J. W. ケンドリックの総合生産性指数に関する一考察

大　藪　和　雄

目　　次

1. 序

これまで，生産性指数の中心的位置を占めてきたのは，生産量に労働投入量だけを対応させる形の労働生産性指数であった。(1)

これに対して，この小論でとりあげるケンドリックの総合生産性指数の構想

(1) 労働生産性指数は，賃金との関連が深い，人間が生産活動の主体である，労働は生産要素のうち最も普遍的であり比較的測定が簡単である，測定の歴史も古い，労働価値説的考え方などの理由からとくに問題にされる。

は，投入側に労働だけでなく同時に資本を考えるものである。これは，要素の代替による影響をできるだけ受けないような生産性指数を構成しようとの試みであって，資本のデータが比較的整備されはじめたこと，動態経済分析への関心が高まったことなどにも符合している。以下にのべるように，ケンドリックの総合生産性指数は，生産力の発展の量的な指標と考えることができる。ここで，生産力の発展とは，与えられた生産要素でより多くの生産物が得られること，あるいは，一定の生産物を得るのに，より少ない資源ですましうる状態になることである。

この小論の主たる目的は，第一に，ケンドリックによる総合生産性指数の算定が，算式の陽表的表示なしになされていることに注目し，ケンドリックの総合生産性指数の構造を示すと思われる指数算式を筆者なりに導出すること，第二に，導出された算式を変形することによって，ケンドリックの総合生産性指数の理解を理論的に深めることにある。(2)

この指数構想に基づく日本経済への実際的適用については，今はふれない。

2. ケンドリックの総合生産性指数算式の導出

前節にのべたように，ケンドリックは総合生産性指数の算式そのものを陽表的に示していないが，かれの計算過程から推論すれば，つぎのような展開順序にしたがってその算式を構成しているものと考えられる。

はじめに，つぎのような恒等式を考える。

$$\text{純所得} \equiv \text{単位当たり要素費用} \times \text{要素投入量} \times \frac{1}{\text{単位当たり要素必要量}} \quad (2.1)$$

しかも，この恒等式の各項に対応する指数を考える。いま，国民経済的に考えると，左辺は名目国民所得の指数であり，右辺の第1項は物価変動指数であり，第2項は，投入量変動指数であり，第3項は，残余項としての生産性指数に相当する。

(2) ドーマは，「この種の著書の批評家なら論究するであろう3つの主題がある。すなわち，(1)統計的データの出所，(2)方法上の骨組，(3)最も重要な結果内容に関するものがそれである。」([2]P.597) といっている。ここでは，(2)のみを取扱うことになる。

そして，以上4種の指数は，つぎの3条件を満たすものとする必要がある。
①各指数は総和法指数としてあらわされること。
②それぞれの指数に対するデータが，同じカバレッジを持つこと，すなわち，同一範囲に適用されること。
③各指数は斉合的に作られていること。すなわち，いずれの指数も，他の3指数から導出されること。

このような条件を満たす指数が合理的とされるのは，I・フィッシャーの算式テスト，とくに，要素転逆テストの要請に似かよっている。[3]

さて，記号の約束をつぎのように決める。q:生産量，l:生産物単位当たり必要労働量，e:平均時間当たり賃金，k:生産物単位当たり必要資本量，r:収益率，添字0，1は，それぞれ，基準時点，比較時点をあらわす。Σは合計することをあらわす。[4]

ここに，qleは，労働に対する支払総額をあらわし，qkrは，資本に対する支払総額をあらわす。qlは，労働の投入量をあらわし，qkは，資本の投入量をあらわす。そしてleは，生産物1単位当たりの労働費用，krは，生産物1単位当たりの資本費用に相当する。

以上のことを考慮して，上記の3条件を満たす指数の組を構成してみると，つぎの2組に限られることがわかる。[5]

$$\frac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}=\frac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}\cdot\frac{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}\cdot\frac{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)} \quad (2.2)$$

$$\frac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}=\frac{\Sigma q_0(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}\cdot\frac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_0(l_0e_1+k_0r_1)}\cdot\frac{\Sigma q_0(l_0e_1+k_0r_1)}{\Sigma q_0(l_1e_1+k_1r_1)} \quad (2.3)$$

