

強度設計と信頼性

石川 浩
木村 等

Reliability-Based Design of Machines and Structures

By

Hiroshi Ishikawa and Hitoshi Kimura

ABSTRACT

Three fundamental phases exist, in general, in the reliability-based design of machines and/or structures; the first phase is the determination of the stochastic nature, namely the probability density function, of the stress or stresses to cause structural failure, the second the evaluation of probabilistic characteristics of the strength of each member or component, and the last the linkage of the both probability density functions with the given reliability level. Each phase is, as is often the case, confronted with uncertainties due to, for instance, insufficiency of available data, approximation and imperfection of the structural model to be analyzed. In the present paper, therefore, engineering uncertainties associated with the reliability-based design are first briefly summarized and discussed. They are pointed out to be classified into two categories, one related to objective probability (termed as objective uncertainty) and the other subjective (as subjective uncertainty). Then it is a standard practice to introduce Bayesian approach techniques, thus producing a comprehensive useful reliability-based design principle by the first-order second moment method which is originally proposed by A. H. S. Ang. This design principle is carefully examined, and the advantage of introducing subjective probability in design is emphasized, while paying a rigorous attention to its limitation in the application.

The present reliability-based design principle can be inversely applied to the analysis of the reliability level of any structure now existing. To this end, a simple case is briefly exemplified and discussed. In conclusion, this design principle, though it places its origin to the usage of subjective probability, plays a crucial role in the reliability-based design of machines and/or structures.

1. はじめに

近時、原子炉圧力容器の故障あるいは航空機の墜落事故などに関連して、機械・構造物の安全性・信頼性に対する関心が急速に高まってきている。JIS^{(注1)(1)}によれば、信頼性(reliability)とは「系、機器、部品などの、機能の時間的安定性を表す度合または性質」と定義されており、また信頼度(同じくreliability)^(注2)とは「系、機器、部品などが、規定の条件の下で、意図する期間中、規定の機能を遂行する確率」と定義されている。本稿はこのような信頼性を総体的に扱った学問である信頼性工学(Reliability Engineering)の教えるところを強度設計に反映させ、いかにして機械・構造物の信頼性設計(reliability-based design)を遂行すべきかに関して論じるものである。

さて、本論に立ち入る前に、ある item の信頼性をその全寿命(ライフ・サイクル; life cycle)を通じてどのように維持し、管理していくべきかという点に

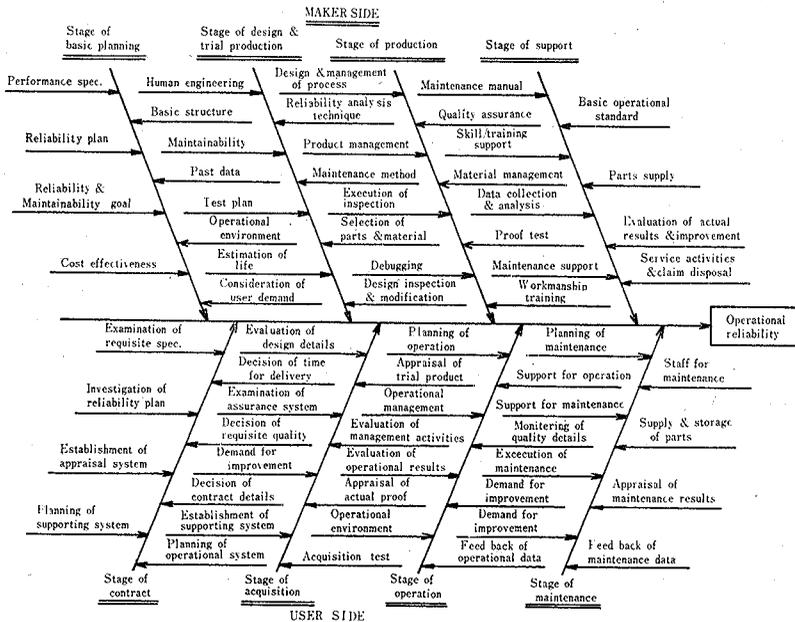


図1. item の全寿命を通じての信頼性管理活動

(注1) 信頼性用語 JIS Z8115-1970を参照のこと。

(注2) これらを総称して簡単にアイテム(item)と言うこともある。信頼性を問題とする対象を表現する言葉である。

ついて認識を深めておく必要がある。item の全寿命を通じての信頼性維持のためにとられるべき諸活動は、例えば 図1 に例示するように、極めて広範囲に及んだものとなるであろう⁽²⁾。これらは、一般に購入時点でその item の全寿命を通じての規定の信頼性や安全性を確認することが非常に困難である事実を鑑み、開発、設計、生産、使用の各段階を通じて望ましい信頼性や保全性 (maintainability) の水準を item に反映させ、かつそれらを維持するために必須の活動や管理体系を要求し保証させる必要性に従ってとられる諸活動であって、その item の供給者 (メーカー) のみならず使用者 (ユーザー) をも含めた全体的協力態勢の下に行われるべき性質のものである。メーカー側の立場からもっと具体的に述べることにすれば、まず基本構想段階では開発すべき item の目標性能を定め、基本構造を決定する。この際に信頼性、保全性および有効性などの目標値が設定されるところとなる。契約段階ではメーカーとユーザーの両者が基本構想に関して検討・評価を重ね、互いの意見を修正し合っ合意点に達すれば契約を取り決める。設計・開発段階に至っては、メーカーは契約で取り決めた種々の目標値実現の方法とか内容をユーザーに報告する必要がある⁽³⁾、一定の書式の報告書が用意されているのが普通である。設計時に行われる信頼度の予測や配分に際しては一般に故障率関数 (failure rate function) が用いられ、このため当該 item に関する過去の蓄積データや類似品のデータなどから、使用環境や条件に応じて合理的な故障率を推定する必要がある。さらに生産段階に至っては品質管理 (quality control) や作業員の技術教育 (workmanship training & education) に注意が払われ、item のでき上がり品質のみならず、使用時の信頼性をも含めた管理が不可欠となる。ユーザー使用段階に至れば、item が実際に契約時の信頼性水準を満足しているかどうかの判定が行われるところであるが、複雑な item ほど初期故障 (early failure) が多いのが一般であり、判定時点が大きな問題となる。このため例えば航空機関係ではマイルストーン (實用開始後1か年の時点と3か年の時点) もしくはゴール (使用1万時間の時点と10万時間の時点) と呼ばれるいずれかの判定時点が採用されることが多い。これに緊密に対応してメーカー側ではユーザー側の使用実績データ

や故障データを収集・分析し、設計や製造工程の改善に反映させて目標達成を図るべく努力することになる。フィールド・データの分析と信頼度の把握・改更や工程改善の成果を評価するためには、itemの構成管理や追跡調査が可能な体制を確立する必要がある、これはメーカーとユーザーが一体となって初めて達成できるものである。^(注3) 使用段階の活動にはこの他、itemの取り扱いや整備技術に関する支援活動や部品の準備・補給活動といったitemの有効性や稼働率の向上・維持のための活動が含まれる。

以上概観した諸活動を通じてitemの信頼性管理が理想的には達成されうるところとなるであろうが、あまりに広範囲に及ぶため本稿でこれらすべてを包括して論じることが到底不可能である。一方、信頼性はまた次のようにも区別して使い分けられることが多い。すなわち、使用状態で実現される信頼度を動作信頼度 (operational reliability) γ_0 とし、これを固有信頼度 (inherent reliability) γ_I と使用信頼度 (use reliability) γ_U に分けて考える。前者 (γ_I) は部品、材料選択、設計法、製造技術など設計・製作に付随した固有のものであり、後者 (γ_U) は保全、環境、操作、保管等の使用条件によって定まるものである。両者の間には近似的に、

$$\gamma_0 \cong \gamma_I \cdot \gamma_U$$

の関係があるものとされ、また電子装置に関する動作信頼度に寄与する要因とその寄与率の一例⁽¹⁸⁾を示した表1に明らかなように、固有信頼度の方が寄与率が

表1. 電子装置に関する動作信頼度に寄与する因子とその寄与率

| 信 頼 度 | | 故障要因 | 寄 与 率 |
|------------------------------------|---------------------|------|-------|
| 動作信頼度 γ_0 | 固有信頼度 γ_I | 部 品 | 30% |
| | | 設 計 | 40% |
| | | 製 作 | 10% |
| $\gamma_0 \cong \gamma_I \gamma_U$ | 使用信頼度 γ_U | 使 用 | 20% |

