすれば，期待値 $\mathrm{E}[(R'')^k]$（kは正の整数）が

$$\mathrm{E}\left[(R'')^k\right]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}F_Z^k\left[u\log_{10}\left\{\frac{mv_0}{\ln(1/R)}\right\}\right]$$

$$\times f_{UV_0}(u,v_0)\,du\,dv_0 \tag{4・25}$$

として求められる。それゆえ $\mathrm{E}[R'']/R$ および変動係数 $V_{R''}$ が計算できて，R'' の確率挙動をシミュレートすることができる。

上述のフリート信頼度 R'' は Freudenthal の考え方の拡張によるものであった。しかしながら先に述べたように，Frendenthal のフリート信頼度 R' が真の信頼度 R と厳密には相異なるものである以上，その拡張概念もまた理論的なものという批判に耐え得ないものと思料される。それゆえ，本研究においては α および β の最尤推定量 $\hat{A}$，$\check{\mathrm{B}}$ を用いて，新たなフリート信頼度の推定量として，

$$\check{R}=\exp\left[-m\left(\frac{t_1{}^*}{\check{B}}\right)^{\hat{A}}\right] \tag{4・26}$$

を構築することとした。これすなわち，先の $\hat{R}$ の拡張概念である。しかるときは，（4・23）式を用いて

$$\check{R}=\exp\left[-m\left\{\frac{\ln(1/R)}{mV_0}\right\}^U\right] \tag{4·27}$$

と書き表すことができるので，新たな推定量 $\check{R}$ の確率構造のシミュレーションが可能である。換言すれば，E〔$\check{R}$〕／R および変動係数 $V_{\check{R}}$ が求められることとなって，推定量 R'' ならびに $\check{R}$ の両者の得失を論じることができる。

5　シミュレーション手法の概略

本研究におけるシミュレーション手法の概略をフロー・チャートの形でFig. 5およびFig. 6に示した。Fig. 5は形状母数 α が既知の場合に対するもので

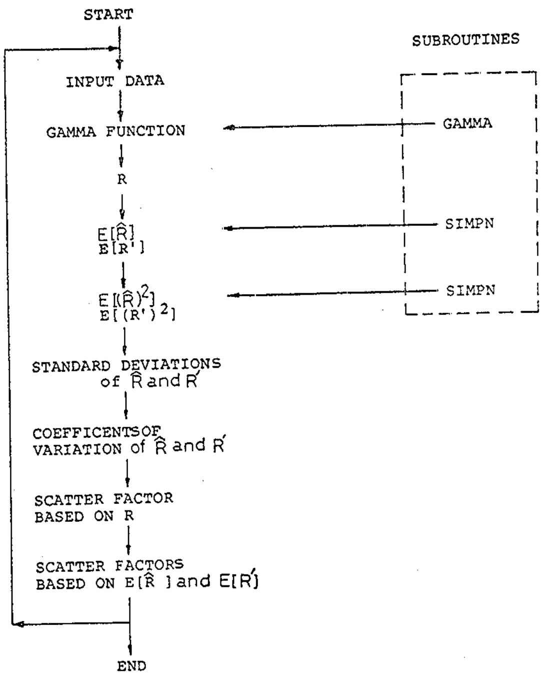

Fig. 5.　Simplified flow chart of the current simulation program when Weibull shape parameter is assumed to be known.

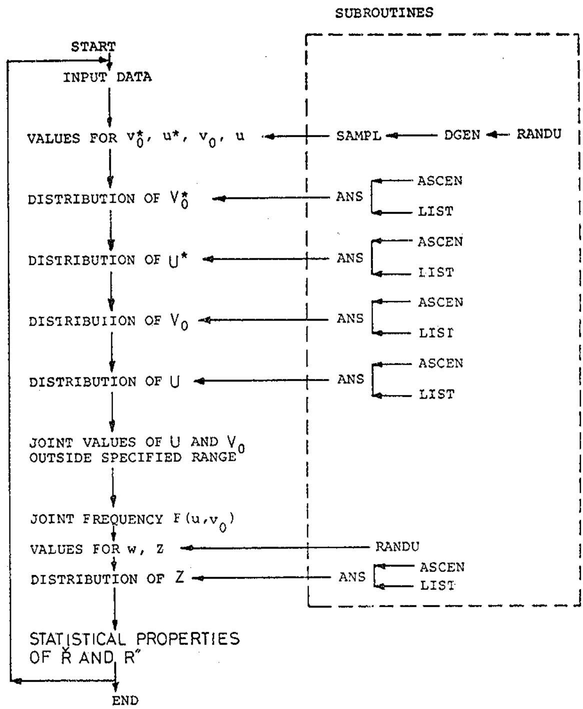

Fig. 6. Simplified flow chart of the current simulation program when both Weibull shape and scale parameters are assumed to be unknown.

あって，既知の α，標本寸法 n ならびに真のフリート信頼度 R を，それぞれ，

$$\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$$

$$R=0.5,\ 0.6,\ \cdots,0.9,\ 0.99,\ 0.995,\ 0.999,\ 0.9999$$

と変化させ，その各々の組合せの場合に第4・1節に述べたような方法で推定量 $\hat{R}$ ならびに R' の統計的性質をシミュレートし，さらにフリート寸法 m を

$$m=1,\ 3,\ 5,\ 10,\ 25,\ 100,\ 250,\ 1000$$

と変えた場合に，$\hat{R}$ と R' の期待値 E〔$\hat{R}$〕およびE〔R'〕を用いて (3･13)

式から

$$\mathrm{E}\,[\hat{R}]\ (\text{または}\ \mathrm{E}\,[R'])=\left[\frac{s^{\alpha}}{(m/n)+s^{\alpha}}\right]^{n} \tag{5•1}$$

を満足するsの値としして Scatter Factor の値を逆算して参考に供した。なおFig. 5において，GAMMA およびSIMPN とは，それぞれ，ガンマ関数を求めるサブルーチン，およびシンプソン公式による面積算出のサブルーチンである。

一方，Fig. 6は両母数が未知の場合に対するものである。この場合にはまず標本寸法

$n=2$，3，5，10，20

の各々に対して，まずV_0^*, U^*, V_0，Uの分布ならびにUとV_0の結合確率分布をシミュレートし，フリート寸法

$m=1$，3，5，10，25，100，200，1000

に対するWとZの分布（(3•28) 式および（4•21）式）を求め，真のフリート信頼度

$R=0.5, 0.6, \cdots, 0.9, 0.99, 0.995, 0.999, 0.9999$

に対して推定量$\check{R}$とR''の統計的性質をシミュレートした。図中，RANDU，DGEN，SAMPL とは，それぞれ，一様擬乱数発生，指数乱数発生および寸法nの指数乱数標本から（4•16−aおよびb）式の尤度方程式を解いて解（u, v_0）を求めるサブルーチンであり，またASCENは小さな値から順番にデータを並べる順序付けサブルーチン，LISTは表示のためのサブルーチンである。

なお，UとV_0の結合確率分布を求める手法は以下のように略述することができる。[18] すなわち，

（i）　まず標本寸法nを正の整数として与える。

(ii)　平均値1の指数分布に従う乱数y_i（$i=1, 2, \cdots, n$）をそれぞれ独立にn個発生させる。

(iii)　(ii) の標本を用いて（4•16−b）式をまずUについて解く。これには，まずUの初期値U_0（小さな値に選ぶ）をあらかじめ与えておき，

$$\Psi=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i{}^U \ln y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i{}^U}-\frac{1}{U}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\ln y_i \tag{5・2}$$

を$U=U_0$として計算する。$|\Psi|$の値が零に近いあらかじめ与えておいた分解精度C_0（$\geqq 0$）より小さければ次の（v）に進む。$|\Psi|>C_0$ならば次の(iv)へ進む。

(iv)　分割幅ΔU（これはUの分解能を表わす）をあらかじめ与えておき，Uの値を$1\cdot\Delta U$だけ大きくして，すなわち$U=U_0+\Delta U$として再び（5・2）式を計算し，$|\Psi|\leqq C_0$なら（v）へ，$|\Psi|>C_0$なら再びUの値を$1\cdot\Delta U$だけ大きくし，$U=U_0+2\Delta U$として（5・2)式を計算し，$|\Psi|\leqq C_0$なら（v）へ，さもなくばさらにUの値をΔUだけ大きくする。このような手法を繰り返し，$|\Psi|\leqq C_0$が満足されるまで続ける。これが満足されれば，そのときの値を$U=U_c$として次の（v）へ進む。

(v)　(iv)で得た$U=U_c$を用いて（4・16—a）式を計算し，$V=V_c$を求める。この操作が完了されてはじめて（ii）で得たn個のデータに対してただ1つのUおよびVの組（U_c ,V_c）が求まる。