---

(3) このような考え方は，Works Progress Administration National Research Project の労働生産性指数に関する研究にあらわれている。そして，上記のような恒等式と，3条件を前提にして，ケンドリックの総合生産性指数の算式が導出されるのではないかという示唆を得たのは，〔3〕，〔4〕，〔5〕などからであった。

(4) 合計の仕方は，産出，労働，資本それぞれ異なっているが，ここでは簡単のために，いちおう，共通のいくつかの産業部門を考え，それの合計をとることだと考えておこう。

(5) (2.2)式，(2.3)式の右辺の第3項の生産性指数以外に，$\frac{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma q_0(l_1e_0+k_1r_0)}$, $\frac{\Sigma q_1(l_0e_1+k_0r_1)}{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}$ が考えられるが，これらを用いて，(2.1)式を満たすような斉合的な指数の組を構成することはできない。

まず，（2.2）式について考えると，右辺の第1項は，q_1をウェイトにしたle，krの指数である。これは，いわば，パーシェ的総合物価指数[(6)]と考えることができる。第2項はe_0，r_0をウェイトにした，ql，qkの指数であり，いわば，ラスパイレス的投入量指数といえよう。第3項は，q_1e_0，q_1r_0をウェイトにしたl，kの指数の逆数であり，これこそケンドリックが意図したとみられる総合生産性指数に相当する。これは，生産物単位当たり必要労働量および生産物単位当たり必要資本量の節約の程度を示す指数とみることもできる。

つぎに，（2.3）式についてみると，右辺の第1項は，q_0をウェイトにしたle，krの指数であり，これは，ラスパイレス的総合物価指数である。第2項は，e_1，r_1をウェイトにしたql，qkの指数であり，パーシェ的投入量指数である。第3項は，q_0e_1，q_0r_1をウェイトにした，l，kの指数の逆数，すなわち，これもまた一種の生産性指数である。

3. ケンドリックの総合生産性指数の理解

3.1　実質投入量に対する実質産出量の比

最も常識的な生産性の定義は，「投入量1単位当たりの産出量」ということである。

経済理論上では，限界生産力説にみられるごとく，限界概念がとられてきたのに対し，実際の測定に関しては，上記のような平均概念がとられてきた。

投入として，ある特定の一要素をとる場合には，その要素の名を付した生産性が問われることになる。たとえば，労働生産性，資本の生産性，原材料の生産性などがそれである。これに対し，2つ以上の要素の総合生産性といわれるものは，たとえば，投入として，労働と資本を考え，両者を何らかの方法で総合し，これを産出と対比させるものである。ここに，異質的な投入をいかにして総合するかという問題が生ずる。

ケンドリックの総合生産性指数とみられる（2.2）式の右辺の第3項を変形すると，

---

(6) 厳密には，この用語は正しくない。生産物単位当たり付加価値総合指数とでもいうべきであろうか。

$$\frac{\Sigma q_1 \ (l_0 e_0 + k_0 r_0)}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 \dfrac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}} + \dfrac{\Sigma q_0 k_0 \dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}}{\dfrac{\Sigma q_0 k_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}}} \qquad (3.1)$$

労働と資本という，異質的な投入（たとえば，それぞれ，時間，ドルで測られる）を，総合するための共通の単位は，基準時において，1ドルに相当する労働および資本のサービスである。もし，基準時において，1時間の労働が2ドルに値し，100ドルの資本設備が年あたり6ドルの純収益をもたらすならば，100ドルの設備を3時間の労働に等しいものと考える。(7)

上式の分母の第1項の分子$\Sigma q_0 l_0 \cdot \frac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}$は，基準時の労働投入量に，基準時の平均賃金率をウェイトにした労働投入量指数をかけあわせたものであるから，基準時の平均賃金率を考慮した比較時点の労働投入量と考えることができる。他方，分母の第2項の分子$\Sigma q_0 k_0 \cdot \frac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}$は，基準時の収益率を考慮した比較時点の資本の投入量と考えることができる。分母の第1項の分母$\frac{\Sigma q_0 l_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}$は基準時において，賃金を1ドル得るために必要な労働時間数である。他方，分母の第2項の分母$\frac{\Sigma q_0 k_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}$は，基準時において，収益1ドルを得るために必要とされる資本の投入量である。前者を単位にして労働投入量をはかり，後者を単位として資本の投入量をはかれば，それぞれ加えあわせることができると考えるわけである。上式の分母は，このような単位ではかられた労働の投入単位数と資本の投入単位数を合計したものである。ところで，上式の分子は，実質産出量であるから，ケンドリックの総合生産性指数は，結局，実質投入量1単位当たりの実質産出量を表わすものとみることができる。しかも，このようにして測られた分母のディメンションと分子のディメンションは一致し，(単位は，いずれもドルである。)すべての添字1を0で置きかえると，上式の値は1となる性質を有している。