(注3) 例えば、USAFのMDCS (Maintenance Data Collection System) やUSNのMMMS (Maintenance & Material Management System)など。

高く、設計・製作時にこの信頼性に対する十分な配慮がなされなければならないことが示唆されている。

以上を鑑み、本稿では主として設計・製作時に考慮されるべき信頼性という立場から、機械・構造物の信頼性設計手法の在り方を考えることとする。周知のように、土木構造物の設計に際して最初に確率統計論的な手法を導入し、より合理的な安全性の評価を試みたのは A. M. Freudenthal⁽⁴⁾ であるが、彼の研究を端緒にして現在までにこの方面の研究は非常な進展を見るに至っている。著者らの一人が参加、研究発表を行った1979年1月のASCE(アメリカ土木学会)の Specialty Conference⁽⁵⁾ の中心課題も信頼性設計に関連したものであったし、また我国においても信頼性設計に関する研究は各所で活発に行われ始めている。^(注4) 本稿では、これらの諸研究の成果をも概観しながら、信頼性設計に対する基本的な考え方を簡潔に論じることとしたい。^{(5)~(14)}

2. 決定論的設計手法と信頼性(確率論的)設計手法

さて、機械・構造物は通常自然環境あるいは運用状態の下で様々な荷重もしくは環境ストレスを受ける。このような機械・構造物の設計を考える場合、各々の構成部材に作用する荷重(応力)とその部材のもつ抵抗力(強度)との係わりが重要となる。そこでいま、荷重を S 、抵抗力を R と表すことにしよう。もちろんこの S と R はそれぞれ荷重によって生じる部材応力および部材強度と解釈してもよい。もっと一般的に考えるならば、 S は部材の破壊をもたらす変数、また R はその S に耐える部材の能力とも言うことができよう。明らかなように、作用荷重や材料特性は本質的に変動性 (variability) をもったものであり、かつまた設計に際しての構造解析や応力解析に当たっては様々な近似化や理想化が行われることが多く、さらには実際の製作・施工段階においても種々の誤差が混入することを避けえず、結局本質的な変動性なり、あるいは人為的所作なりに基づく多種多様な不確定性 (uncertainties) が存在する所とな

(注4) 例えば、日本機械学会、日本材料学会、日本土木学会、日本鋼構造協会、日本高圧力技術協会などの学・協会に信頼性に関する委員会や分科会が設置され、活発な活動が行われている。

って、これらを正しく設計に反映させるのでなければ、所定の信頼度レベルでの設計は望みうべくもないと言えよう。

しかしながら、このような不確定性に関する確率的背景を明確としないまでも、従来よりこのような不確定性を何らかの意味で勘案するものとして種々の設計安全率 (factor of safety or ignorance) という概念を用いた決定論的設計手法 (conventional or deterministic design method) が採用されてきた。

(a) 許容応力設計法 (working stress design method) 設計荷重値に基づいて応力 S^* を算出し、この応力値を、材料の公称強度 R^* を安全率 Q^* (≥ 1) で除したいわゆる許容応力 (allowable stress) S_a 以下に抑えるという設計手法である。すなわち、

$$S^* \leq S_a \leq R^* \quad (1-a)$$

$$S_a = R^*/Q^* \quad (1-b)$$

この手法の意図する所は、真の荷重作用力と材料の抵抗力とを設計段階で評価することは不可能であるとの観点から、設計応力と公称強度の限界値でそれぞれを代表し、そのために予想される危険性 (リスク; risk) に対しては、設計安全率 Q^* によって獲得される安全性の余裕 (safety margin) を以て対処しようという主旨のものであるが、具体的な安全率の値の選定は経験や勘に頼らざるをえず、安全性の程度が不明確となりやすい欠点がある。

(b) 荷重係数設計法 (load factor design method) 土木工学の分野では構造物に作用する種々の異種荷重のばらつき程度の違いや作用頻度、構造物に及ぼす影響度の違い等を考慮し、各荷重毎に用いる安全率を変化させることによって、よりバランスのとれた設計の実施を意図したもとして荷重係数設計法が行われている。この設計理念は一般には次式で表される。

$$\xi_0 \cdot \sum_{i=1}^k \xi_{s_i} \cdot S_i^* \leq R^*/\xi_m \quad (2)$$

ここに、 S_i^* 、 R^* はそれぞれ設計基準に規定された公称荷重作用力および構造物の公称抵抗力である。また係数 ξ_{s_i} は1つの荷重 S_i^* に関する荷重係数 (load factor)、 $\xi_m (\geq 1)$ は強度係数 (strength factor)、 ξ_0 は構造物の重要度や設計の対象となる限界状態の特性などを考慮した全体的な係数である。なお、 k

は考慮の対象となる荷重の数を表す。

式(2)からわかるように、この荷重係数設計法は荷重ならびに抵抗力に係わる不確定性をそれぞれ別個に考慮し、荷重の作用力を右へシフトさせ(すなわち、大き目に評価し)、また、抵抗力を左へシフトさせる(小さ目に評価する)ことによって安全性の余裕をバランスよくもたせようとするもので、現在土木工学の分野では広く用いられており、許容応力設計法に比べればその合理性は高いものと言うことができる。しかしながらこの場合にも各種の設計係数の選定に確率論的背景が乏しい難点がある。

上述のように、従来の設計手法はいずれも単一の代表値を以て荷重もしくは抵抗力を代表させるという決定論的手法であって、確率論的基盤に乏しい。これに対して、荷重および抵抗力のいずれもがあるばらつきをもった確率変数(random variable)であると考え、両者の結合的考察の下に所定の信頼度に応じた設計を行おうとする手法が信頼性設計手法もしくは確率論的設計手法(probabilistic design method)と呼ばれるものである。信頼性設計に際しては、設計に付随して現れる設計変数のもつ不確定性をどの程度まで勘案するかによって質的差を生じるが、基本的には A. M. Freudenthal⁽⁴⁾によって最初に提案されたいわゆる古典的信頼性理論(classical reliability theory)にその理念を見ることができる。すなわちいま、抵抗力(強度) R をもつ部材に荷重(応力) S が作用している場合を考え、両者は互いに独立な確率変数であると仮定する。破壊は S が R を超過したときに生じるものと定義することによって、破壊確率(probability of failure) p_f を以下のようにして計算することができる。 S および R の分布の密度関数をそれぞれ $f_S(s)$ 、 $f_R(r)$ 、またそれぞれの分布関数を $F_S(s)$ 、 $F_R(r)$ とし、図2を参照して、

$$\begin{aligned} p_f &= P\{R \leq S\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) \left\{ \int_{-\infty}^s f_R(r) dr \right\} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) F_R(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) \{1 - F_S(r)\} dr \end{aligned} \quad (3)$$

したがって信頼度 γ は

$$\gamma = 1 - p_f \tag{4}$$

となる。例えば、 S および R が互いに独立に正規分布 $N(\mu_S, \sigma_S^2)$ および $N(\mu_R, \sigma_R^2)$ に従うとしたときには、

$$p_f = 1 - \Phi \left[\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \tag{5}$$