(vi)　(ii)～(v)の操作をモンテカルロ寸法だけ，すなわちM回だけ繰り返して行い，（U，V）の寸法Mの標本を得る。ただしn個の指数乱数よりなる各々のデータ・グループはそれぞれ独立であるよう注意しなければならない。Mの値は独立な指数乱数を構成する基となる一様擬乱数の繰り返し周期に付随した精度まで充分大きくなしうるが，今の場合には$M=1999$とした。UおよびVの経験分布を求めるには毎回求められたUおよびV各々の大きさを判別して，M回繰り返したときのある判別区間内の総数がm_Uおよびm_Vだったとすれば，その判別区間での頻度はそれぞれm_U/Mおよびm_V/Mであるとする，いわゆるモンテカルロ法の考え方に従えばよい。

次に，（0 ,1）の一様擬乱数Xを用いて平均値1の指数乱数Yを得る方法について述べる。平均値1の指数乱数Yの密度関数$f_Y(y)$ならびに分布関数

$F_Y(y)$ は

$$f_Y(y)=\exp(-y) \tag{5・3}$$

$$F_Y(y)=1-\exp(-y) \tag{5・4}$$

で与えられる。ところで分布関数 $F_Y(y)$ の値域は $0 \leqq F_Y(y) \leqq 1$ であるところから，この $F_Y(y)$ の値として

$$\left.\begin{array}{l} f_X(x)=1,\ 0\leqq x\leqq 1 \\ f_X(x)=0,\ \text{その他} \end{array}\right\} \tag{5・5}$$

として表される密度関数をもつ（0，1）の一様擬乱数 X を与えて，対応する Y を求めれば，この Y が指数分布に従うという逆関数法を用いる。（5・4）式を y について解けば

$$y=-\ln\{1-F_Y(y)\} \tag{5・6}$$

（5・6）式において $F_Y(y)$ の代わりに一様擬乱数 X を用いるとすれば，

$$Y=-\ln(1-X) \tag{5.7}$$

X は（0,1）の一様擬乱数であるから（$1-X$）もまた（0,1）の一様擬乱数となる。したがって（$1-X$）の代わりに単に X を用いてもよく，（5・7）式は

$$Y=-\ln X \tag{5・8}$$

とも表しうる。すなわち，発生させた（0，1）の一様擬乱数の自然対数をとり，その符号を逆にしたものが求める平均値1の指数乱数を与える。

この方法によって得た Y が指数乱数に従うことは次のようにして確認される。すなわち（0，1）の一様擬乱数 X の密度関数は（5・5）式で与えられるから（5・8）式の変換によって得られる Y の密度関数 $f_Y(y)$ は

$$f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dy}{dx}\right|^{-1}=x=\exp(-y)$$

となって，確かに（3・21）式と完全に一致し，これは Y が平均値1の指数分布に従うことを表している。

6 結果ならびにその考察

本節においては，本研究の結果を形状母数αが既知の場合と未知の場合とに分けて論じる。

6・1 形状母数αが既知の場合

本研究では，標本寸法n，既知とみなした形状母数α，真のフリート信頼度Rならびにフリート寸法mの種々の組合せ条件下において，Freudenthalの考え方に基づくRの推定量R'ならびに新たに提案した推定量$\hat{R}$の統計的性質を明らかとし，両者の得失を論じた。そのうちの典型的な例として，$n=1,5$および10の場合を選んで図示したのがFig. 7～Fig. 12である。すなわち，Fig. 7

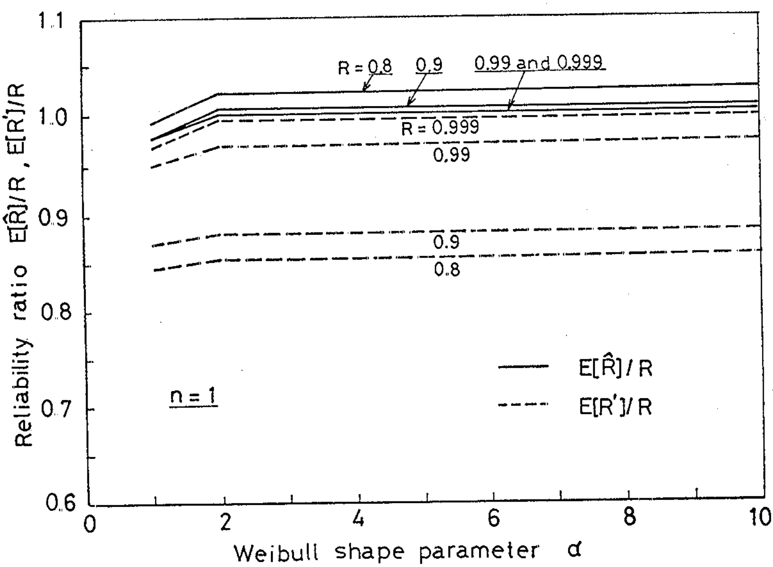

Fig. 7. E[$\hat{R}$]/R and E[R']/R as a function of Weibull shape α (n=1).

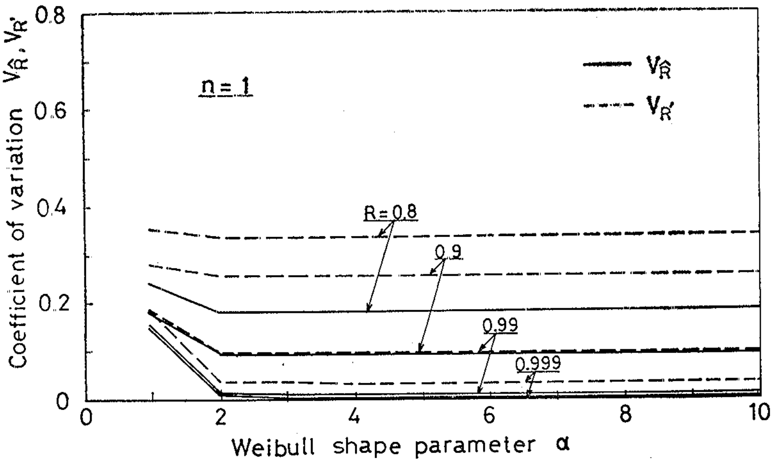

Fig. 8. $V_{\hat{R}}$ and $V_{\hat{R}'}$ as a function of Weibull shape α ($n=1$).

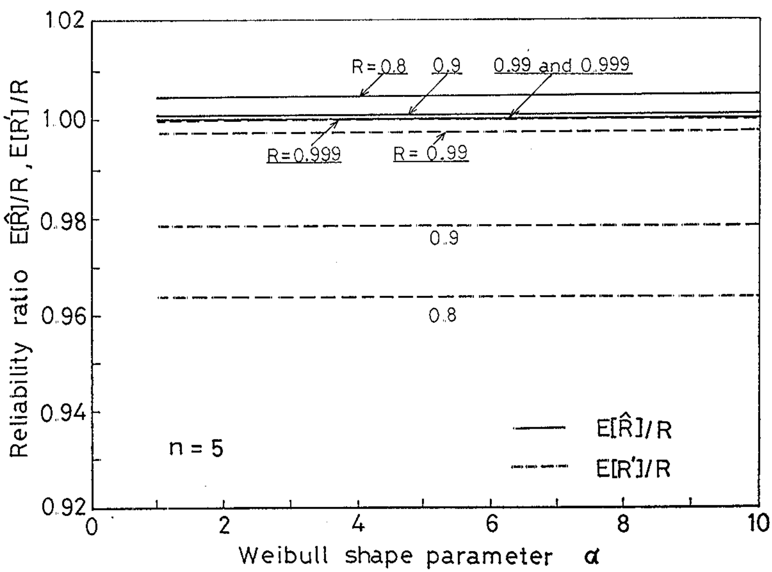

Fig. 9. E[$\hat{R}$]/R and E[R']/R as a function of Weibull shape α ($n=5$).

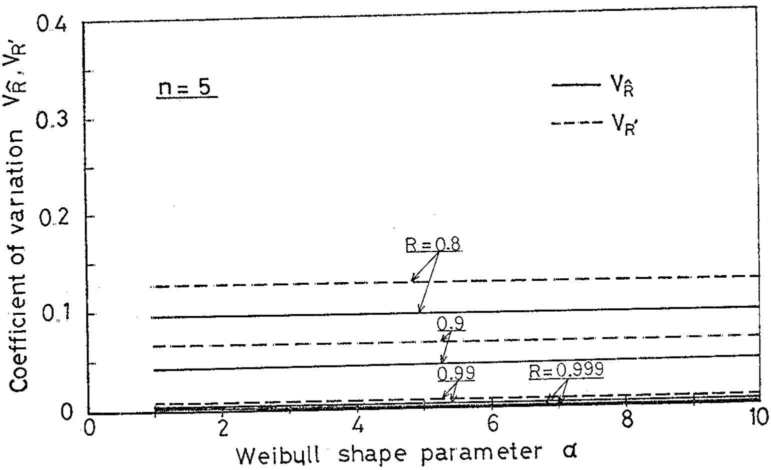

Fig.10. $V_{\hat{R}}$ and $V_{R'}$ as a function of Weibull shape α (n=5).