(7) 〔1〕p. xli.

3.2 労働生産性指数と資本の生産性指数との平均

つぎに，(2.2)式の右辺の第3項を再び変形すると，

$$\frac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_1(l_1 e_0+k_1 r_0)}\cdot\frac{\Sigma q_1 l_0 e_0}{\Sigma q_1 l_1 e_0}+\frac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_1(l_1 e_0+k_1 r_0)}\cdot\frac{\Sigma q_1 k_0 r_0}{\Sigma q_1 k_1 r_0} \qquad (3.2)$$

この式は，ケンドリックの総合生産性指数が労働生産性指数と資本の生産性指数とを，それぞれの分配率でウェイトした平均であることをあらわしている。

第1項の前半は，賃金率と収益率が基準時のままであったときの労働の分配率をあらわし，後半は，q_1e_0でウェイトした単位当たり必要労働量の指数の逆数であるから，労働生産性指数と考えられる。同様に，第2項の前半は，賃金率，収益率が基準時のままであったときの資本の分配率をあらわし，後半は，q_1r_0をウェイトとした単位当たり必要資本量の指数の逆数，すなわち，資本の生産性指数と考えることができる。(8)

3.3 実質産出量と仮想的産出量との比

さらに，(2.2)式の右辺の第3項を変形すると，

$$\frac{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_0}{\Sigma q_0 l_0}\left(\Sigma q_0 l_0\dfrac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}\right)+\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_0}{\Sigma q_0 k_0}\left(\Sigma q_0 k_0\dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}\right)} \qquad (3.3)$$

上式の分母は，基準時の平均賃金率（分母の第1項の前半）と基準時の平均収益率（分母の第2項の前半）とが一定だと仮定されたときに，比較時の労働投入量（分母の第1項の後半——基準時の産業部門別の賃金率が考慮されている。），比較時の資本の投入量（分母の第2項の後半——基準時の産業部門別の収益率が考慮されている。）から得られる仮想的産出量をあらわす。

---

(8) (2.2) 式の右辺の第3項を変形すると，つぎのようにもかける。

$$\frac{1}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_0}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}}+\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_0}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}}}$$

この分母の第1項の後半は，分母が実質産出量指数であり，分子が労働投入量指数であるから，全体としては，労働生産性指数の逆数と考えることができる。同様に，第2項の後半は，資本の生産性指数の逆数である。以上のことから，ケンドリックの生産性指数は，上のような労働生産性指数，資本の生産性指数を基準時の分配率でウェイトした調和平均と考えることができる。

また，上式の分子は，実質産出量であるから，結局，(3.3) 式は，競争条件下にあっては，限界生産力が一定であると仮定されたときに生産されたであろう産出量に対する，実際の産出量の比をあらわすものと考えることができる。(9)

3.4　実質賃金率指数と実質収益率指数との平均

つぎに，(2.2)式の右辺の第3項を変形し，

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}} \tag{3.4}$$

この式の分母は，産出の価格指数，分子は，投入の価格指数と考えることができる。

これは，さらに変形されて，

$$\frac{1}{\dfrac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}}{\dfrac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1l_1e_0}}+\dfrac{\Sigma q_1k_1r_1}{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}}{\dfrac{\Sigma q_1k_1r_1}{\Sigma q_1k_1r_0}}} \tag{3.5}$$

この式の分母の第1項の後半について考えると，その分母は，名目賃金率指数（比較時点の労働投入量でウェイトされた）であり，分子は総合物価指数（比較時点の産出量でウェイトされた）的なものであるから，この分数式は，実質賃金率指数(10)の逆数である。同様に，この (3.5) 式の分母の第2項の後半は，実質収益率指数の逆数と考えることができる。