ただし、 $\Phi(u)$ は標準正規分布 $N(0,1^2)$ の分布関数であって次式で定義されるものである。

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right] dt \tag{6}$$

設計に際しては上で計算された p_f をある与えられた許容値 p_{fa} 以下となるように安全性を保証する。すなわち、

$$p_f \leq p_{fa} \tag{7}$$

したがって S および R が互いに独立に正規分布に従う場合には、式 (5) および式 (7) から

$$\mu_S \leq \mu_R - \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_R^2} \Phi^{-1}(1 - p_{fa}) \tag{8}$$

として設計応力の平均値を、したがってまた部材の寸法を規定することができる。ここに $\Phi^{-1}(\cdot)$ は $\Phi(u)$ の逆関数である。なお、

$$Q = R/S \tag{9}$$

とすれば、この Q はまた確率変数であって、これを統計的安全率 (statistical safety factor) と呼び、また

$$Q_0 = \mu_R / \mu_S \tag{10}$$

を中央安全率 (central safety factor) と言う。 S および R が共に独立な正規分布に従うとし、またそれぞれの変動係数を

$$\left. \begin{aligned} V_S &= \sigma_S / \mu_S \\ V_R &= \sigma_R / \mu_R \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

としたとき、中央安全率 Q_0 は

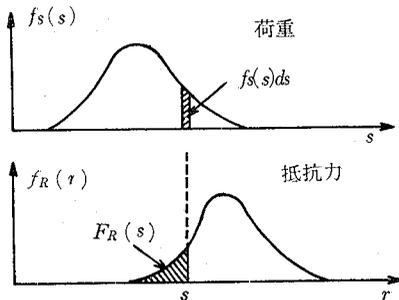


図2. 破壊確率の求め方

$$Q_0 = \frac{1 + u_{pf} \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - (V_R V_S u_{pf})^2}}{1 - (V_R u_{pf})^2} \quad (12)$$

ただし, $u_{pf} = \Phi^{-1}(1 - p_f)$ (13)

として求められる。

S および R の分布が正規分布以外の場合でも、理論的には式(3)を用いて破壊確率 p_f が計算されるが、必ずしも解析的な形となるとは限らず、数値積分やモンテカルロ法 (Monte Carlo simulation method) によらなければならないこともある。

上述した古典的信頼性理論は従来の決定論的設計手法に比べて、非常に簡明な確率論の根拠を与えるものではあるが、現実の適用に当たってはなお以下のような種々の制約がある。すなわち、

(i) S と R の分布形が既知という前提に立って解析が進められるが、設計段階でこれらの分布形を厳密に確定するに足るだけの情報量をもちえないことが多い。それゆえ、分布形とかその母数値とかは何らかの仮定を用いて決める

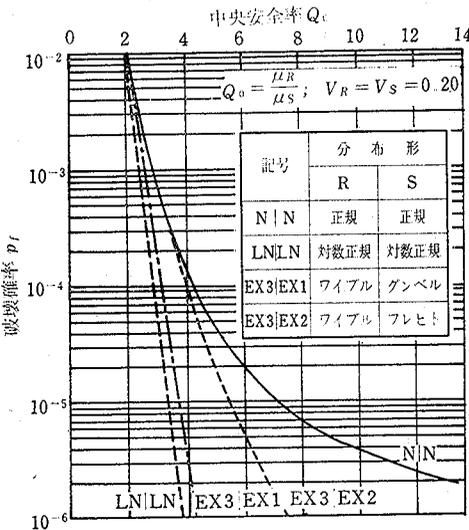


図3. 分布形が破壊確率に及ぼす影響 (古典的信頼性理論)

こととなるが、図3に示すように、一般に小さな破壊確率 p_f の値 ($p_f < 10^{-3}$) に対しては分布形の及ぼす影響が非常に大きく、 p_f によって設計安全率を決定することが困難である。⁽⁹⁾

(ii) 情報量の不足によって生じる不確定性の取り扱いがなされていない。

(iii) S および R の分布特性の中には荷重および抵抗力の本来的なばらつきに加えて、荷重のモデル化、構造解

析上の仮定,あるいは設計・製作・施工の各段階で生じる誤差などに基づく不確定性をも含み込んでおり,後者の取り扱いの根拠が明確ではない。

以上のような欠点を克服するためには,設計に付随して現れる不確定要因を正しく分析し,できるだけ適正にモデル化して数量的に取り扱えるように配慮し,信頼性設計に反映させることが不可欠となる。以下この点に関して考究を加えることにする。

3. 設計における不確定要因の解析と評価

前節に示唆されるように,信頼性設計に際しては大別して

- (i) 破壊をもたらすストレス(応力) S の密度関数 $f_S(s)$ の決定,
- (ii) 強度 R の密度関数 $f_R(r)$ の確定, および
- (iii) 信頼度 γ による両者の結合

という3つの過程が存在するものと考えられ,その各々の段階において様々な不確定性が介在することが予想される。

3.1 $f_S(s)$ に関連した不確定性

(a) 作用荷重の解析と予知

(i) 荷重の本来的なばらつきとその予測誤差 作用荷重のもつ本来的な変動性は不確定要因の中でも重要な位置を占めるものであって,この予測精度は安全性・信頼性に大きな影響をもつと言えよう。通常は観測データを統計的に解析して推定が行われるが,荷重に関する情報量が少ない場合には予測誤差は大きくなるであろう。

(ii) 荷重のモデル化による不確定性 設計の都合上荷重を何らかの形で単純化して取り扱う必要があるという場合には,実際の荷重による作用力と計算上の作用力との間には少なからぬ誤差を生じる可能性があり,このような変換誤差による不確定性を明確にしておく必要がある。

(iii) 荷重の組合せに基づく不確定性 構造物には発生確率や分布特性の異なるいくつかの荷重が同時に作用する。これらの荷重は通常個々の不確定性も様々であるので,組合せ荷重としての不確定性について考え

る必要がある。

(b) 構造特性のモデル化 これは機械・構造物の構造幾何の決定、作用荷重の構造部材への配分および構造部材の力学的挙動法則の取り決め等に関連するもので、以下のような不確定要因が考えられる。

(i) 製作精度・施工上のばらつき

(ii) 作用荷重の作用位置と構造部材への作用効果の不確定性

(iii) 構造解析モデルの理想化と単純化 構造連接関係を単純化して考えたり、非線形挙動を線形近似したり、また土・コンクリート等の異方性材料の機械的性質のばらつき等に起因するものである。最近ではコンピュータの使用によりかなり精度の高い解析を行うことができるようになってきたが、このような場合にはいたずらに精密な解析を追求するのではなく、他の不確定要因のもつ変動性とのバランスをも考え、解析精度に十分な配慮を払うことが必要である。

(c) 構造応答の解析 前項 (b) とも関連を有し、応答解析上の様々の単純化と理想化に基づくものである。

3.2 $f_R(r)$ に関連した不確定性

強度を定義するに当たってはまず破壊モード (failure mode) を決める必要があり、この破壊モードに従った材料強度のばらつきが考えられる。材料強度のばらつきは実態調査研究によって比較的簡単に統計的にまとめることができる。しかしながら強度データの多くは実験室的なものであるから、現実のフィールド・データとの対応を図る必要がある。同種材による強度データを援用するという場合にも注意が肝要である。

3.3 その他の不確定要因

(a) 耐用期間中の不確定要因 耐用期間の長い場合には、腐食による強度劣化、大地震などの過大荷重による損傷、あるいは繰返し荷重による疲労損傷に基因した強度低下などについても、できるだけ設計時にその影響を考慮に入れておく必要がある。

(b) 情報量の不足による不確定要因 不確定性の解析は過去のデータを

基にして推定されるものであるから、工学的現状を勘案すれば利用可能なデータ数には制限があり、これが不確定性の一因となる。とくに、地震荷重など、非常性が問題となるデータは本質的に数少ないのが普通であるから、取り扱いを慎重にしなければならない。