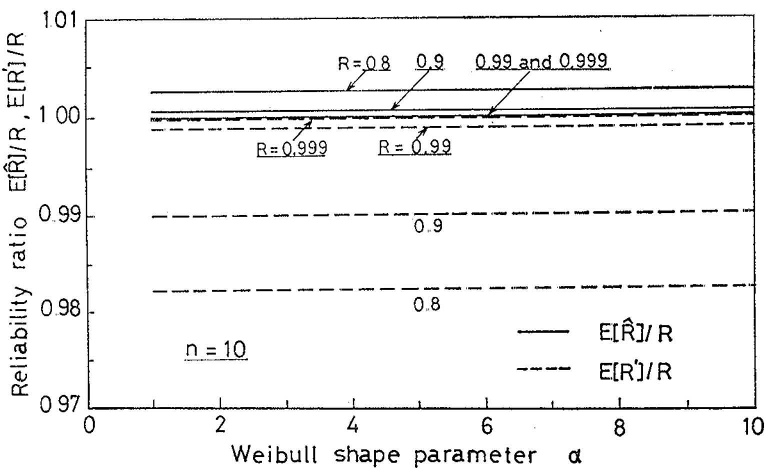

Fig.11. E〔$\hat{R}$〕/R and E〔R'〕/R as a function of Weibull shape α (n=10).

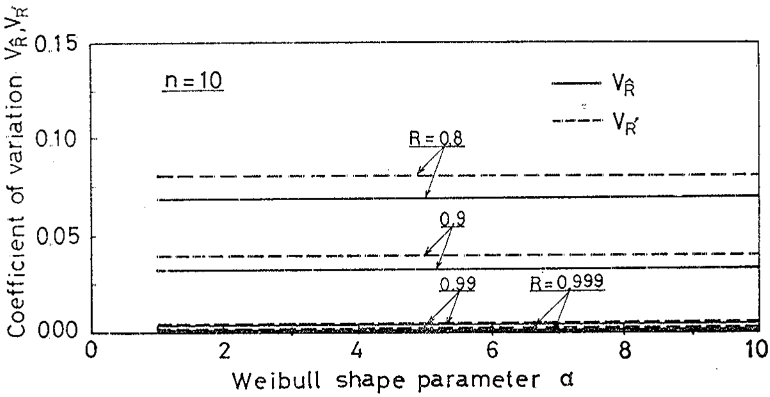

Fig.12.　$V_{\hat{R}}$ and $V_{R'}$ as a function of Weibull shape α ($n=10$).

およびFig. 8 は$n=1$の場合に対する推定量の期待値および変動係数が形状母数αの値に応じてどのように挙動するかを，真の信頼度レベルRの値をパラメータとして図示したものであり，Fig. 9 およびFig. 10は$n=5$に，またFig. 11およびFig. 12は$n=10$に対する同様な挙動を示したものである。いずれの図においても実線が新たに提案した$\hat{R}$に関するものであり，破線がFreudenthalの考え方に基づくR'に関するものである。また期待値は真の値Rとの比較という意味で比の形，E〔$\hat{R}$〕／RおよびE〔R'〕／Rを用いてある。図に明らかなように，推定量R'に関しては形状母数αの値が大きくなると，信頼度比E〔R'〕／Rの値も若干大きくなって，より1に近づき，換言すれば偏り(bias)が小さくなるが，$\alpha\geqq 2$ではほぼ一定値となり，しかもこの一定値は，信頼度レベルRの値に応じて異なる。また同じ信頼度レベルRに対してはnが大きくなるほどE〔R'〕／Rの値は1に近づき，偏りが小さくなる。しかしながら変動係数$V_{R'}$の値は総体的に大きい。一方推定量$\hat{R}$に関しては，R'の場合とは異なり，ほとんどの場合に比E〔$\hat{R}$〕／Rは1に極めて近い値を示しており，ほぼ不偏性を有することが観察される。またE〔$\hat{R}$〕／Rは形状母数αの影響をほとんど受けない。標本寸法nが大きくなった場合には，この傾向はさらに強くなる。しかも変動係数を図示したFig. 8（$n=1$），Fig. 10（$n=5$）および

Fig.12 ($n=10$) のいずれを見ても明らかなように，いずれの場合にも $\hat{R}$ の変動性は R' の変動性に比べて相対的に極めて小さい。とくに標本寸法 n が小さい場合においてもこの事実が観察されることは，推定量 $\hat{R}$ の方が R' に比べてその統計的性質が非常に優れていることを示唆するものといえよう。

標本寸法 n，形状母数 α およびフリート信頼度レベル R の適当な組合わせに対して，$\hat{R}$ ならびに R' の統計的性質に関するシミュレーション結果を実用上有用と思われる範囲で選択して一覧表にしたのが Table 1 ($n=1$)，Table 2 ($n=5$) および Table 3 ($n=10$) である。 表中，（ ）内に示した数値が Freudenthal の考え方に基づく R' に関する結果に対応する。なお，参考のため種々のフリート寸法 m の値に対して，(5・1) 式で求めた Scatter Factor の値をも付記しておいた。

Table 1. Values of $E[\hat{R}]$, $E[\hat{R}]/R$, $V_{\hat{R}}$ and scatter factor S for selected values of R and α ($n=1$).
(Corresponding values for R' are listed in the parentheses.)

R	α	$E[\hat{R}]$($E[R']$)	$E[\hat{R}]/R$ ($E[R']/R$)	$V_{\hat{R}}$ ($V_{R'}$)	$S_{\hat{R}}$ ($S_{R'}$) $m=1$	$m=5$	$m=25$
0.5	2	0.591(0.475)	1.181(0.950)	0.449(0.488)	1.20(0.95)	2.69(2.13)	6.00(4.76)
	3	0.591(0.475)	1.181(0.950)	0.449(0.488)	1.13(0.97)	1.93(1.65)	3.30(2.83)
	4	0.591(0.475)	1.181(0.950)	0.449(0.488)	1.10(0.98)	1.64(1.46)	2.45(2.18)
	5	0.591(0.475)	1.181(0.950)	0.449(0.488)	1.08(0.98)	1.48(1.35)	2.05(1.87)
0.9	2	0.905(0.792)	1.005(0.880)	0.096(0.253)	3.08(1.95)	6.88(4.36)	15.4(9.76)
	3	0.905(0.792)	1.005(0.880)	0.096(0.253)	2.12(1.56)	3.62(2.67)	6.19(4.57)
	4	0.905(0.792)	1.005(0.880)	0.096(0.253)	1.76(1.40)	2.62(2.09)	3.92(3.12)
	5	0.905(0.792)	1.005(0.880)	0.096(0.253)	1.57(1.31)	2.16(1.80)	2.99(2.49)
0.99	2	0.990(0.959)	1.000(0.969)	0.014(0.093)	9.92(4.84)	22.2(10.8)	49.6(24.2)
	3	0.990(0.959)	1.000(0.969)	0.010(0.093)	4.63(2.86)	7.92(4.89)	13.5(8.37)
	4	0.990(0.959)	1.000(0.969)	0.010(0.093)	3.16(2.20)	4.72(3.29)	7.06(4.92)
	5	0.990(0.959)	1.000(0.969)	0.010(0.093)	2.51(1.88)	3.46(2.59)	4.78(3.58)

Table 2. Values of E[$\hat{R}$], E[$\hat{R}$]/R, $V_{\hat{R}}$ and scatter factor S for selected values of R and α (n=5).
(Corresponding values for R' are listed in the parentheses.)