以上のことから，結局，ケンドリックからの変形である (3.5) 式は，実質賃金率指数と実質収益率指数を比較時点の分配率でウェイトした調和平均であることが理解される。

3.5　生産関数との関連〔6〕

ケンドリックの総合生産性指数は，以上にみてきたように，非常にオーソド

(9)〔1〕p. 11.　もちろん(3.3)式は，実質投入量に対する実質産出量とも考えられる。

(10)　ふつうの場合には，名目賃金指数を生計費指数あるいは消費者物価指数で除した商を用いるが，ここでは，デフレータとして，生産物単位当たり付加価値総合指数ともいうべきものが使われていることに注意しなければならない。

ックスな生産性指数の定義から出発したものではあるが，ここで，生産関数による生産性測定方法との関連をつけておくことが，[11] かれの測定法の理解を一層深めるゆえんであろう。

いわば,「生産関数法」は，まず，技術の反映としての生産関数の概念を規定し，“technological change” の内容を生産関数のパラメータに即して定義し，つぎに，そのパラメータを何らかの方法（生産関数そのものを計測する「直接法」と，生産関数を変形して変化率などから接近するいわば「間接法」とが考えられる。）で推定し，この大小によって，“technological change” の内容を明らかにするものである。

いま，Y:要素費用表示の実質国民所得，$T(t)$:技術進歩の要因，K:資本ストックの実質存在量，L:基準時の時間当たり平均賃金でウェイトした労働時間，ω:賃金率，π:資本の平均収益率と約束し，長期的にみて，市場は競争的なものとして，$\pi=\dfrac{\partial Y}{\partial K}$，$\omega=\dfrac{\partial Y}{\partial L}$を仮定し，生産関数は1次同次であり，経済全体についてつぎのような集計的関数関係が成立することを仮定する。

$$Y=T(t)f(K,L) \tag{3.6}$$

この式を，オイラーの定理を用いて変形すると，

$$T(t)=\frac{Y}{f(K,L)}=\frac{Y}{\dfrac{\partial f}{\partial K}K+\dfrac{\partial f}{\partial L}L} \tag{3.7}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial K}$，$\dfrac{\partial f}{\partial L}$を$\pi_0$（基準時の収益率），$\omega_0$（基準時の賃金率）で置きかえると，(3.7)式の最右辺は，次式であらわされる。[12]

$$T(t)=\frac{Y}{\pi_0K+\omega_0L} \tag{3.8}$$

---

(11) ケンドリックの方法は，投入に対する産出の比をみる，いわば，「比率法」である。

(12) $T(0)=1$であり，$\dfrac{\partial f}{\partial K}$，$\dfrac{\partial f}{\partial L}$は零次同次で（[7] pp. 317〜320），$\dfrac{K}{L}$のみの関数となるから，$K$と$L$とが，$\dfrac{K}{L}=\dfrac{K_0}{L_0}$（＝一定）を成立させるように，あるいは近似的に成立させるように動く場合には，(3.8)式を利用してよいであろう。しかし，$\dfrac{K}{L}=\dfrac{K_0}{L_0}$の場合には，労働生産性指数$\dfrac{Y}{Y_0}\Big/\dfrac{L}{L_0}$で充分となる。

この式は，指数方式から発した前述の (3.3) 式と同様の意味を持つものと考えることができる。

「比率法」[11]も考えようによっては,「生産関数法」の特殊な場合といえる。容易にわかるように，厳密には，ケンドリックの場合，線型生産関数を仮定したものともいえる。すなわち，

$Y=T(t)\ (\pi_0K+\omega_0L)$ として，$T(t)=\dfrac{Y}{\pi_0K+\omega_0L}$ を用いたと考えることができる。

ちなみに，コップ・ダグラス生産関数の場合には，$T(t)=\dfrac{Y}{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}$，($\alpha$は定数) となり，CES生産関数の場合には，$T(t)=\dfrac{Y}{\left\{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right\}^{-\frac{1}{\rho}}}$，($\delta$，$\rho$は定数) となる。ただし，いずれの場合にも，$T(t)$の要因が$K$, Lとは独立に分離された生産関数を考えており，また，上式のY，K，Lをそれぞれ指数形式$\left(\dfrac{Y}{Y_0},\ \dfrac{K}{K_0},\ \dfrac{L}{L_0}\right)$であらわすならば，分母はすべて$\dfrac{K}{K_0}$と$\dfrac{L}{L_0}$との平均値と考えることができる。

