

ショートノート

階層的信号処理と1/f スペクトル

正員 堀川 洋†

Hierarchical Signal Processing and 1/f Spectra  
Yo HORIKAWA† Member

† 長崎総合科学大学工学部情報制御工学コース, 長崎市  
Faculty of Engineering Nagasaki Institute of Applied Science  
Nagasaki-shi 851-01 Japan

あらまし 時間・周波数領域の階層的分割信号処理系と, 1/f スペクトルとの関係について考察する。

1. まえがき

信号の圧縮, 符号化, 特徴抽出などの処理 (特に画像処理の分野) において, 時間領域と周波数領域とに共に局在化した核による展開が利用される。

$$f(t) = \sum_m \sum_n c(m, n) \phi_{mn}(t) \quad (1)$$

ここで,  $\phi_{mn}(t)$  は, 時間領域に  $\Delta t_{mn}$  の広がりをもつ Fourier 変換が周波数領域に  $\Delta \omega_{mn}$  の広がりを持つ関数である (但し,  $\Delta t_{mn} \Delta \omega_{mn} \geq \pi$ ).  $m$  は時間方向,  $n$  は周波数方向の指数を表す (以下, 画像の場合には, '時間' を '空間' とされたい). 現実に取り扱う信号は有限長であるので, 応用上では全てのフィルタリング処理はこれに当てはまるともいえる (特に画像処理に関連した例を付録に示す).

ここで, この表現の特徴は, 時間・周波数平面において各展開核 ( $\phi_{mn}$ ) の覆う局在領域 (大きさ:  $t_{mn} \Delta \omega_{mn}$ ) の信号の情報が, その係数 ( $c(m, n)$ ) に割り当てられるとみなされることである. 従って, 例えば, 信号の圧縮 (無相関化) の観点からは, 予測法による逐次的処理と, 大域的直交変換を用いる並列的処理との中間的なものに当たる. また, 特徴抽出の観点からは, 信号の局所の特徴 (時間領域表現) と全体的特徴 (周波数領域表現) とを, 同時に (不確定性の範囲内で) 合わせ持つものといえる.

ところで, その展開核の配置, すなわち, 時間・周波数領域の分割には任意性がある. 信号の情報量の必要十分性からは,  $\Delta t_{mn} \Delta \omega_{mn} = \pi$  なる方形領域に一つの核を対応させれば数学的には完全性を持つが, 応用上では, 対象や目的 (例えば, 人間の視覚特性) をも含めて考える必要がある. そのとき, 時間的に一様な展開, すなわち周波数帯域分割型のもので ( $\Delta \omega_{mn} = \Delta \omega_n \equiv \omega_{n+1} - \omega_n$ ), 相対帯域幅を一定 ( $B_{oct} \equiv \omega_{n+1} / \omega_n : \text{一定}$ ) とする分割による展開が広く用いられる. この展開は,  $\omega \rightarrow n$  が対数変換となるので, スケール不変性を

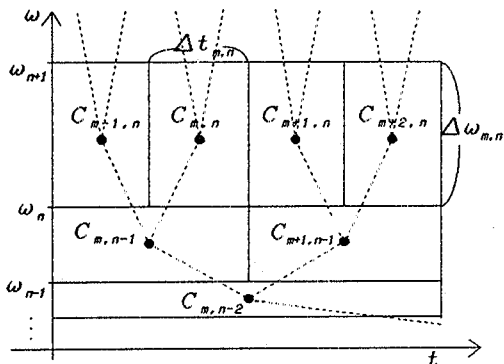


図1 階層的な時間・周波数領域分割 ( $B_{oct}=2$ )  
Fig. 1 Hierarchical tessellation of frequency-time space.

有することが特長である<sup>(6),(8)</sup>.

$$f(kt) = \sum_m \sum_n c(m, n - \log_a k) / k \phi_{mn}(t)$$

$$\phi_{mn}(t) = \sqrt{a^n} \psi(a^n t - dm)$$

$$(a, d : \text{const.}) \quad (2)$$

すなわち, 核の相似性により, 相似な波形の信号の展開は,  $n$  についてシフトしただけのものに (定数倍を除いて) なる. また, 工学的には, 再帰的なフィルタリング操作によるコンパクトかつ高速な処理を行うことができる<sup>(6)</sup>. 画像処理においては, ラプラシアンピラミッド<sup>(2)</sup>や差分ピラミッド<sup>(15)</sup>などが良く知られている.