- (c) 構造物の重要度や限界状態の重要度に対する配慮 構造物の破壊によって及ぼされる社会的・経済的な影響に対する配慮は正に設計者の主観的判断に従った不確定性を有する。例えば人命に係わるものとか、修復に多額の費用を要する構造物に対しては設計時から大きな安全性を保証しておく必要がある。

以上に述べた諸事項を総括して、信頼性設計における設計変数のもつ不確定性の解析手順を図4に模式的に示しておく⁽⁷⁾。

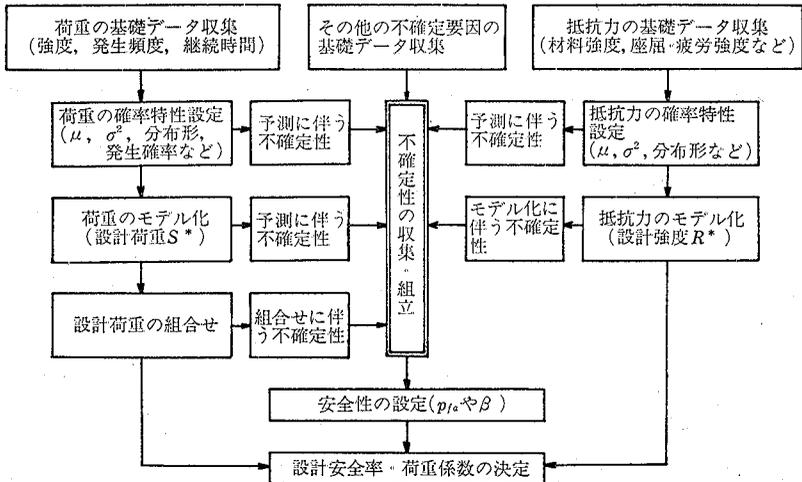


図4. 設計変数の不確定性の信頼性工学的評価

4. 信頼性強度設計の手法

前節に述べた種々の設計変数 (design variables) のもつ不確定性を正しく評価し、古典的信頼性理論のもつ限界をも克服して、望まれる信頼度レベルでの設計をいかにして遂行するかというのが本節での課題である。これに関しては

A. H-S. Ang らによって優れた諸研究^{(9)~(12)}がなされているので、それらの成果を援用しつつ、とくに利用可能なデータがそれ程多くはないという工学的現状の中で重要な機械・構造物の信頼性設計を遂行せざるをえない場合、設計者の判断の依り所として主観的確率を導入したベイズ流の考え方を^{(15)~(17)}信頼性設計に取り入れる利点と制約とに力点を置いて、信頼性設計の在り方を考え、併せて既存の機械・構造物に対する信頼性解析の実施法を論じることとしたい。

4.1 序 説

設計に際して考慮する必要のある不確定性を含んだ設計変数を確率変数と考え、 X_1, X_2, \dots, X_n と表すこととする。この $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ を用いて、構造物の機能遂行状態を評価する目的関数 (performance function)

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (14)$$

を構成する。ここに Z は構造物の機能レベルであるから、要求される機能の下限値を z_0 とすれば、事象 $\{Z = z_0\}$ がその構造物の限界状態を表し、 $\{Z \leq z_0\}$ が破損状態、また $\{Z > z_0\}$ が安全状態を表すことがわかる。それゆえ、構造物の破壊確率 p_f および信頼度 γ はそれぞれ

$$\begin{aligned} p_f &= P\{Z \leq z_0\} \\ \gamma &= P\{Z > z_0\} \end{aligned} \quad (15)$$

として評価できることになる。

いま仮に Z の分布が既知であるものとすれば、

$$p_f = \int_{-\infty}^{z_0} f_Z(z) dz = F_Z(z_0) \quad (16)$$

として p_f が計算可能である。ただし、 $f_Z(z)$ 、 $F_Z(z)$ はそれぞれ Z の密度関数、分布関数を表す。しかるに現実問題としては $f_Z(z)$ は不確定性を含む種々の設計変数 X_i の分布から決定されるべきものであるから、全く理想的な場合として、各々の設計変数が互いに独立であって、それぞれの密度関数が完全に既知なものとして与えられていると仮定した場合でも

$$F_Z(z) = \int \int \dots \int_{\{g \leq z\}} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (17)$$

という一般には複雑な形の多重積分を解くことによらなければ p_j が求められない。さらに現実的観点に立脚して考えてみると、各々の X_i の密度関数 $f_{X_i}(x_i)$ 自体も、恐らくは限られた標本データからの推定であろうから、式(17)によって厳密に $F_Z(z)$ を解きえたとしても、誤差の混入はまぬがれえぬ所であることが容易に推察され、さらにはまた式(14)の目的関数 g の形そのものも、何らかの理想化されたモデルに基づいて導出されていることが現実問題としては多々あるであろうと思われる。それゆえ、実務的には何らかの近似的取り扱いによって計算効率を高め、経済的にバランスのとれた解析を行う方が望ましいものと考えられる。この観点から鑑みるに、通常設計変数の変動性に関する情報は多くの場合が平均値 (mean) と変動係数 (coefficient of variation) もしくは標準偏差 (standard deviation) という形で与えられているのが一般であるという事に気付くであろう。それゆえ工学的目的からは、 Z の平均値 μ_Z と変動係数 V_Z とを設計変数のそれらから近似的に求めて、その後 Z の分布形に対する配慮を行うということが合目的であろう。分布形の正確にわかっていない変数を用いて信頼性解析を行うことは、いわばある仮定した分布形の下での信頼度の相対評価を行うにすぎないという反論もあるであろうが、正にこの相対評価が鋭敏度解析 (sensitivity study) などにおいては実用上大きな意味を有するものと考えられるのである。

さて、前述のように μ_Z および V_Z は設計変数 X_i の平均 μ_{X_i} および変動係数 V_{X_i} もしくは標準偏差 σ_{X_i} から、式(14)の目的関数を用いて決定する必要がある。また、 μ_{X_i} および σ_{X_i} 自身も現実に利用可能なデータから決められるものであり、さらには g のもつ関数形も何らかの理想化された仮定から求められるという様々な事実を勘案すれば、 X_i や g のもつ固有の統計的なばらつき (人為的に制御できないという意味で客観的不確定性 (objective uncertainty) と呼ぶ) に加えて、推定やモデル化の不備に付随した不確定性 (これを主観的不確定性 (subjective uncertainty) と呼ぶ) が混入することは不可避免的で、これらの不確定量をうまくモデル化して数量的に取り扱い、信頼性設計に反映させることが大切である。

4.2 1次近似の手法

設計変数 X_i の平均 (1次モーメント) μ_{X_i} および分散 (2次モーメント) $\sigma_{X_i}^2$ のみを用いて目的関数 Z の平均 μ_Z と分散 σ_Z^2 を評価するためには1次近似 (first-order approximation) の手法を用いる。

式(14)の Z を各設計変数 X_i の平均値 μ_{X_i} ($i=1, 2, \dots, n$) の点 $(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ に関して Taylor 展開すれば,

$$\begin{aligned} Z &= g(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &= g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_i (X_i - \mu_{X_i}) \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{X_i = \mu_{X_i}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) \left[\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right]_{X_i = \mu_{X_i}, X_j = \mu_{X_j}} + \dots \quad (18) \end{aligned}$$

上式において2次以上の項を無視すれば,

$$Z \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_i (X_i - \mu_{X_i}) \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{X_i = \mu_{X_i}} \quad (19)$$

したがって

$$\mu_Z = E[Z] \cong g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (20)$$

$$\sigma_Z^2 = E[(Z - \mu_Z)^2] \cong \sum_i \sum_j A_i A_j \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (21)$$

ただし,

$$A_i = \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{X_i = \mu_{X_i}} \quad (22)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] \quad (23)$$