3.6 生産性関数による理解

(3.6) 式が1次同次であることから，次式を導くことができる。[13]（これを生産性関数と呼ぶ）

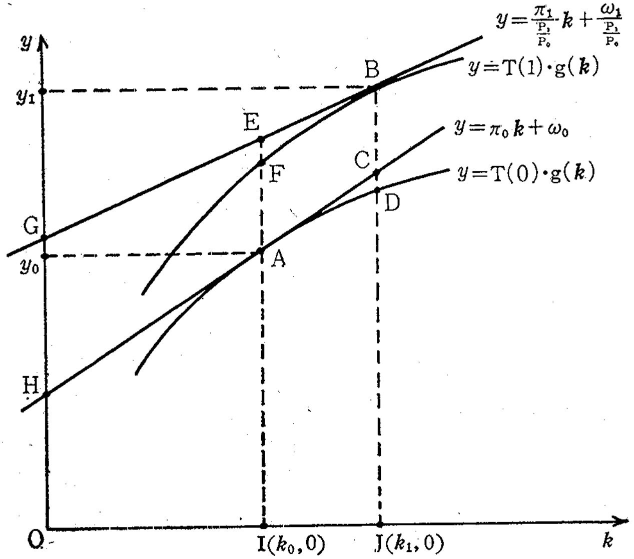
$$y=T(t)\,g(k) \tag{3.9}$$

ただし，y:労働生産性$\left(=\dfrac{Y}{L}\right)$，$k$:資本装備率$\left(=\dfrac{K}{L}\right)$，$y'(k)>0$，$y''(k)<0$とする。なお，$\dfrac{P}{P_0}$:生産物単位当たり付加価値総合指数，という記号を追加する。

図のA点は，基準時における収益率を極大にするような資本装備率，労働生産性の点であり，A点での生産性関数に対する接線の勾配は，基準時における（実質）収益率であり，OHは，基準時における(実質)賃金率である。また，B点は，比較時点における極大収益率をもたらすような点であり，B点での生

---

(13) (3.6)式が1次同次であることから，$mY=T(t)f(mK, mL)$，ここで，$m=\dfrac{1}{L}$とすると，$\dfrac{Y}{L}=T(t)f\left(\dfrac{K}{L},\ 1\right)$，この式を新たに書きかえて，(3.9)式を得る。



産性関数に対する接線の勾配は，比較時点における実質収益率であり，OGは，比較時点における実質賃金率である。[(14)]

さて，「理論的生産性指数」を，一定の資本装備率の下における，比較時点，基準時点の労働生産性の比（生産性関数のシフトの程度を示す）と定義することにする。文字であらわせば，$\frac{T(1)}{T(0)}$である。

ところが，実際に観測されるのは，A点，B点であって，D，F点などは観測されない。そこで，一つの工夫として，A点における接線とJに立てた垂線との交点Cを求める。そして，$\frac{\overline{JB}}{\overline{JD}}$の近似として，$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}$を用いるもの

(14) 付加価値の合計は，労働と資本に分配されつくすという条件から，$\frac{P}{P_0}Y=\pi K+\omega L$，両辺を$L$で割ると，$\frac{P}{P_0}y=\pi k+\omega$，この式を$\pi$について解いて，$\pi=\frac{\frac{P}{P_0}y-\omega}{k}$，これに，(3.9)式を代入すると，$\pi=\frac{\frac{P}{P_0}T(t).g(k)-\omega}{k}$，$\frac{P}{P_0}$，$\omega$，$T(t)$を一定と考えて，$\pi$を極大にするように$\frac{d\pi}{dk}=0$とおくと，$T(t)\frac{dg}{dk}=\frac{\pi}{\frac{P}{P_0}}$，しかるに，(3.9)式を$T(t)$を一定と考えて$k$で微分すると，$\frac{dy}{dk}=T(t)\frac{dg}{dk}$であるから，図の$A$点での接線の勾配は$\pi_0$であることを示している。そして，図の$A$点を通る接線の方程式は，$y=\pi_0 k+\omega_0$であることがわかる。同様にして，$B$点も，比較時点における極大収益率を与える点である。そして，B点を通る接線の方程式は，$y=\frac{\pi_1}{\frac{P_1}{P_0}}k+\frac{\omega_1}{\frac{P_1}{P_0}}$であることがわかる。