R	α	E[$\hat{R}$](E[R'])	E[$\hat{R}$]/R (E[R']/R)	$V_{\hat{R}}$ ($V_{R'}$)	$S_{\hat{R}}$ ($S_{R'}$) m=1	m=5	m=25
0.5	2	0.523(0.485)	1.045(0.970)	0.278(0.296)	1.20(1.13)	2.69(2.53)	6.01(5.67)
	3	0.523(0.485)	1.045(0.970)	0.278(0.296)	1.13(1.09)	1.93(1.86)	3.30(3.18)
	4	0.523(0.485)	1.045(0.970)	0.278(0.296)	1.11(1.06)	1.64(1.59)	2.45(2.38)
	5	0.523(0.485)	1.045(0.970)	0.278(0.296)	1.08(1.05)	1.48(1.45)	2.05(2.00)
0.9	2	0.901(0.881)	1.001(0.979)	0.046(0.066)	3.08(2.79)	6.89(6.23)	15.40(13.90)
	3	0.901(0.881)	1.001(0.979)	0.046(0.066)	2.12(1.98)	3.62(3.39)	6.19(5.79)
	4	0.901(0.881)	1.001(0.979)	0.046(0.066)	1.76(1.67)	2.62(2.50)	3.92(3.73)
	5	0.901(0.881)	1.001(0.979)	0.046(0.066)	1.57(1.51)	2.16(2.08)	2.99(2.87)
0.99	2	0.990(0.988)	1.000(0.998)	0.005(0.007)	9.98(8.93)	22.31(20.00)	49.88(44.70)
	3	0.990(0.988)	1.000(0.998)	0.005(0.007)	4.63(4.31)	7.92(7.36)	13.55(12.60)
	4	0.990(0.988)	1.000(0.998)	0.004(0.007)	3.16(2.99)	4.72(4.47)	7.06(6.68)
	5	0.990(0.988)	1.000(0.998)	0.005(0.007)	2.51(2.40)	3.46(3.31)	4.78(4.57)

Table 3. Values of E[$\hat{R}$], E[$\hat{R}$]/R, $V_{\hat{R}}$ and scatter factor S for selected values of R and α (n=10).

R	α	E[$\hat{R}$](E[R'])	E[$\hat{R}$]/R (E[R']/R)	$V_{\hat{R}}$ ($V_{R'}$)	$S_{\hat{R}}$ ($S_{R'}$) m=1	m=5	m=25
0.5	2	0.512(0.491)	1.023(0.982)	0.207(0.216)	1.20(1.16)	2.69(2.60)	6.01(5.82)
	3	0.512(0.491)	1.023(0.982)	0.207(0.216)	1.13(1.11)	1.93(1.89)	3.30(3.24)
	4	0.512(0.491)	1.023(0.982)	0.207(0.216)	1.10(1.08)	1.64(1.61)	2.45(2.41)
	5	0.512(0.491)	1.023(0.982)	0.207(0.216)	1.08(1.06)	1.48(1.47)	2.05(2.02)
0.9	2	0.900(0.891)	1.001(0.990)	0.033(0.040)	3.08(2.93)	6.89(6.56)	15.40(14.70)
	3	0.901(0.891)	1.001(0.990)	0.033(0.040)	2.12(2.05)	3.62(3.50)	6.19(5.99)
	4	0.901(0.891)	1.001(0.990)	0.033(0.040)	1.76(1.71)	2.62(2.56)	3.92(3.83)
	5	0.900(0.891)	1.001(0.990)	0.033(0.040)	1.57(1.54)	2.16(2.12)	2.99(2.93)
0.99	2	0.990(0.989)	1.000(0.999)	0.003(0.004)	9.97(9.47)	22.30(21.20)	49.87(47.30)
	3	0.990(0.989)	1.000(0.999)	0.003(0.004)	4.63(4.47)	7.92(7.65)	13.55(13.10)
	4	0.990(0.989)	1.000(0.999)	0.003(0.004)	3.16(3.08)	4.72(4.60)	7.06(6.88)
	5	0.990(0.989)	1.000(0.999)	0.003(0.004)	2.51(2.46)	3.46(3.39)	4.78(4.68)

6・2　両母数α, βがともに未知の場合

初めに，真のフリート信頼度Rの推定量$\check{R}$ならびにR''の統計的性質をシミュレートする前提として，第4節（4・17）式および（4・18）式に与えたU^*ならびに$V_0{}^*$の確率分布のモンテカルロ・シミュレーション結果を種々の標本寸法nの場合についてFig. 13およびFig. 14に示した。幸い，このU^*ならびに$V_0{}^*$の確率分布に関してはWhittakerとBesunarによってもシミュレーション結果が与えられているが，[21] Fig. 13およびFig. 14の結果は彼らの結果と非常によい一致を見せており，本研究におけるシミュレーション手法の妥当性ならびにその精度に関して有力な示唆を与えるものと考えられる。

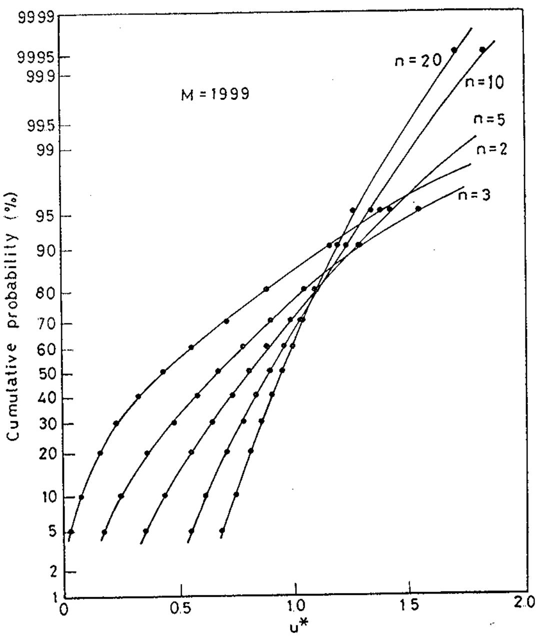

Fig. 13.　Empirical distribution of U^*.

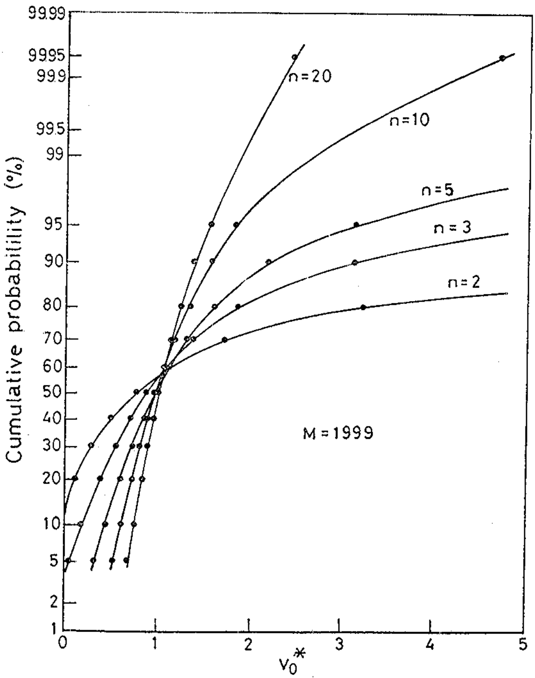

Fig.14.　Empirical distribution of V_0*.

さて，推定量 R'' の確率特性を解明するためには（4•21）式に与えた統計量 Z の分布関数 $Fz\,(z)$ が不可欠である。それゆえ，本研究でシミュレートした $Fz\,(z)$の数例を，標本寸法 n をパラメータとして，Fig.15(フリート寸法$m=1$ の場合），Fig.16（$m=5$）および Fig.17（$m=25$）に示した。また，Fig.18 は同じく Z の分布関数 $Fz(z)$を標本寸法 $n=3$ の場合に対して，今度はフリート寸法 mをパラメータとして表示したものである。このようにして確立された Z の経験分布を用いて，例えば（4•25）式によって推定量 R'' の統計的性質を明らかとすることができる。

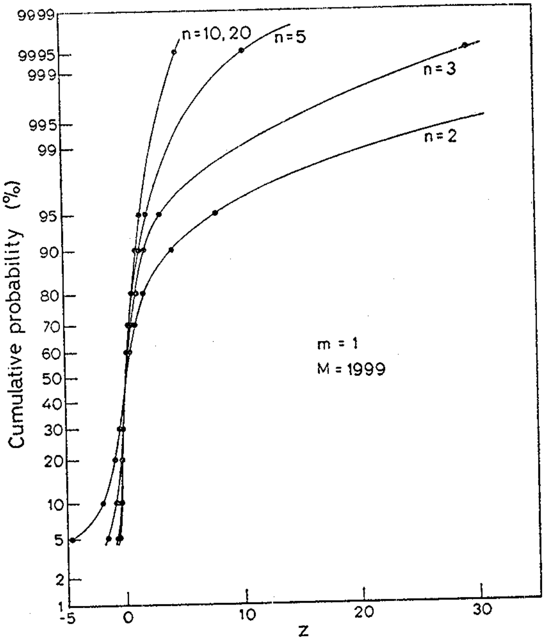

Fig.15. Empirical distribution of Z.

($m=1$; n is varied.)