ところで, この展開表現は, 時間・周波数平面において階層構造 (木構造, ピラミッド構造) を形成する (図1). 一方で, このような階層構造と 1/f スペクトル信号とは深く関係していることが知られている<sup>(3),(4)</sup>. 以下では, このような信号の展開表現における階層構造と 1/f スペクトルとの対応を示し, 生体情報処理との関連について述べる.

2. 等パワー帯域分割

ここでは, 展開核の選択に関して, 実際の処理系の構成として, 工学的な観点から次のような規準を与える. まず, 受動的な帯域通過フィルタ (通過域におけるゲインを1とする) によるフィルタリングそしてサンプリングを行うものとする. そして, 一つの帯域に対して1個の均一な素子を割り当てる (例えば, 各サンプリングデータを等ビット長で符号化する) ものとする.

このとき, サンプリングに伴う誤差 (離散化誤差など) を2乗平均の意味で最小にする分割は, 各帯域内における信号のパワーが等しくなるような分割である

(但し、信号のパワースペクトル密度は、各帯域内において一定値で近似されるものとする)。この条件は、各帯域に等しい重みを置いたときの、分割のエントロピーの最大条件でもある。

この等パワー帯域分割： $\{\omega_n\}$  は、信号のパワースペクトル密度： $S(\omega)$  が既知であるならば、次式で与えられる。

$$\int_{\omega_n}^{\omega_{n+1}} S(\omega) d\omega = G(\omega_{n+1}) - G(\omega_n) = a$$

$$\omega_n = G^{-1}(an + d)$$

$$(dG(\omega)/d\omega \equiv S(\omega) \quad a, d : \text{const.}) \quad (3)$$

特に、自己アフィンの信号に対しては、次のようなものとなる。

$$S(\omega) \propto \omega^{-b}$$

$$\omega_n = (an + d)^{1-b} \quad (b \neq 1)$$

$$\omega_n = da^n \quad (b = 1)$$

$$(a, d : \text{const.}) \quad (4)$$

あるいは、

$$\omega_n = \{(\omega_{n-1}^{1-b} + \omega_{n+1}^{1-b})/2\}^{1/(1-b)} \quad (5)$$

ここで、 $1/f$  スペクトル ( $b=1$ ) には、幾何数列 (相乗平均) による分割が対応するが、これは相対帯域幅一定なる分割に他ならない。すなわち、上の工学的規準の下で、相対帯域幅を一定とする階層構造を有する展開表現に対して、 $1/f$  スペクトル信号は各展開核に等パワーを分布するという意味で最適性を持つ (このことは、 $1/f$  スペクトル信号の、Allan 分散の一定性<sup>(13)</sup>、Weierstrass-Mandelbrot 関数による構成<sup>(1)</sup>などと対応している)。

なお、白色雑音型 ( $b=0$ ) に対して等差数列 (相加平均) が、ブラウン運動型 ( $b=2$ ) に対して調和数列 (調和平均) が対応することも興味深い。

### 3. 神経系情報処理との関連

人間の視覚、聴覚、体性感覚などにおける、さまざまな‘快い’刺激パターンは、 $1/f$  スペクトル特性を持つことが知られている<sup>(7)</sup>。

生体における感覚情報は均質な神経細胞群の出力パターンとして符号化されることを考えれば、2.における議論は、神経系に対して適用することができよう。そして、階層的展開における相対帯域幅の一定性および対数変換特性は、生体に特徴的な Weber-Fechner 型の法則に対応する。これは、感覚の強度や周波数特性の符号化においては、受容器レベルから心理レベルにわたって (近似的にはあるが) 広く見られるものである<sup>(11)</sup>。また、その再帰性により、パルス列処理に

おいては、積分発火型素子の縦続による構成が可能でもある。

これらのことは、神経系における感覚情報の普遍的な処理としての、階層構造的な周波数解析機構の存在を示唆する。そして、生体における  $1/f$  ゆらぎの‘丁度良さ’は、その場合、等パワー性 (エントロピー最大条件) として定式化される。

### 4. むすび

階層構造と  $1/f$  スペクトルとの関係の一つとして、信号の時間・周波数領域分割処理系において、一般的な工学的規準の下で、相対帯域幅を一定とする階層構造を有する展開表現に対して、 $1/f$  スペクトル信号が最適性を持つことを示した。