とする。

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}=\frac{y_1}{\pi_0 k_1+\omega_0}=\frac{Y_1}{\pi_0 K_1+\omega_0 L_1} \tag{3.10}$$

上式から，$\dfrac{\overline{JB}}{\overline{JC}}$は，ケンドリックの総合生産性指数（(3.3)式参照）に相当するものであることがわかる。図から明らかなように，$\dfrac{\overline{JB}}{\overline{JC}}\leq\dfrac{\overline{JB}}{\overline{JD}}=\dfrac{T(1)}{T(0)}$であるから，上で考えた，「理論的生産性指数」の下限を示すのがすなわちケンドリックの総合生産性指数であるということができる。[15] そして，このような近似が良好であるためには，$\overline{OI}\fallingdotseq\overline{OJ}$であることが必要である。このような観点からも，長期比較には，連鎖指数の使用が望まれる。[16]

3.7　生産物1単位当たり費用の節約

また，(2.2)式の右辺の第3項を変形すると，

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_0}{\Sigma q_0 l_0}\ \dfrac{\Sigma q_0 l_0}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}+\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_0}{\Sigma q_0 k_0}\ \dfrac{\Sigma q_0 k_0}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_0}{\Sigma q_0 l_0}\ \dfrac{\Sigma q_0 l_0\ \dfrac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}}{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}+\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_0}{\Sigma q_0 k_0}\ \dfrac{\Sigma q_0 k_0\ \dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}}{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}} \tag{3.11}$$

---

(15)　同様の考えから，B点において，$y=T(1)g(k)$に接線を引き，Iに立てた垂線との交点をEとし，$\dfrac{\overline{IF}}{\overline{IA}}$の近似として$\dfrac{\overline{IE}}{\overline{IA}}$を用いると，

$$\frac{\overline{IE}}{\overline{IA}}=\frac{\dfrac{\pi_1}{\dfrac{P_1}{P_0}}k_0+\dfrac{\omega_1}{\dfrac{P_1}{P_0}}}{y_0}=\frac{\pi_1 K_0+\omega_1 L_0}{\dfrac{P_1}{P_0}Y_0}$$

となり，これは，(2.3)式の右辺の第3項にあたるものと考えられる。ただし，実質化のためのデフレータは，ラスパイレス方式をとり，L，Kなどのウェイトも比較時点のものを用いるものとする。(2.3)式の変形は，つぎのように示されるからである。

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1 l_1 e_1}{\Sigma q_1 l_1}\left(\Sigma q_1 l_1\ \dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_1}{\Sigma q_1 l_1 e_1}\right)+\dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_1}{\Sigma q_1 k_1}\left(\Sigma q_1 k_1\ \dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_1}{\Sigma q_1 k_1 r_1}\right)}{\Sigma q_0(l_1 e_1+k_1 r_1)}$$

そして，$\dfrac{\overline{IE}}{\overline{IA}}\geq\dfrac{\overline{IF}}{\overline{IA}}$であるから，この総合生産性指数は「理論的な生産性指数」の上限値を示すことになる。$\left(\text{一般に，}\dfrac{\overline{IF}}{\overline{IA}}\neq\dfrac{\overline{JB}}{\overline{JD}}\right)$

(16)　本文と(15)でなされた議論は，技術進歩の中立性を仮定したが，これを除いて考えることもできよう。

この式の分母，分子の第1項の前半は，基準時の平均賃金率であり，第2項の前半は，基準時の平均収益率をあらわす。分子の第1項の後半および第2項の後半は，それぞれ，基準時における生産物（実質金額）1単位を得るために必要とされる基準時の労働投入量および資本投入量に相当する。分母の第1項の後半および第2項の後半は，それぞれ，比較時の生産物（実質金額）1単位を得るために必要な比較時の労働投入量および資本投入量に相当する。