なお X_i と X_j ($i \neq j$) が統計的に独立ならば,

$$\sigma_Z^2 \cong \sum_i A_i^2 E[(X_i - \mu_{X_i})^2] = \sum_i A_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (24)$$

また特殊な場合として $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が変数 X_1, X_2, \dots, X_n のすべてに関して1次の積もしくは商のみの形で表されている場合には, Z の変動係数 V_Z は各々の変数 X_i の変動係数 V_{X_i} を用いて,

$$V_Z^2 = \sum_i V_{X_i}^2 \quad (25)$$

と表すことができる。これを繰返し用いれば各設計変数の任意次数の積・商の形の場合に容易に拡張できる。

4.3 不確定性のモデル化

本節では不確定量をどのようにモデル化すればよいのかについて考える。

さて、任意の設計変数 X_i を考えよう。設計に際してはこの X_i のもつ変動性を何らかの情報に基づいて客観的に推測するわけであるから、そのような予測モデルを \hat{X}_i としよう。もちろんこの \hat{X}_i は情報量の不足あるいはモデル化の不備 (imperfection) のために真の X_i とは異なっているであろうと考えられるので、この差異を勘案した補正係数 (correction factor) N_{X_i} を導入して、

$$X_i = N_{X_i} \cdot \hat{X}_i \quad (26)$$

で表されるものとする。ここで、真の X_i のもつ本来的な (客観的) 変動性は推定モデル \hat{X}_i が代表するものとし、またモデル化の不備等に伴う (主観的) 変動性は補正係数 N_{X_i} に含まれるものとする。

さて、 \hat{X}_i は通常利用可能なデータもしくは他の情報に基づいて推定された標本平均 \bar{X}_i 、標本標準偏差 s_{X_i} をもつ確率変数と考えてよい。またその不確定性の程度は変動係数 $\delta_{X_i} = s_{X_i} / \bar{X}_i$ で評価することができる。一方、補正係数 N_{X_i} は主観的確率 (subjective probability) を基としたベイズ的な意味での確率変数であるとし、その平均値 \bar{v}_{X_i} が \bar{X}_i のもつ真の X_i の平均値からの偏り (bias) を代表するものとする。またその変動係数 Δ_{X_i} は厳密には推定モデル \hat{X}_i を選ぶことに関連したすべての誤差を含むべきものとする必要があるが、ここでは取り扱いの簡便さと近似手法としての意味からも、第1近似として \bar{X}_i の推定誤差のみを反映させて考えることにする。すなわち、

$$N_{X_i} = \mu_{X_i} / \bar{X}_i \quad (27)$$

ここに μ_{X_i} は平均値 $\bar{v}_{X_i} \bar{X}_i$ をもった、ベイズ的な意味での確率変数として考える。換言すれば、 N_{X_i} に関しては

$$E[N_{X_i}] = \bar{v}_{X_i} \quad (28)$$

であり、その変動係数 Δ_{X_i} は μ_{X_i} / \bar{X}_i の変動係数として求めることができる。

上述のように、設計変数 X_i を式 (26) のような形でモデル化したとき、 N_{X_i} と \hat{X}_i はそれぞれ平均値 \bar{v}_{X_i} 、 \bar{X}_i 、および変動係数 Δ_{X_i} 、 δ_{X_i} をもち、したがって N_{X_i} と \hat{X}_i が互いに統計的に独立であるとすれば、 X_i の平均 μ_{X_i} および変動係

数 V_{X_i} は、前小節に述べた1次近似の手法を用いて、

$$\mu_{X_i} \cong \bar{\nu}_{X_i} \bar{X}_i \quad (29)$$

$$V_{X_i} \cong \sqrt{\delta_{X_i}^2 + \Delta_{X_i}^2} \quad (30)$$

として算定することができる。式(30)の V_{X_i} が X_i のもつ全不確定性の指標を与える。なお、 X_i を N_{X_i} と \hat{X}_i の両者の積の形で表すこととした主旨は、この形が不確定性の解析の実施上便利であるということと、また通常、工学的問題における誤差を考える場合には、種々の補正係数を積の形で表すことが多いということをも勘案したものである。

ところで不確定性の解析に際しては設計変数それ自体の不確定性のみならず、目的関数 g 自身のもつ不確定性に関してもまた考慮する必要がある。すなわち通常は $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の真の姿は未知であろうから、その代用として1つのモデル関数 \hat{g} を用いていると考え、再びここでも補正係数 N_g を導入し、

$$g = N_g \cdot \hat{g} \quad (31)$$

とおく。 X_i の場合と全く同様の議論に基づいて、補正係数 N_g は平均値が $\bar{\nu}_g$ のベイズ的確率変数であり、この $\bar{\nu}_g$ は \hat{g} の平均的な偏りを表すものとする。換言すれば、比 g/\hat{g} の平均が $\bar{\nu}_g$ となることを意味する。また N_g の不確定性はその変動係数 Δ_g で表され、これはまた g/\hat{g} の変動係数として把握される。

一方、目的関数のモデル形 \hat{g} に関しては、これが確率変数であると考えられる場合には変動係数 δ_g を導入することによって、結局 g の全不確定性は

$$V_g \cong \sqrt{\delta_g^2 + \Delta_g^2} \quad (32)$$

で評価することができる。また、 g が通常よく見られるように決定論的関数であると考えられる場合には、 $\delta_g = 0$ とすればよいから、

$$V_g = \Delta_g \quad (33)$$

となる。

以上、各設計変数 X_i と目的関数の形 g のもつ不確定性を総合的に考慮することによって、式(20)と(21)に与えた目的関数 Z の1次近似手法による平均 μ_Z と分散 σ_Z^2 は以下のように求めることができる。

$$\mu_Z \cong \bar{v}_g \cdot \hat{g}(\mu_{X1}, \mu_{X2}, \dots, \mu_{Xn}) \tag{34}$$

$$\sigma_Z^2 \cong (V_g \mu_Z)^2 + \sum_i \sum_j \rho_{ij} A_i A_j \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \tag{35}$$

ここに, $\mu_{X_i} = \bar{v}_{X_i} \bar{X}_i$ (36)

$$\sigma_{X_i} = \mu_{X_i} V_{X_i} \tag{37}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ij} &= \text{Cov}(X_i, X_j) / (\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}) && (i \neq j \text{ のとき}) \\ &= 1 && (i = j \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

$$A_i = [\partial \hat{g} / \partial X_i]_{X_i = \mu_{X_i}} \tag{39}$$

式(38)の ρ_{ij} は X_i と X_j の相関係数 (coefficient of correlation) である。

4.4 機械・構造物の信頼性設計

これまで述べてきたように、信頼性設計に際しては荷重(応力)と抵抗力(強度)の分布特性を明確にし、両者を信頼度 γ で結びつけるという操作が不可欠である。

さて、実際の設計においては一般に荷重 S と抵抗力 R とはそれぞれ別々の立場から決定されることが多いので、ここでは S と R とはそれぞれ別々の設計変数の関数として与えられるものとしよう。すなわち、

$$S = g_S(S_1, S_2, \dots, S_m) \tag{40}$$

$$R = g_R(R_1, R_2, \dots, R_n) \tag{41}$$

ここに $S_i (i=1, 2, \dots, m)$ および $R_j (j=1, 2, \dots, n)$ は S および R を決めるためのランダムな設計変数である。しかるときは前小節の考え方と同様にして、 R および S に関する全不確定性を次式のように解析することができる。

$$\mu_S \cong \bar{v}_{g_S} \cdot \hat{g}_S(\mu_{S1}, \mu_{S2}, \dots, \mu_{Sm}) \tag{42}$$

$$V_S^2 \cong V_{g_S}^2 + \frac{1}{\mu_S^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_{ij} B_i B_j \sigma_{S_i} \sigma_{S_j} \tag{43}$$

$$\mu_R \cong \bar{v}_{g_R} \cdot \hat{g}_R(\mu_{R1}, \mu_{R2}, \dots, \mu_{Rn}) \tag{44}$$

$$V_R^2 \cong V_{g_R}^2 + \frac{1}{\mu_R^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij} C_i C_j \sigma_{R_i} \sigma_{R_j} \tag{45}$$

