木構造上における f^{-1} 型スペクトルを有するパターンについて

正員　堀川　洋[†]

On Patterns with f^{-1} Spectrum on a Tree Structure

Yo HORIKAWA[†], *Member*

[†] 長崎総合科学大学工学部機械工学科，長崎市
Faculty of Engineering, Nagasaki Institute of Applied Science, Nagasaki-shi, 851-01 Japan

あらまし　木構造を持つ開放系において生成される，f^{-1} 型スペクトルを有する空間パターンについて考察する．

1. まえがき

パワースペクトルが周波数に反比例する $1/f$ ゆらぎは，その波形（パターン）が自己相似性を持つ．そのため，自己相似構造を持つ系において，f^{-1} 型スペクトルを有するパターンが得られる場合がある[1]．本稿では，本構造ネットワーク上における信号（情報）伝送に関連した，f^{-1} 型スペクトルを有する正規性および2値の空間パターンを生成するモデルを示す．

2. 生成モデル

図1に示すような，N 層の木構造ネットワークを考える（分岐数は2，各層は1次元とするが，m^d 分岐（d 次元）の場合にも自然に一般化できる）．ここで，例えば，branch において同じ分布に従う加法的ゆらぎ（ノイズ）が加わるような，最上位 node（O 層）から N 層へ向かっての flow（情報伝送など）を考える．それにより，N 層の node 上に次のような空間系列：$\{y_N(k)\}(1\leqq k\leqq 2^N)$ が生成される．

$$y_N(k)=y_0+\sum_{n=1}^{N}x_n(k) \tag{1}$$

（但し，y_0：O 層における値，x_n：branch $(n-1\to n)$ において加わるゆらぎ（～i. i. d.），n についての和は O 層から各 node への道（一意的）について取る．）

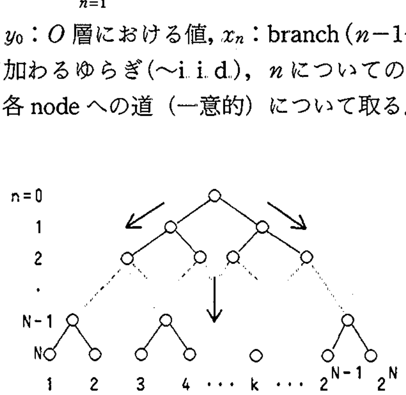

図1　2分木構造
Fig. 1　A binary tree structure.

$\{y_N(k)\}$ は，$N\to\infty$ において，正規分布を持つ1次元パターンとなるが，そのパワースペクトルが f^{-1} 型になることを以下に示す．まず，O 層からの flow の道が n 層まで共通で $n+1$ 層から分岐するような，二つの node における値の間の相関：$G(n)$ は，次のようになる．

$$\begin{aligned}G(n)&\equiv E\{(y_0+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_N)\\&\quad\cdot(y_0+x_1+\cdots+x_n+x'_{n+1}+\cdots+x'_N)\}\\&=y_0{}^2+2Ny_0E\{x\}+nE\{x^2\}\\&=n\end{aligned} \tag{2}$$

但し，$y_0=0$, $E\{x\}=0$, $E\{x^2\}=1$ とした．これを用いて，相関関数（k について平均による）：$\rho(k')\equiv E_k\{y_N(k)\cdot y_N(k+k')\}(1\leqq k'\leqq 2^{N-1})$ は，$k'=2^j(0\leqq j\leqq N-1)$ とおいて，次のように近似される．

$$\begin{aligned}\rho(2^j)&=\sum_{n=j}^{N-1}2^nG(n-j)/\sum_{n=j}^{N-1}2^n\\&=\{(N-j-2)2^{N-j}+2\}/\{2^{N-j}-1\}\\&\sim N-2-j\qquad(N-j\to\infty)\\\rho(k')&\sim N-2-\log_2 k'\end{aligned} \tag{3}$$

このように，$\{y_N(k)\}$ は，$k'\ll 2^N$ のところで log 型の相関を持ち，f^{-1} 型スペクトルを有することがわかる．一般に，m^d 分岐の場合にも $\rho(k')\sim N-2-\log_m k'$ となり，パワースペクトル（1次元）はやはり f^{-1} 型となる．

次に，node がしきい値作用を持つときには，2値パターンが得られる．例えば，y_n：node への入力，y_n'：node の出力として，

$$\begin{aligned}y_n'&=1,\quad y_n\geqq Y\\&\;0,\quad y_n<Y\quad(Y:\text{const.})\end{aligned} \tag{4}$$

とすれば，$\{y_N(k)\}$ には $\{0,1\}$ の2値系列が生成される．このようなしきい値作用はゆらぎを'リセット'するため，一般に相関は小さくなるが，次のような特別な（興味ある）場合には，生成される2値パターンは f^{-1} 型スペクトルを有する．

$$\begin{aligned}y_n'&=1,\quad y_n\geqq 1\\&\;0,\quad y_n<1\\y_0'&=1\\x_n&=0\quad,\quad \text{prob.}(1-p)\\&-\varepsilon,\quad \text{prob.}\ p\end{aligned} \tag{5}$$