以上のことから，この式の分子は，基準時の生産物1単位を得るために必要なコストをあらわし，分母は，比較時の生産物1単位を得るために必要なコストをあらわすことになり，(3.11)式は，生産におけるコストの節約の程度をあらわす指標ということができよう。

さて，各産業別生産性指数は，$\dfrac{l_0e_0+k_0r_0}{l_1e_0+k_1r_0}$であらわすことができる。[17] この式を$\dfrac{e_0\dfrac{q_0l_0}{q_0}+r_0\dfrac{q_0k_0}{q_0}}{e_0\dfrac{q_1l_1}{q_1}+r_0\dfrac{q_1k_1}{q_1}}$と変形すると，以上と同様の説明が，この産業部門別指数についてもあてはまるが，以下では，別の仕方で説明しよう。

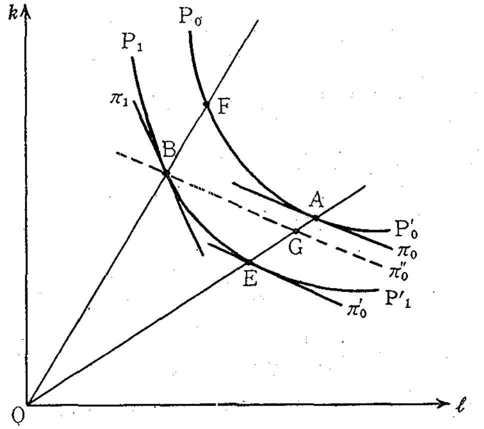
図の曲線P_0P_0'は，基準時において，生産物1単位を作るに必要な労働と資本の最小の組みあわせを示す。$\left(1=T(0)f\left(\dfrac{K}{Y},\ \dfrac{L}{Y}\right)\right)$生産関数において，$\dfrac{\partial^2Y}{\partial K^2}<0$，$\dfrac{\partial^2Y}{\partial L^2}<0$を仮定すると，$\dfrac{\partial^2Y}{\partial K\partial L}=\dfrac{\partial^2Y}{\partial L\partial K}>0$となり，$\dfrac{dK}{dL}<0$，$\dfrac{d^2K}{dL^2}>0$したがって，$P_0P_0'$は，原点Oに凸なる右下りの曲線をえがく。同様に，比較時点において生産物1単位を作るに必要な労働，資本の最小の組みあわせを示すP_1P_1'も原点Oに凸なる右下りの曲線をえがく。そして，労働・資本の質が変化しない限り，過去の生産に利用された各種の知識が利用不能にならない限り，P_1P_1'は，P_0P_0'よりも原点に近い曲線となるであろう。(この場合，

(17)　(2.2)式の右辺の第3項を変形すると，

$$\frac{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma\dfrac{q_1(l_1e_0+k_1r_0)}{q_1(l_0e_0+k_0r_0)}\cdot q_1(l_0e_0+k_0r_0)}$$

この式は，経済全体の生産性指数が，各産業部門の生産性指数$\dfrac{q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{q_1(l_1e_0+k_1r_0)}$を比較時点の実質産出量$q_1(l_0e_0+k_0r_0)$でウェイトした調和平均であることをあらわしている。

1次同次，技術進歩の中立性を仮定しているので，OA：OE＝OF：OB)さて，競争条件下にあっては，基準時においては，費用を最小にするためには，限界生産物が要素価格に比例するA点がえらばれる。同様にして，比較時点においては，B点がえらばれる。



ここで，生産性指数を$\frac{C_0}{C_1}$で定義する。ただし，C_0およびC_1は，それぞれ，要素価格が一定と仮定されたときの，基準時，比較時における1単位の生産物を得るために必要な最小コスト（原材料のコストは含まない）をあらわすものとする。$C_0=e_0l_0+r_0k_0$であるが，C_1はE点（一般にはOA上にない）を通るπ_0'であらわされる。しかし，このE点は，P_1P_1'の形状がわからない限り知ることはできないので，B点を通るπ_0と勾配の等しいπ_0''で代用する。従って，

$$\frac{C_0}{C_1}\geq\frac{e_0l_0+r_0k_0}{e_0l_1+r_0k_1}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OG}} \tag{3.12}$$