ここに ξ_{ij}, η_{ij} は S および R に関する式(38)と同様な相関係数、また B_i, C_i は式(39)と同様な係数である。したがって図5に示したように、古典的信頼

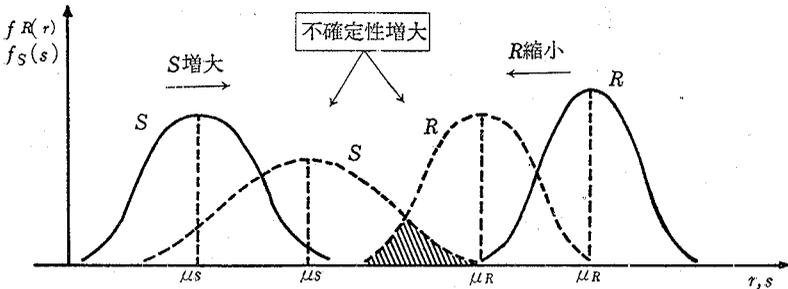


図5. 破壊確率 p_f の動向

性理論の場合と同様、 S と R との密度関数の係わりにおいて破壊確率 p_f を概念的に捕えることができる。すなわち中央安全率 $Q_0 = \mu_R / \mu_S$ が大となれば p_f は減少し（信頼度は増大し）、逆に S もしくは R の不確定性が増大すれば p_f は増加（信頼度は減少）する。このことを目的関数 Z の種々の定義式との関連において具体的に表示したのが表2である。なお同表においては S と R とは統

表2. 種々の目的関数 Z の定義と破壊確率 p_f

| Z の定義式 | | $Z = \ln R/S$ | $Z = R - S$ | $Z = R/S$ |
|----------------------|--|--|---|---|
| 判定レベル | | $z_0 = 0$ | $z_0 = 0$ | $z_0 = 1$ |
| Z の平均値 μ_Z | | $\ln \frac{\mu_R}{\mu_S} = \ln Q_0$ | $\mu_R - \mu_S$ | Q_0 |
| Z の標準偏差 σ_Z | | $\sqrt{V_R^2 + V_S^2}$ | $\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ | $Q_0 \sqrt{V_R^2 + V_S^2}$ |
| 破壊確率 p_f | $\xi = \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}$ の分布関数 $F_c(\xi)$ を用いた場合 | $F_c\left(\frac{-\ln Q_0}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$ | $F_c\left(\frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)$ | $F_c\left(\frac{1 - Q_0}{Q_0 \sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$ |
| | ξ が $N(0, 1^2)$ に従う場合 | $1 - \Phi\left(\frac{-\ln Q_0}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$ | $1 - \Phi\left(\frac{Q_0 - 1}{\sqrt{Q_0^2 V_R^2 + V_S^2}}\right)$ | $1 - \Phi\left(\frac{Q_0 - 1}{Q_0 \sqrt{V_R^2 + V_S^2}}\right)$ |
| 備考 | | 平均 R μ_R S μ_S | 標準偏差 σ_R σ_S | 変動係数 V_R V_S 中央安全率 $Q_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S}$ |

計的に独立として取り扱ってある。もちろん本手法においては S と R との分布特性としてそれぞれの平均値および標準偏差もしくは変動係数のみを用いる

ことよって、目的関数 Z の分布特性を同じく平均値と標準偏差もしくは変動係数という形で捕えて評価しているわけであるから、 S と R に関与した全設計変数 S_i および R_j の密度関数および g_s と g_r の関数形が与えられるのでなければ、 Z の正確な分布形は未知であり、したがってそれを正規化した変数

$$\xi = (Z - \mu_Z) / \sigma_Z \tag{46}$$

の分布関数 $F_\xi(\xi)$ の正確な形も未知である。しかしながら不確定性を本来の客観的なものと人為的・主観的なものとに分けて取り扱った Ang らの結果 (図 6) によれば、破壊確率 p_f は分布形の影響をそれほど受けなくなるようになること、およびある分布形を仮定した場合には、信頼度の評価が相対的尺度によってしかできないといえども、その相対評価が実用上の合理性を欠くものでは決してないこと等を鑑みて、式 (46) の ξ の分布として標準正規分布を採用した場合の対応する結果を表 2 中に併せて示しておいた。

さて、ここで設計許容信頼度 γ_a が与えられたとしよう。対応する許容破壊確率は

$$p_{fa} = 1 - \gamma_a \tag{47}$$

で与えられる。したがって信頼性設計のためには

$$p_f = P\{Z \leq z_0\} = F_\xi\left(\frac{z_0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \leq p_{fa} (= 1 - \gamma_a) \tag{48}$$

が満足されなければならない。それゆえ

$$(z_0 - \mu_Z) / \sigma_Z \leq -\beta, \text{ つまり } \mu_Z \geq z_0 + \beta\sigma_Z \tag{49}$$

$$\text{ここに, } \beta = -F_\xi^{-1}(p_{fa}) = -F_\xi^{-1}(1 - \gamma_a) \tag{50}$$

は信頼性指標 (reliability index) と名付けられるものである。 ξ が $N(0, 1^2)$ に従

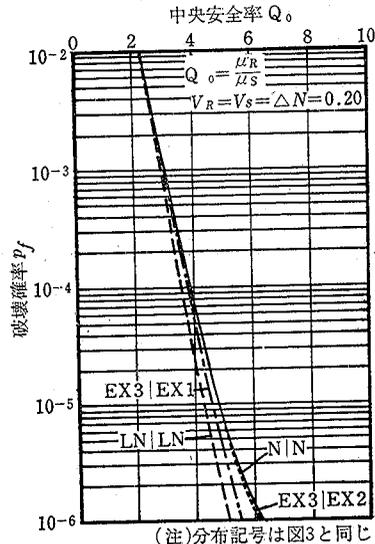


図 6. 不確定性の分離と破壊確率

うときには

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_{fa}) = -\Phi^{-1}(1 - \gamma_a) = \Phi^{-1}(\gamma_a) \tag{51}$$

となるから、 β を信頼性指標と呼ぶ意義が明らかである。式(49)が信頼性設計の基準式を与える。なお、信頼性指標 β の中央安全率 Q_0 への対応は目的関数 Z の定義式と正規化変数 ω の分布形状に依存することは明白である。例えば、 $Z = \ln(R/S)$ と定義し、かつ ω が標準正規分布 $N(0, 1^2)$ に従うとした場合には、表2の結果および式(51)から

$$\beta = \frac{\ln Q_0}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}}, \text{ つまり } Q_0 = e^{\beta\Omega} \tag{52}$$

ここに Ω は全不確定性であって、

$$\Omega = \sqrt{V_R^2 + V_S^2} \tag{53}$$

で与えられるものである。なお、式(51)から β と p_{fa} との関係を示せば次表3の如くとなる。

表3. 破壊確率と信頼性指標との関係 (標準正規分布の場合)

| p_{fa} | 10^{-1} | 10^{-2} | 10^{-3} | 10^{-4} | 10^{-5} | 10^{-6} | 10^{-7} | 10^{-8} |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| β | 1.28 | 2.33 | 3.09 | 3.72 | 4.25 | 4.75 | 5.20 | 5.60 |