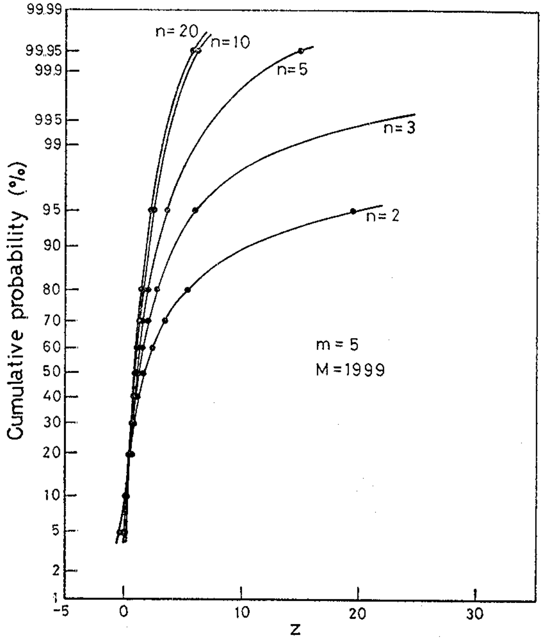

Fig.16. Empirical distribution of Z.

($m=5$; n is varied.)

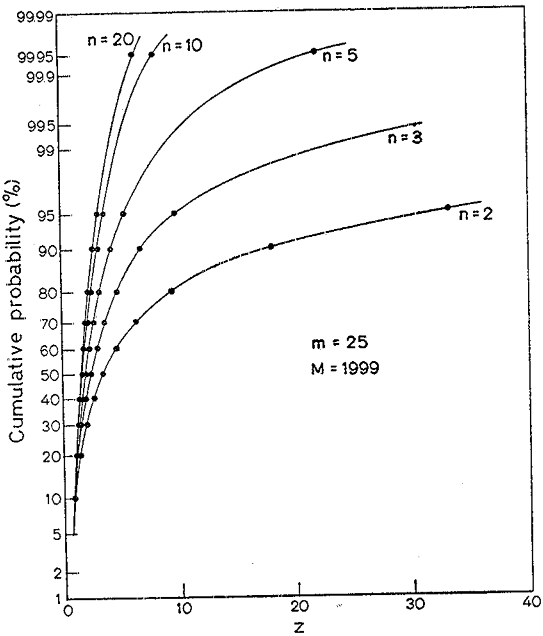

Fig.17. Empirical distribution of Z (m=25; n is varied.).

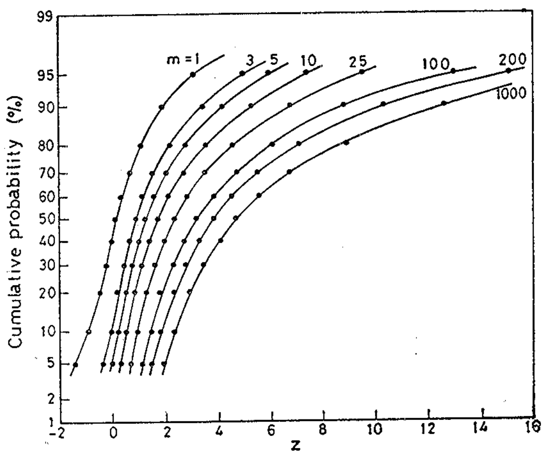

Fig.18. Empirical distribution of Z (n=3; m is varied.).

次に Fig.19は (4•14) および (4•15) 式に定義したUおよびV_0の結合確率分布を (4•16—aおよび b) 式の尤度方程式を解くことによって求めたシミュレーション結果を与える2次元度数分布表の一例 ($n=5$) を示したものである。同図の結果を用いて U および V_0それぞれの周辺分布 (marginal distribution) を求めることも容易である。

Fig.19. Two-dimensional frequency table of U and V_0 (n=5).

u \ v_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	12	74	136	142	111	48	32	10	3	0	2	0	0	0	0	0
3	5	50	156	180	158	95	66	31	11	9	4	3	0	1	1	0
4	4	18	61	61	72	52	38	25	10	9	3	1	2	0	0	0
5	1	7	26	29	36	23	10	11	1	2	2	1	0	0	0	0
6	1	4	11	14	15	8	10	5	2	0	1	0	0	0	0	0
7	0	3	4	4	8	3	2	4	0	2	0	0	0	0	0	0
8	0	2	2	9	4	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	1	2	1	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	2	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Notes : For v_0, Interval 1=0∼0.25, Interval 2=0.25∼0.50, etc.
For u, Interval 1=0∼0.50, Interval 2=0.50∼1.0, etc.

両母数α, βが未知の場合のフリート信頼度Rの推定量$\check{R}$ならびにR''の統計的性質として期待値, E〔$\check{R}$〕およびE〔R''〕, ならびに変動係数, $V_{\check{R}}$および$V_{R''}$の挙動を観察しよう。Fig.20は, 標本寸法$n=2$の場合に対して, 期待値と真の信頼度Rとの比, すなわち信頼度比ならびに変動係数が真の信頼度レ

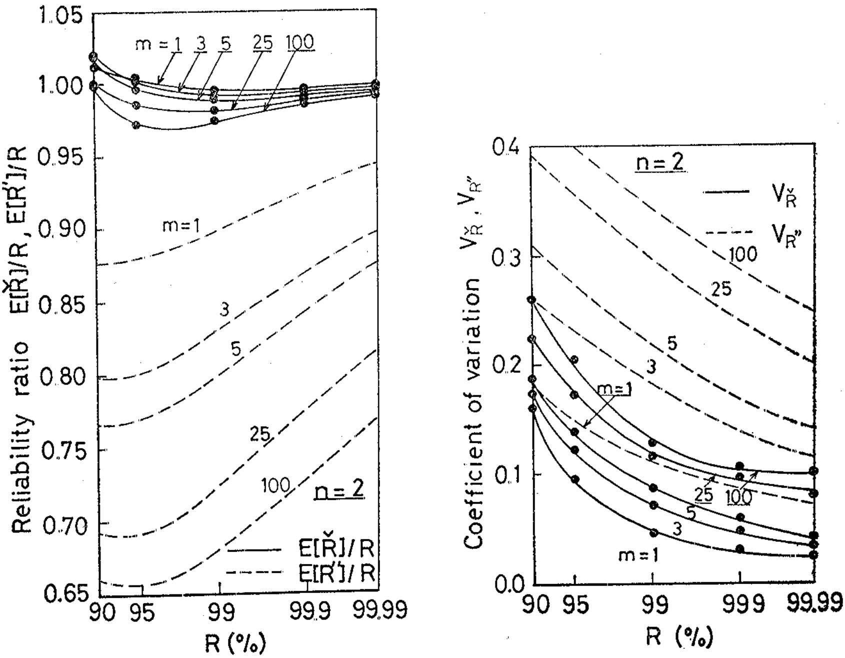

Fig.20.　E〔$\check{R}$〕/R (E〔R''〕/R) and $V_{\check{R}}$($V_{R''}$) as a function of R (n=2).

ベル R に対してどのような関係にあるかを示したものである。形状母数 α が既知の場合と同じく，ここでも実線が推定量 $\check{R}$ に関するものであり，また破線が R'' に対するものである。同様な関係を，Fig.21 (n=3)，Fig.22 (n=5)，Fig.23 (n=10) およびFig.24 (n=20) にも図示した。これらの図によって観察されるように，信頼度比は $\check{R}$, R'' のいずれの場合にも，概して n と R が大きくなれば増加し，一方，フリート寸法 m が大きくなれば減少する傾向をもっていることがわかる。しかしながら，E〔$\check{R}$〕の方がE〔R''〕に比べて真の値 R に非常に近い (E〔R〕／R の値が1に近い) ということが明らかであり，フリート信頼度 R の推定量としては $\check{R}$ の方が R'' よりもその統計的性質が優れていることが示唆される。このことはまた変動係数の挙動をみればもっと明確とな

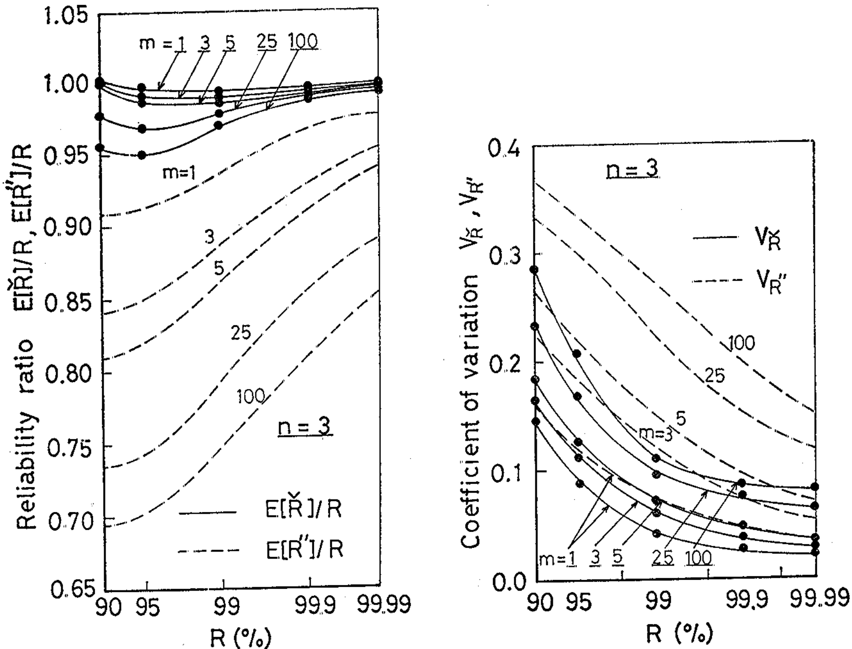

Fig.21. $E[\check{R}]/R$ ($E[R'']/R$) and $V_{\check{R}}$ ($V_{R''}$) as a function of R (n=3).