これは，各 branch において確率 p で flow が阻害される場合を表している．先と同様にして，

$$\begin{aligned}G(n)&=(1-p)^n(1-p)^{2(N-n)}\\&=(1-p)^{2N-n}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\rho(2^j)=\sum_{n=j}^{N-1}2^n(1-p)^{2N-n+j}/\sum_{n=j}^{N-1}2^n$$

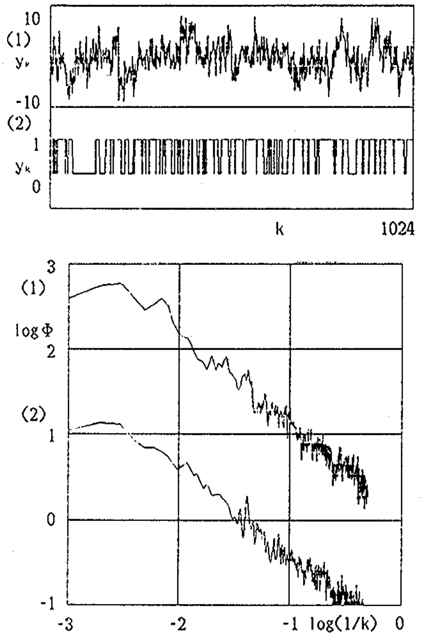

図2 f^{-1} スペクトルを持つ1次元パターンおよびそのパワースペクトル

Fig 2 Examples of one-dimensional pattern with f^{-1} spectrum $y_N(k)$ and corresponding power spectra ($\Phi(1/k)$)($m=2$, $d=1$, $N=10$)
(1) gaussian ($x_n \sim N(0,1)$) and (2) binary ($p=0.05$)

$$=(1-p)^{N+j+1}\{2^{N-j}-(1-p)^{N-j}\}/(1+p)(2^{N-j}-1)$$
$$\sim C(1-p)^j$$
$$\sim C(1-pj)$$
$$\rho(k')\sim C(1-p\log_2 k') \qquad (7)$$

(但し，$N\to\infty$, $p\to 0$, $(1-p)^N=C$)となる．従って，$\{y_N\}$ は，観測可能(C：有限)な場合には常に，式(3)と同形の相関を持つことが分かる．

この生成規則は，Mandelbrot の凝乳化過程[2]と同じものであり，パターン中の1の領域は，ハウスドルフ次元：$d_f=d+\log_m(1-p)$ を持つ（m^d 分岐の場合）．また，0の領域の直径：L の分布は，領域同士の重なりを無視すると，次のようなべきの形になる．

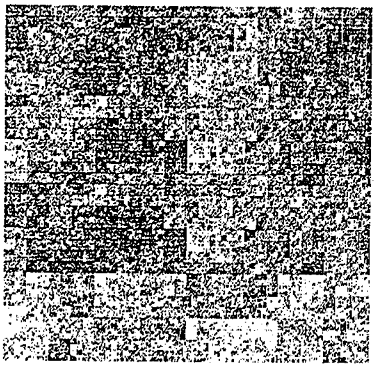

図3 f^{-1} スペクトルを持つ2次元パターン

Fig 3 An example of two-dimensional pattern ($m=2$, $d=2$, $N=8$)

$$P_r\{L=k'(=m^j)\}\propto p\{m^d(1-p)\}^{N-j-1}$$
$$\sim k'^{-d_f} \qquad (8)$$

図2，3に，計算機シミュレーションによって得られたパターンおよびそのパワースペクトル(FFT による)を示した．$\rho(k')=0(k'\geqq 2^{N-1})$ であるため，低周波領域においてスペクトルは flat になる．

3. むすび

自己相似構造（木構造）を持つ開放系（flow，外部からのゆらぎ，node の能動性などを有する）において，f^{-1} 型スペクトルを有する空間パターンが生成されることを示した．このような系は情報処理システムと深く関連し，特に，生体と $1/f$ ゆらぎとの結び付きにおいて[3]，神経系情報処理との関連が興味深い．

文献

(1) H. Furukawa: "Universal spectra of quasirandom objects produced by off-equilibrium space divisions", Phys. Rev. A, 34, 3, pp. 2315-2323 (Sept. 1986).

(2) B. B. Mandelbrot: "The Fracal Geometry of Nature", Freeman, New York (1983). 広中平祐監訳："フラクタル幾何学"，日経サイエンス社(1985)

(3) 武者利光："生体情報と $1/f$ ゆらぎ"，応用物理，54, 5, pp. 429-435 (1985).

(昭和62年9月7日受付)