また、 $Z = R - S$ とした場合には β は次式で与えられる。

$$\beta = (Q_0 - 1) / \sqrt{(Q_0 V_R)^2 + V_S^2} \tag{54}$$

なお、 γ_a もしくは p_{fa} の値をいくらに選ぶかについては、理想的には機械・構造物が破壊した場合に受けるであろう経済的・社会的な影響・損害と企画、設計を含めての建設費との相対比較の中で、機械・構造物がもつ重要度や耐用期間の長さなども考慮して決める必要があるであろうが、一般に、土木構造物のような場合にはこれらの諸因子を数量化することが極めて困難であり、必然的に p_{fa} や γ_a の定量的な設定については技術者の経験的な判断に頼らざるをえないという場合も多い。このような観点から鑑みると、先に p_{fa} や γ_a を与えて信頼性指標 β を求めるという立場とは逆に、 β を先に定義し (C. A. Cornell の立場; この場合には β は安全性指標 (safety index) と呼ばれている), 安全

性の尺度とするということも考えられる。いずれにしてもこの種の判断は設計者自身の主観的な判断に委ねられているものと言えよう。

4.5 既存設備の信頼性解析と評価

以上に述べた信頼性設計手法は既存の機械・構造物の信頼性解析にも応用することができる。このことを以下の簡単な例題によって示すことにしよう。

〔解析例題〕 図7に示すような一様分布荷重(例えば雪荷重) W に耐えるように設計されている一端固定の木製の片持ち梁がある。長さは $L=4000\text{mm}$ 、断面は $B=100\text{mm}$ 、 $T=300\text{mm}$ の矩形断面とする。

さて、自由端許容最大たわみを $f_a=60\text{mm}$ とするとき、この梁の信頼度を解析・評価せよ。ただし、これまでの一様分布荷重負荷の推定結果として、標本平均値 $\bar{W}=0.3\text{kg/mm}$ 、変動係数 $\delta_w=0.20$ となることがわかっており、また木材のヤング率 E に対しては $\bar{E}=1000\text{kg/mm}^2$ 、 $\delta_E=0.15$ が与えられている。なお、梁の長さ L は簡単のため変動性をもたない確定量と考えてよい。

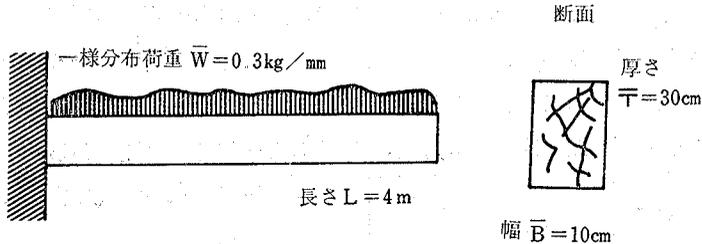


図7. 一様分布荷重を受ける片持ち梁

〔考え方〕 ここで問題とされている機能は先端のたわみであるから、目的関数 Z として一様分布荷重 W を受ける長さ L の一端固定梁の自由端の変位式

$$Z = -WL^4 / (8EI) \tag{55}$$

を採用する。負の符号をつけたのはたわみが増加すれば機能が減少すると考えられるからである。上式の目的関数 Z に対して最小機能レベル(判定点)は $z_0 = -f_a = -60$ (単位はmm)となる。

Z の正規化変数 ξ の分布関数を $F_\xi(\xi)$ とすれば、求める信頼度 γ は、

$$\gamma = 1 - \hat{p}_f = P\{Z > z_0\}$$

ここに、
$$= 1 - F_c\left(\frac{-60 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \tag{56}$$

$$\mu_Z = -\bar{v}_g \cdot \frac{\mu_W L^4}{8 \mu_E \mu_I} \tag{57}$$

$$\sigma_Z = V_Z \cdot |\mu_Z|$$

$$V_Z = \sqrt{V_W^2 + V_E^2 + V_I^2 + V_g^2}$$

V_g = たわみ公式の不備による不確定性

以下各変数の不確定性を解析する。

(a) W の不確定性

$\bar{W} = 0.3 \text{ kg/mm}$, $\delta_w = 0.20$ と与えられているが、この \bar{W} は限られたデータからの推定とみなされるから、 $\pm 15\%$ ($= \pm 0.045 \text{ kg/mm}$) は変化するであろうと (主観的に) 考える (もちろんこの値は解析者の手持ちの情報・経験の量に依存して変えられるべき性質のものである)。したがって W の真の平均 μ_W は $0.255 \sim 0.345 \text{ kg/mm}$ の間のどこかに存在する。今の場合、過去の経験や手許の情報を参照してもなお、 μ_W がどこか特定の領域で特に存在しやすいという強い信念が得られないものとするれば、この範囲内では μ_W は一様分布に従うものと考えてよいであろうから (このような意味で先に μ_W がベイズの確率変数であると言ったわけである)、図8に示した一様分布の性質から、

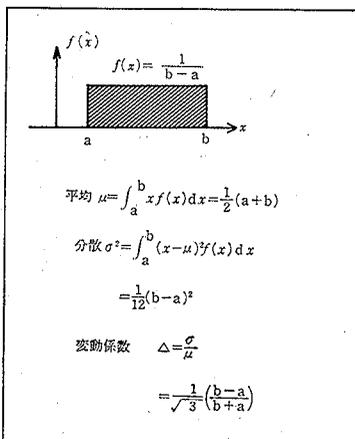


図8. 一様分布の性質

$$E[\mu_W] = \bar{v}_W \bar{W} = 0.3 \text{ (kg/mm)} \tag{58}$$

すなわち

$$\bar{v}_W = 1.00 \text{ (}\bar{W}\text{は偏りが無い)}$$

$$\Delta_w = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(0.345 - 0.255)}{(0.345 + 0.255)} = 0.087 \tag{59}$$

を得る。それゆえ W の全不確定性は

$$V_W = \sqrt{\delta_w^2 + \Delta_w^2} = 0.218 \tag{60}$$

となると考えられる。

(b) I の不確定性

材料力学の公式から、幅 B , 厚さ T の矩形断面の梁に対しては $I = BT^3/12$

である。 I の不確定性を求めるには寸法 B , T の不確定性が必要となるが、これらの寸法はかなり正確に製作されるであろうと考え、 $\delta_B = \delta_T = 0.05$ と仮定する。また簡単のため \bar{B} , \bar{T} には偏りがなく、 $\Delta_B = \Delta_T = 0$ としよう。しかるときは I の客観的不確定性 δ_I は

(イ) B と T が独立のとき $\delta_I^2 = \delta_B^2 + (3 \delta_T)^2$

(ロ) B と T が完全相関のとき $\delta_I^2 = (\delta_B + 3 \delta_T)^2$

ここでは B と T は完全相関すると考えて、 $\delta_I = 0.200$ を得る。また、 \bar{I} には偏りがなく、かつ I を求める関数形にも不備がないと考えてよいから

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_I &= 1.00, \Delta_I = 0, \\ \mu_I &= \bar{\nu}_I \bar{I} = 2.250 \times 10^8 (\text{mm}^4) \\ V_I &= \delta_I = 0.200 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

(c) E の不確定性

$\bar{E} = 1000 \text{kg/mm}^2$, $\delta_E = 0.15$ と与えられているが、木材のヤング率 E は使用木材の材質や環境例えば湿度の影響を受けて変動すると考えられるので、 E は $\pm 10\%$ は変化しうるものと仮定する。 W のときと同じように、この間では真の μ_E は一様分布するものと考えて、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_E &= 0.10 / \sqrt{3} = 0.058 \\ V_E &= \sqrt{\delta_E^2 + \Delta_E^2} = 0.161 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

を得る。さらに与えられた \bar{E} は恐らくは実験室的標本試験によるものが一般であろうから、実用状態ではこの値よりも小さいものと考えてよいであろう。この減少量を 5% と仮定すれば、 \bar{E} の偏りを表すものとして次の値を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_E &= 0.95 \\ \mu_E &= \bar{\nu}_E \bar{E} = 950 (\text{kg/mm}^2) \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