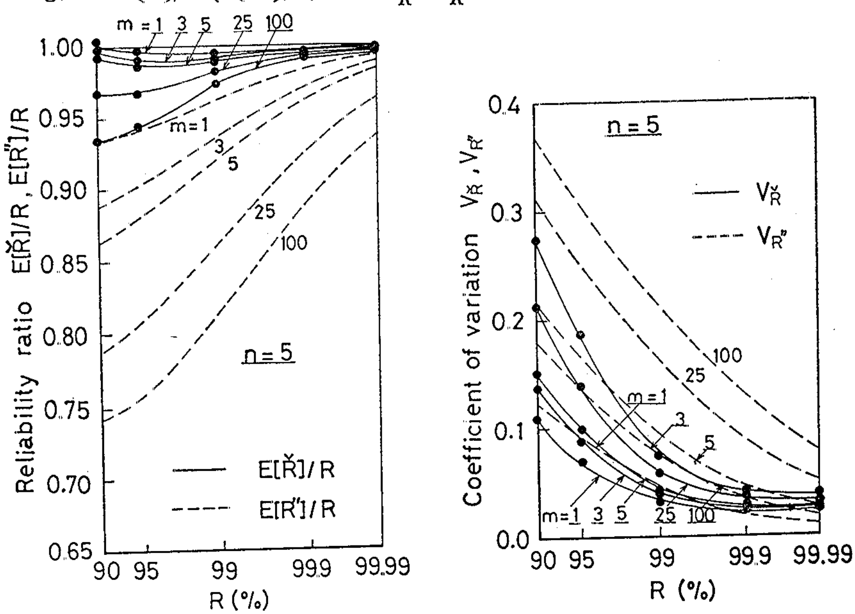

Fig.22. $E[\check{R}]/R$ ($E[R'']/R$) and $V_{\check{R}}$ ($V_{R''}$) as a function of R (n=5).

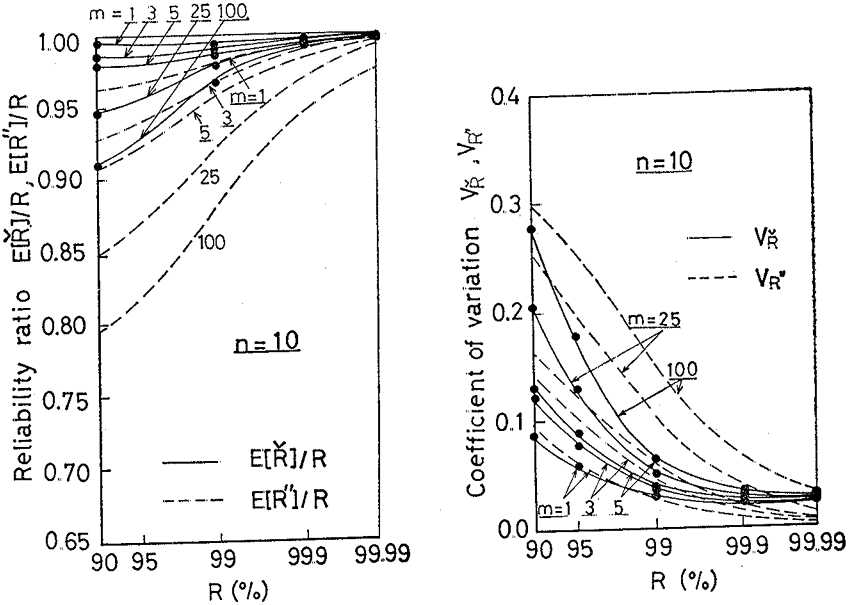

Fig.23. $E[\check{R}]/R$ $(E[R'']/R)$ and $V_{\check{R}}(V_{R''})$ as a function of R (n=10).

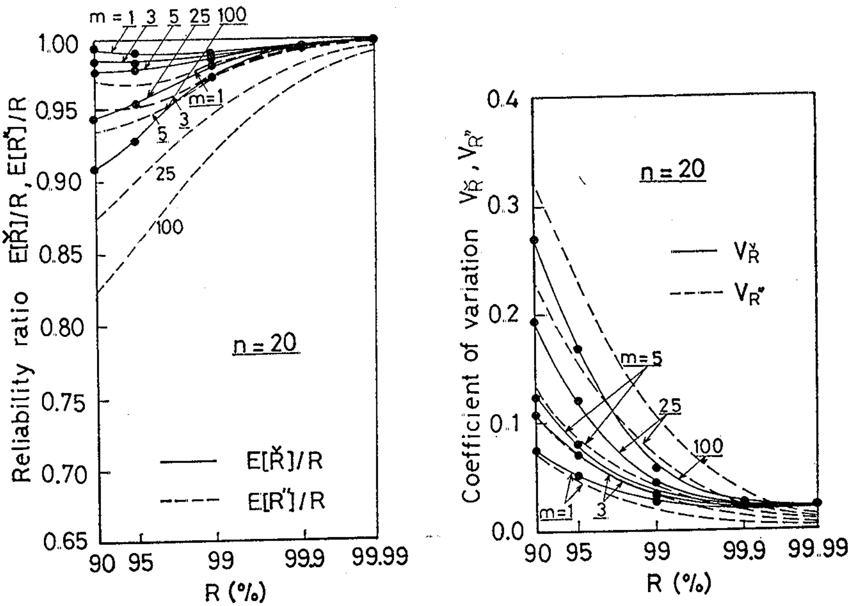

Fig.24. $E[\check{R}]/R$ $(E[R'']/R)$ and $V_{\check{R}}(V_{R''})$ as a function of R (n=20).

る。すなわち，いずれの標本寸法nに対しても，$V_{\check{R}}$ の方が$V_{R''}$に比べて非常に小さな値となっている。とくに$n=2$という標本寸法の極めて小さい場合においてすら，$V_{\check{R}}$の値は$R>0.9$に対して，フリート寸法mの値にかかわらず，ほぼ20%以下となっており，このことは利用可能なデータ数が限られている場合が一般的であるという工学的現状を勘案したとき，$\check{R}$を用いてフリート信頼度Rの推定を行うことが極めて有用であるという重要な事実を示唆するものと考えられる。すなわち，標本寸法nの小さいデータ組t_{0i} ($i=1, 2, \cdots, n$) を用いて，(4・11—aおよびb) 式の尤度方程式を解いて得られるαおよびβの最尤推定値をそれぞれ$\hat{\alpha}_0$および$\check{\beta}_0$とするとき，これらの値は次式を満足する。(注8)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\dfrac{t_{0i}}{\check{\beta}_0}\right)^{\hat{\alpha}_0}-1\right\}\ln\left(\dfrac{t_{0i}}{\check{\beta}_0}\right)=\dfrac{n}{\hat{\alpha}_0} & (6\cdot1)\\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{t_{0i}}{\hat{\beta}_0}\right)^{\hat{\alpha}_0}=1 & (6\cdot2)\end{cases}$$

そこで，この$\hat{\alpha}_0$ならびに$\check{\beta}_0$の値を用いて (4・26) 式，つまり

$$\check{R}_0=\exp\left[-m\left(\frac{t_1{}^*}{\check{\beta}_0}\right)^{\hat{\alpha}_0}\right] \qquad (6\cdot3)$$

によって$\check{R}_0$を求めれば，これが近似的に真の値Rを代表するものと考えることができるといえよう。

なお，$\check{R}$ならびにR''の統計的性質のシミュレーション結果を信頼度レベルRならびにフリート寸法mの種々の値に対して適宜選択して一覧表としたのがTable 4 (標本寸法$n=2$)，Table 5 ($n=3$)，Table 6 ($n=5$)，Table 7 ($n=10$) および Table 8 ($n=20$) である。これら諸表中に与えた特定のn, mおよびRの組合わせに対しては，例えばE〔$\check{R}$〕／Rを偏り係数 (bias factor)

(注8)　(4・11—aおよびb) の両式において，T_{0i}，$\hat{A}$および$\check{B}$をそれぞれの実現値t_{0i}，$\hat{\alpha}_0$および$\check{\beta}_0$と置き換えた式を考えればよい。

Table 4. Values of $E[\check{R}]$, $E[\check{R}]/R$, $V_{\check{R}}$ and Q^* for selected values of R and m $(n=2)$.
(Corresponding values for R'' are listed in the parentheses.)