### 文 献

- (1) M V. Berry and Z V. Lewis: "On the weierstrass-mandelbrot fractal function", Proc. R. Soc. London Ser. A, **370**, pp 459-484 (1980).
- (2) P. J. Burt and E. H. Adelson: "The laplacian pyramid as a compact image code", IEEE Trans Commun., **COM-31**, 4, pp 532-540 (1983).
- (3) H. Furukawa: " $1/f$  noise spectrum on self-similar cascade of bifurcation processes", Phys. Lett. A, **110A**, 6, pp 316-318 (1985).
- (4) 堀川 洋: "木構造上における  $f^{-1}$  型スペクトルを有するパターンについて", 信学誌(A), **J71-A**, 4, pp 1054-1055 (昭 63-04).
- (5) J. J. Kulikowski, S. Marcelja and P. O. Bishop: "Theory of spatial position and spatial frequency relations in the receptive fields of simple cells in the visual cortex", Biol. Cybern., **43**, pp 187-198 (1982).
- (6) S. G. Mallat: "A theory for multiresolution representation", IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intell., **PAMI-11**, 7, pp 674-693 (1989).
- (7) 武者利光: "生体情報と  $1/f$  ゆらぎ", 応用物理, **54**, 5, pp 429-435 (昭 60-05).
- (8) M. Porat and Y. Y. Zeevi: "The generalized gabor scheme of image representation in biological and machine vision", IEEE Trans Pattern Anal. & Mach. Intell., **PAMI-10**, 4, pp. 452-468 (1988).
- (9) A. Rosenfeld and A. C. Kak: "Digital Picture Processing", Academic Press, London (1976). 長尾監訳: "デジタル信号処理", 近代科学社 (昭 53).
- (10) B. Sakitt and H. B. Barlow: "A model for the economical encoding of the visual image in cerebral cortex", Biol. Cybern., **43**, pp 97-108 (1982).
- (11) R. F. Schmidt ed.: "Fundamentals of Sensory Physiology", Springer, New York (1978). 岩村他訳: "感覚生理学", 金芳堂 (昭 55).
- (12) M. R. Turner: "Texture discrimination by Gabor filter", Biol. Cybern., **55**, pp. 71-82 (1986).
- (13) C. M. Van Vliet and P. H. Handel: "A new transform

theorem for stochastic processes with special application to counting statistics", *Physica*, 113A, pp. 261-276 (1982)

- (14) J. W. Woods and S. D. O'Neil: "Subband coding of images", *IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Process.*, ASSP-34, 5, pp. 1278-1288 (1986).
- (15) 安田靖彦, 高木幹雄, 加藤茂夫, 栗野友文: "階層的符号化法による静止画像の段階的伝送および表示", *信学論(B)*, J63-B, 4, pp. 379-386 (昭55-04).

### 付 録

画像処理において広く用いられる, 画像を空間的に分割した後各ブロックごとに各種の直交変換を行う手法<sup>(9)</sup>は, 核の空間的な局在性を利用する例である. 逆に, 周波数領域における局在性を利用するものとして, 周波数帯域分割処理がある<sup>(14)</sup>. これは, 基本的には帯域ごとの標本化関数(式(A・1))を核とする考え方であ

る.

$$\phi_{mn}(t) = \sin\{\pi(t/T_n - m)\} / (\pi(t/T_n - m)) \cdot \exp\{i \cdot W_n(t - mT_n)\}$$

$$W_n \equiv (\omega_{n+1} + \omega_n) / 2$$

$$T_n \equiv 2\pi / (\omega_{n+1} - \omega_n)$$

(A・1)

また, いわゆる多重解像度表現として, 種々の核が研究されている<sup>(6)</sup>. 特に, Gabor展開は, 核の Gabor関数(式(A・2))が最小の広がりを有する( $\Delta t_{mn} \Delta \omega_{mn} = \pi$ )ことや, 生体の視覚野における単純型細胞の受容野がそれにより良く近似されることなどから<sup>(5),(10)</sup>, 近年広く研究されている<sup>(6),(12)</sup>.

$$\phi_{mn}(t) = \exp\{-\pi(t/T - m)^2 / (2(\Delta t_{mn})^2) + i \cdot 2\pi n(t/T - m)\}$$

(A・2)

(平成2年5月2日受付, 8月20日再受付)