(d) 目的関数形 g の不確定性

これは $\hat{g} = -WL^4 / (8EI)$ とみなすことの不正確さを表すものである。事実、 \hat{g} の式は完全弾性体、一端完全固定、および完全一様分布荷重を仮定した理想状態に対応するものであるが、現実にはこのような条件は必ずしも満足されないのが普通である。

そこで注意深く一様分布荷重を荷重した木製片持ち梁を用いて先端たわみの測定実験を行ってみたところ、観測値と上記 \hat{g} の式による計算値との比が表4のようになったとしよう。この相違は完全弾性体、完全一端固定の条件に対する不備を表すものと考えられ、この場合の \hat{g} の偏りと不確定性は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_{g1} &= 1.061 \\ \Delta_{g1} &= 0.068 / 1.061 = 0.064 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

として求められる。

さらに第3の条件、すなわち完全一様分布荷重の仮定に対する不完全さについて考えれば、現実の載荷状態は例えば図9のような両極端に変わりうるであろう。

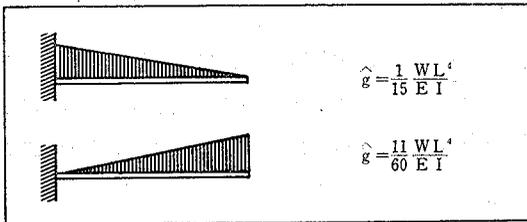


図9. 載荷状態の変動

この両極端の間で、先の W や E の場合と同じ考え方から、一様確率分布を仮定すれば、この場合に対する \hat{g} の偏りと不確定性は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_{g2} &= \left\{ (1/15 + 11/60) / 2 \right\} / (1/8) = 1.00 \\ \Delta_{g2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{11/60 - 1/15}{11/60 + 1/15} \right) = 0.269 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

以上により、結局目的関数形 g のもつ全不確定性は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_g &= \bar{\nu}_{g1} \cdot \bar{\nu}_{g2} = 1.061 \\ V_g &= \sqrt{\Delta_{g1}^2 + \Delta_{g2}^2} = 0.277 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

各変数に関する以上の不確定性解析を通じて本例題に対する信頼性解析と評価が可能となる。すなわち、

$$\mu_Z = -\bar{\nu}_g \cdot \frac{\mu_W L^4}{8 \mu_E \mu_I} = -47.65 \text{ (mm)} \quad (67-a)$$

表4. 観測値と計算値の比

| 実験番号 | (観測値) |
|------|-------|
| | (計算値) |
| 1 | 1.10 |
| 2 | 0.96 |
| 3 | 0.99 |
| 4 | 1.05 |
| 5 | 1.02 |
| 6 | 1.13 |
| 7 | 1.09 |
| 8 | 1.15 |
| 平均 | 1.061 |
| 標準偏差 | 0.068 |

$$V_Z = \sqrt{V_W^2 + V_E^2 + V_I^2 + V_G^2} = 0.436 \quad (67-b)$$

$$\sigma_Z = |\mu_Z| V_Z = 20.78 \quad (67-c)$$

正規化変数 z の分布関数 $F_c(z)$ に関する情報は今の場合何もないので、ここでは標準正規分布 $\Phi(u) = N(0, 1^2)$ を用いることにすれば、求める信頼度 γ は

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - \Phi\{(-60 + 47.65)/20.78\} \\ &= 1 - \Phi(-0.594) = 0.7237 \end{aligned} \quad (68)$$

5. おわりに

信頼性に基づいた強度設計の考え方として、設計変数のもつ不確定性を客観的なものと主観的なものとに分離してモデル化し、1次近似の手法を用いて信頼性設計を行う A.H.S. Ang の考え方について論じ、信頼性設計に際して主観的確率を導入することの利点と制約を明確とした。また本手法を用いて既存設備の信頼性解析を行う手順を簡単な例題によって示した。信頼性の考え方は近年非常に関心を見るに至り、広範な研究が行われ始めている。もとより本稿はそれらのすべてを包括するものではないが、基本的立場として信頼性をどのように捕え、それを設計に反映させて行くべきかという点については詳しく論じたつもりである。

また本稿は主として荷重と抵抗力との係わりという立場から時間的には静的な側面から信頼性設計の在り方について論じたものである。複雑な機械・構造物の設計という観点からは構造物信頼度の各部材への配分問題、繰返し荷重を受ける場合には時間的な強度劣化を考慮した疲労信頼性設計、さらには効率のよい設計のためには、複雑な設計変数の鋭敏度解析等が、いずれも重要な課題となってくるが、これらについての詳細は機会を見て別稿にて論じることとしたい。

最後に主観的な確率概念の導入という点についてももう少し触れておきたい。およそ、ある機械・構造物の設計を考える場合、設計時点ですべての条件が完全に明らかであるということはまずありえないであろう。したがって信頼性設計とはいわば不完全な情報と乏しい経験を基にして最大の合理性を追求して行

かざるをえない宿命にあると言えよう。情報が不完全であるからといってなござりな設計を行うことは技術者にとって許されることではない。むしろ不完全であればあるほど、たとえ相対的にせよ説明力のある合理性の追求が望まれ、この点に主観的確率(個人確率)の導入の基盤があり、かつまた確率論におけるベイズの定理が有用となる一因でもある。技術者は自己の信念の下に主観的なある判断を下す。その後の情報の追加を見る度に、自己の主観的な判断を修^(15~17)正し、より客観的な真実への接近を図るべく努力を続けて行く必要がある。

参 考 文 献

- (1) 高木 昇, 「信頼性に使われる用語」, 日本機械学会誌, 74—633 (1971), pp. 1326 ~1330.
- (2) 宮内一郎, 堀井健二, 「信頼性活動に使われる規格」, 日本機械学会誌, 74—633 (1971), pp. 1331~1335.
- (3) 例えば, MIL-STD-1304, “Reliability Report,” (1966).
- (4) Freudenthal, A. M., “The Safety of Structures,” Trans. ASCE, 112 (1947), p. 125.
- (5) ASCE, Proc. of Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, Tucson, Az., USA, (1979—1).
- (6) 石川 浩, 「実働荷重に対する機械・構造物疲労寿命の信頼性解析 (I)~(VIII)」, 日本材料学会誌, 24巻259号~266号 (1975—4~11).
- (7) 小西一郎, 篠塚正宣, 「鋼橋——基礎編II」, (1977—9), p. 805, 丸善.
- (8) 白石成人, 「信頼性工学の基礎理論」, 信頼性工学の基礎と構造工学的应用に関する講習会教材, (1979—12), p. 1, 日本材料学会.
- (9) Ang, A. H-S., “Extended Reliability Basis of Structural Design under Uncertainties,” Annals of Reliability and Maintainability, Vol. 9 (1970).
- (10) Ang, A. H-S., Amin, N., “Safety Factors and Probability in Structural Design,” Proc. ASCE, 95—ST 7 (1969).
- (11) Cornell, C. A., “A Probability-Based Structural Code,” Journal of ACI, 66—12 (1969).
- (12) Ang, A. H-S., “Reliability Bases of Structural Safety and Design,” Proc. ASCE, 100—ST—9 (1974), p. 1755.
- (13) 岡村弘之, 板垣 浩, 「材料強度の統計的取り扱い」, (1979), 培風館.
- (14) 中川隆夫, 「信頼性工学の基礎」, 日本機械学会中四国支部特別講演会講演集, (1980), pp. 32~49.

- (15) 木村 等, 石川 浩, 「確率の概念とベイズの定理」, 香川大学経済論叢, 53-1 (1980-6), pp. 1~58.
- (16) 中川隆夫, 「ベイジアン信頼性解析」, 文献(8)の p. 14~22.
- (17) 板垣 浩, 「構造物の信頼性について」, 日本機械学会誌, 78-679 (1975-6), pp. 496~503.
- (18) 唐津 一, 「技術者の基礎知識としての信頼性」, 日本機械学会誌, 74-633 (1971-10) pp. 1219~1224.