R	m	$E[\check{R}]$	$(E[R''])$	$E[\check{R}]/R$	$(E[R'']/R)$	$V_{\check{R}}$	$(V_{R''})$	Q^*
0.9	1	0.912	(0.789)	1.013	(0.876)	0.166	(0.184)	5.46×10
	3	0.920	(0.720)	1.022	(0.799)	0.175	(0.262)	6.08×10^2
	5	0.918	(0.690)	1.020	(0.767)	0.188	(0.300)	1.90×10^3
	25	0.908	(0.624)	1.009	(0.693)	0.228	(0.392)	7.72×10^4
	100	0.896	(0.594)	0.996	(0.660)	0.264	(0.435)	2.07×10^6
0.95	1	0.956	(0.835)	1.006	(0.879)	0.096	(0.144)	2.07×10^2
	3	0.951	(0.760)	1.001	(0.800)	0.124	(0.223)	1.83×10^3
	5	0.948	(0.730)	0.998	(0.768)	0.139	(0.260)	5.73×10^3
	25	0.936	(0.657)	0.986	(0.691)	0.176	(0.353)	2.54×10^5
	100	0.924	(0.622)	0.973	(0.655)	0.206	(0.399)	8.96×10^6
0.99	1	0.986	(0.888)	0.996	(0.897)	0.047	(0.103)	4.20×10^3
	3	0.982	(0.821)	0.992	(0.829)	0.072	(0.169)	3.35×10^4
	5	0.979	(0.791)	0.989	(0.799)	0.086	(0.201)	8.49×10^4
	25	0.971	(0.716)	0.981	(0.723)	0.116	(0.286)	2.98×10^6
	100	0.965	(0.675)	0.975	(0.681)	0.127	(0.335)	7.81×10^7
0.999	1	0.996	(0.925)	0.997	(0.926)	0.031	(0.075)	2.00×10^5
	3	0.993	(0.869)	0.994	(0.870)	0.047	(0.125)	1.71×10^8
	5	0.992	(0.843)	0.993	(0.844)	0.059	(0.152)	4.55×10^6
	25	0.987	(0.772)	0.988	(0.773)	0.097	(0.228)	1.16×10^8
	100	0.984	(0.729)	0.985	(0.730)	0.106	(0.275)	2.98×10^9

Table 5. Values of $E[\check{R}]$, $E[\check{R}]/R$, $V_{\check{R}}$ and Q^* for selected values of R and m $(n=3)$.
(Corresponding values for R'' are listed in the parentheses.)

R	m	$E[\check{R}]$	$(E[R''])$	$E[\check{R}]/R$	$(E[R'']/R)$	$V_{\check{R}}$	$(V_{R''})$	Q^*
0.9	1	0.903	(0.817)	1.003	(0.908)	0.147	(0.162)	1.68×10
	3	0.902	(0.756)	1.003	(0.840)	0.168	(0.230)	7.71×10
	5	0.899	(0.728)	0.998	(0.809)	0.183	(0.265)	1.62×10^2
	25	0.881	(0.661)	0.979	(0.735)	0.236	(0.354)	1.50×10^3
	100	0.860	(0.626)	0.956	(0.696)	0.288	(0.402)	1.09×10^4
0.95	1	0.948	(0.868)	0.998	(0.914)	0.089	(0.120)	3.88×10
	3	0.942	(0.808)	0.992	(0.850)	0.114	(0.185)	1.79×10^2
	5	0.938	(0.780)	0.987	(0.820)	0.129	(0.218)	3.35×10^2
	25	0.921	(0.707)	0.969	(0.744)	0.170	(0.305)	3.55×10^3
	100	0.903	(0.666)	0.950	(0.702)	0.210	(0.357)	2.29×10^4
0.99	1	0.985	(0.928)	0.995	(0.937)	0.041	(0.074)	2.53×10^2
	3	0.981	(0.880)	0.990	(0.888)	0.060	(0.121)	1.02×10^3
	5	0.978	(0.854)	0.988	(0.863)	0.071	(0.149)	1.97×10^3
	25	0.969	(0.785)	0.979	(0.793)	0.098	(0.222)	2.31×10^4
	100	0.961	(0.738)	0.971	(0.746)	0.110	(0.277)	1.68×10^5
0.999	1	0.996	(0.964)	0.997	(0.965)	0.028	(0.047)	4.96×10^3
	3	0.994	(0.930)	0.995	(0.931)	0.039	(0.077)	1.59×10^4
	5	0.993	(0.911)	0.994	(0.912)	0.047	(0.097)	2.78×10^4
	25	0.989	(0.854)	0.990	(0.855)	0.077	(0.156)	2.29×10^5
	100	0.987	(0.809)	0.988	(0.810)	0.085	(0.202)	2.31×10^6

Table 6. Values of $E[\check{R}]$, $E[\check{R}]/R$, $V_{\check{R}}$ and Q^* for selected values of R and m ($n=5$).

(Corresponding values for R'' are listed in the parentheses.)

R	m	$E[\check{R}]$	$(E[R''])$	$E[\check{R}]R/$	$(E[R'']/R)$	$V_{\check{R}}$	$(V_{R''})$	Q^*
0.9	1	0.906	(0.844)	1.007	(0.937)	0.111	(0.126)	1.31×10
	3	0.900	(0.801)	1.000	(0.890)	0.137	(0.183)	4.51×10
	5	0.895	(0.777)	0.995	(0.863)	0.153	(0.217)	7.45×10
	25	0.873	(0.710)	0.969	(0.789)	0.213	(0.313)	4.61×10^2
	100	0.846	(0.669)	0.940	(0.743)	0.277	(0.370)	2.76×10^3
0.95	1	0.949	(0.895)	0.999	(0.942)	0.069	(0.092)	2.62×10
	3	0.943	(0.857)	0.992	(0.902)	0.089	(0.136)	8.59×10
	5	0.938	(0.835)	0.987	(0.879)	0.100	(0.165)	1.44×10^2
	25	0.919	(0.766)	0.968	(0.806)	0.141	(0.256)	8.74×10^2
	100	0.897	(0.721)	0.945	(0.759)	0·186	(0.316)	4.86×10^3
0.99	1	0.986	(0.955)	0.996	(0.964)	0.032	(0.046)	1.33×10^2
	3	0.983	(0.927)	0.993	(0.937)	0.039	(0.077)	3.62×10^2
	5	0.981	(0.912)	0.991	(0.922)	0.044	(0.095)	7.10×10^2
	25	0.973	(0.856)	0.983	(0.865)	0.059	(0.160)	4.25×10^3
	100	0.964	(0.808)	0.974	(0.816)	0.074	(0.220)	1.96×10^4
0.999	1	0.997	(0.983)	0.998	(0.984)	0.024	(0.020)	1.30×10^3
	3	0.996	(0.970)	0.997	(0.971)	0.026	(0.036)	3.92×10^3
	5	0.996	(0.960)	0.997	(0.961)	0.028	(0.048)	8.02×10^3
	25	0.994	(0.924)	0.995	(0.925)	0.037	(0.088)	3.63×10^4
	100	0.992	(0.887)	0.993	(0.888)	0.041	(0.130)	1.66×10^5

Table 7. Values of $E[\check{R}]$, $E[\check{R}]/R$, $V_{\check{R}}$ and Q^* for selected values of R and m ($n=10$).

(Corresponding values for R'' are listed in the parentheses.)

R	m	$E[\check{R}]$	$(E[R''])$	$E[\check{R}]/R$	$(E[R'']/R)$	$V_{\check{R}}$	$(V_{R''})$	Q^*
0.9	1	0.898	(0.867)	0.997	(0.963)	0.089	(0.096)	9.52
	3	0.889	(0.836)	0.987	(0.928)	0.122	(0.142)	2.77×10
	5	0.882	(0.819)	0.980	(0.910)	0.130	(0.166)	4.73×10
	25	0.854	(0.762)	0.949	(0.847)	0.206	(0.258)	2.34×10^2
	100	0.821	(0.718)	0.912	(0.798)	0.280	(0.334)	9.05×10^2
0.95	1	0.944	(0.920)	0.994	(0.968)	0.059	(0.067)	1.68×10
	3	0.936	(0.892)	0.986	(0.939)	0.078	(0.106)	5.26×10
	5	0.931	(0.877)	0.980	(0.923)	0.089	(0.125)	8.83×10
	25	0.909	(0.823)	0.957	(0.867)	0.130	(0.196)	4.35×10^2
	100	0.883	(0.778)	0.930	(0.819)	0.179	(0.264)	1.70×10^3
0.99	1	0.985	(0.973)	0.995	(0.983)	0.029	(0.026)	9.78×10
	3	0.982	(0.958)	0.991	(0.968)	0.035	(0.045)	2.25×10^2
	5	0.979	(0.949)	0·989	(0.959)	0.038	(0.057)	2.96×10^2
	25	0.971	(0.914)	0.981	(0.923)	0.051	(0.102)	1.58×10^3
	100	0.961	(0.875)	0.970	(0.884)	0.065	(0.154)	6.67×10^3
0.999	1	0.997	(0.993)	0.998	(0.994)	0.023	(0.008)	4.98×10^2
	3	0.996	(0.988)	0.997	(0.989)	0.025	(0.014)	1.34×10^3
	5	0.996	(0.985)	0.997	(0.986)	0.026	(0.018)	2.19×10^3
	25	0.994	(0.968)	0.995	(0.969)	0.031	(0.040)	8.89×10^3
	100	0.992	(0.948)	0.993	(0.949)	0.033	(0.065)	3.86×10^4

Table 8. Values of $E[\check{R}]$, $E[\check{R}]/R$, $V_{\check{R}}$ and Q^* for selected values of R and m ($n=20$).
(Corresponding values for R'' are listed in the parentheses.)

R	m	$E[\check{R}]$	$(E[R''])$	$E[\check{R}]/R$	$(E[R'']/R)$	$V_{\check{R}}$	$(V_{R''})$	Q^*
0.9	1	0.897	(0.875)	0.996	(0.972)	0.076	(0.069)	9.17
	3	0.887	(0.856)	0.986	(0.951)	0.109	(0.108)	2.58×10
	5	0.880	(0.842)	0.978	(0.935)	0.127	(0.134)	4.05×10
	25	0.851	(0.786)	0.946	(0.873)	0.195	(0.233)	1.92×10^2
	100	0.817	(0.739)	0.908	(0.822)	0.270	(0.324)	7.28×10^2
0.95	1	0.944	(0.921)	0.994	(0.970)	0.052	(0.051)	1.87×10
	3	0.936	(0.906)	0.985	(0.954)	0.070	(0.075)	5.19×10
	5	0.931	(0.897)	0.980	(0.945)	0.080	(0.090)	7.30×10
	25	0.909	(0.856)	0.956	(0.901)	0.121	(0.155)	3.20×10^2
	100	0.882	(0.810)	0.928	(0.853)	0.169	(0.230)	1.12×10^3
0.99	1	0.985	(0.974)	0.995	(0.984)	0.027	(0.025)	6.17×10
	3	0.982	(0.967)	0.992	(0.976)	0.031	(0.035)	1.77×10^2
	5	0.980	(0.961)	0.990	(0.971)	0.033	(0.042)	2.84×10^2
	25	0.971	(0.940)	0.981	(0.949)	0.043	(0.070)	1.08×10^3
	100	0.961	(0.912)	0.971	(0.921)	0.057	(0.107)	3.58×10^3
0.999	1	0.997	(0.994)	0.998	(0.995)	0.023	(0.007)	6.62×10^2
	3	0.997	(0.991)	0.998	(0.992)	0.023	(0.011)	2.27×10^3
	5	0.996	(0.989)	0.997	(0.990)	0.023	(0.013)	2.39×10^3
	25	0.995	(0.981)	0.996	(0.982)	0.023	(0.022)	7.27×10^3
	100	0.992	(0.971)	0.993	(0.972)	0.024	(0.035)	2.81×10^4

$$B\ (n,\ m,\ R)\ =\ E\ [\check{R}(n,\ m,\ R)]\ /R \qquad (6\cdot4)$$

と考えることによって，(6・3) 式を用いて推定した$\check{R}_0$を次式

$$R_0 = \check{R}_0\ /\ B\ (n,\ m,\ R) \qquad (6\cdot5)$$

によって修正し，この R_0 の値を真のフリート信頼度の推定値として代用することも可能である。

7 結　　言

本論文においては，近時 A. M. Freudenthal によって提案されたScatter Factor S に基づくフリート信頼度 R の推定方法の妥当性について綿密な理論的検討・考察を加えた結果，彼の考え方によるフリート信頼度 R' はこれを導出する積分領域が真のフリート信頼度Rを求める積分領域と相異なる点を指摘

した。したがって2母数ワイブル寿命分布の形状母数αが既知として導出されたSによるRの推定量R'は近似的なものとなる点を鑑み，新しく真のRの推定量$\hat{R}$を提案し，モンテカルロ法を援用したシミュレーション結果から，$\hat{R}$の統計的性質がR'のそれに比べて非常に優れていることを確認した。

同時に，一般の工学的要請を勘案して，寿命母集団の形状母数αならびに尺度母数βがともに未知の場合に，上述のR'ならびに$\hat{R}$を拡張することを意図し，Rの推定量R''ならびに$\check{R}$を新たに構築・提案し，それらの統計的性質をシミュレートするためのモンテカルロ手法を確立した。さらに，標本寸法n，フリート寸法m，および信頼度レベルRが両推定量の統計的性質に及ぼす影響について研究し，いずれの場合においても，新たに提案した推定量$\check{R}$の方が，Freudenthalの考え方の拡張によるR''よりも，はるかに統計的性質が優れていることを再び確認した。とくに標本寸法nの小さい場合に対してもこのことが成り立つことを明示することによって，$\check{R}$が工学的現状をうまく反映した有用なものであることを明らかとした。

以上により，寿命母集団の形状母数αが既知の場合には$\hat{R}$を，また未知の場合には$\check{R}$を，それぞれ用いて，フリート信頼度Rが適切に推定されうること，以て信頼度を考慮した安全設計が達成されうることを示した。

参考文献

(1) Shinozuka, M., "Development of Reliability-Based Aircraft Safety Criteria: An Impact Analysis," AFFDL—TR—76—31, April 1976.

(2) 小西一郎編，「鋼橋—基礎編Ⅱ，第13章：鋼構造物の安全性・信頼性への統計的アプローチ」，(昭52—9), pp. 807—925, 丸善.

(3) 岡田憲司，石川浩，金本勝行，「信頼度を導入した疲労設計手法について」，高松工業高等専門学校紀要，第14号 (1978—10), pp.1～9.

(4) ASCE, Proceedings of Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Zucson, Az., U.S.A., (1979—1), ASCE.

(5) 日本材料学会関西支部，「信頼性工学の基礎と構造工学的応用に関する講習会」教材，(昭54—12)，日本材料学会関西支部.

(6) 石川　浩，木村　等，「強度設計と信頼性」，第500回講習会教材「疲労・環境・高温強度と信頼性」，(昭55—5)，pp.67～80，日本機械学会.

(7) Shinozuka, M., "Reliability-Based Scatter Factors; Vol. 1.Theoretical and Empirical Results," AFFDL—TR—78—17 (1978—3).

(8) Freudenthal, A. M., "The Scatter Factor in the Reliability Assessment of Aircraft Structures," Journal of Aircraft, Vol .14, No. 2, February 1977, pp. 202—208.

(9) 三上　操，「統計的推測」，(1969)，p. 122，筑摩書房.

(10) David. H.A., "Order Statistics," (1970), John Wiley & Sons, New York.

(11) Gibra, I., "Probability and Statistical Inference for Scientists and Engineers," (1973), p. 190, Prentice-Hall.

(12) 木村　等，石川　浩，「確率・統計学入門」，(昭55—3)，p. 188，新日本印刷.

(13) 田中道七，藤井　勉，日本材料学会誌，25—276(昭51—10)，pp. 960～965.

(14) 岡田憲司，ほか3名，日本機械学会講演論文集，No. 784—7 (昭53—7). p.126.

(15) 石川　浩，「信頼性工学におけるMTBFとTTFF」日本機械学会関西支部—東海支部合同第7回座談会講演集，(1974—8)，p.19，日本機械学会.

(16) 石川　浩，「実働荷重下における機械・構造物疲労寿命の信頼性解析(Ⅱ)」，日本材料学会誌，24—260 (昭50—5)，pp. 477～488.

(17) Weibull, W., "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability," Journal of Applied Mechanics, Vol. 18. (1951), pp. 293～297.

(18) 石川　浩，「実働荷重下における機械・構造物疲労寿命の信頼性解析(Ⅳ)」，日本材料学会誌，24—262 (昭50—7)，pp. 693～703.

(19) Cohen, A.C., "Maximum Likelihood Estimators of the Two-Parameter Weibull Distribution," Technometrics, Vol. 7 (1965), p. 579.

(20) 文献(12)の p. 172.

(21) Whittaker, I.C. and Besuner, P.M., "A Reliability Analysis Approach to Fatigue Life Variability of Aircraft Structures," AFML-TR—69—65, April 1969.