要するに，ケンドリックの生産性指数は，以上のような産業部門別の費用の節約指数の下限値を各産業部門の比較時点の実質産出量でウェイトした総合指数と考えることもできよう。

4. ケンドリックの総合生産性指数の測定の実際

(2.2)式の右辺の第3項を変形すると，

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}}{\dfrac{\Sigma q_0l_0e_0}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}\left\{\Sigma\dfrac{q_1l_1}{q_0l_0}\left(\dfrac{q_0l_0e_0}{\Sigma q_0l_0e_0}\right)\right\}+\dfrac{\Sigma q_0k_0r_0}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}\left\{\Sigma\dfrac{q_1k_1}{q_0k_0}\left(\dfrac{q_0k_0r_0}{\Sigma q_0k_0r_0}\right)\right\}} \tag{4.1}$$

この式から明らかなように，求めるべき系列は，①実質産出量指数

$\dfrac{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}$,[18] ②個別労働投入量指数$\dfrac{q_1l_1}{q_0l_0}$,[19] ③個別資本投入量指数$\dfrac{q_1k_1}{q_0k_0}$,[20] ④個別労働投入量指数を,総労働投入量指数に総合するためのウェイト$\dfrac{q_0l_0e_0}{\Sigma q_0l_0e_0}$,[21]⑤個別資本投入量指数を総資本投入量指数に総合するためのウェイト$\dfrac{q_0k_0r_0}{\Sigma q_0k_0r_0}$,並びに⑥総労働投入量指数と総資本投入量指数とを,総要素投入量指数に総合するためのウェイト$\dfrac{\Sigma q_0l_0e_0}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}$, $\dfrac{\Sigma q_0k_0r_0}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}$の6種の系列にほかならない。

上式は,簡単のために,基準時のウェイトを使用する場合を示している。実際には,ケンドリックは,全期間をいくつかの小区間に分割し,[22] 各区間の両端のウェイトを平均したウェイトを順次使用し,[23] 各区間について求めた指数系列を1929年を100に換算するという一種の連鎖指数の方法を採用している。もちろん,生産性指数は,産出量と投入量の比であるから,ウェイトの効果はあまり大きな変化をもたらさない。

---

(18) 経済全体については,名目産出額をデフレートする方法を用いた。クズネッツのNNP,商務省のNNP, GDP などを利用。個々の産業部門については,デフレーション法(商業,建設業,金融業,サービス業)および,産出量指数を付加価値ウェイトなどで加重平均する方法を用いた。(農業は2重デフレーション法)産業部門別の産出量は一般に粗産出量である。

(19) 雇用量×平均労働時間,から求める。前者は,D. Carson (~1929年),商務省 (1929年~),社会保障 (1939年~) などのデータを用いて推定。後者は,実際に働らいた労働時間が求められたが,支払われた労働時間で代用した場合もある。B.L.S.データ,工業センサス (1947年~),人口センサスなどを用いる。

(20) 主に,R. Goldsmith のデータを用い,農業については,A. Tostlebe,非農業の住宅・敷地については,L. Grebler などのデータを利用。

(21) クズネッツのデータ (~1929年),商務省のデータ (1929年~) を利用。47の産業部門について求める。なお,資本については,同様のデータを用い,25のグループについて求める。

(22) 区分の境界となる各年次は,key year とよばれ,(1869),(1879),(1889),1899, 1909, 1919, 1929, 1937, 1948, 1953, 1957年といった比較的データの整備された好況時がえらばれた。

(23) ウェイトの計算が,各産業ごとに別々に行なわれ,あとで合計されるものと仮定すると([1], p. 284の説明では,ウェイトは全産業集計値から求められる),ケンドリックが求めようと考えた指数算式は次式であらわされる。

生産性変化の計測にあたって特に重要な観点は，投入と産出を同一の活動に限ることである。ケンドリックはウェイト方式にも，投入産出とほぼ同一のものを使用している。

5. ケンドリックの総合生産性指数の批判

5.1 S. H. Ruttenbergによる批判(24)

ケンドリックの構想および測定に対して，多くの批判者があらわれている。まず，Ruttenbergによる批判点を列挙すれば，つぎのようである。

①概念上の構造を明らかにしていない。

②適当な使用法について明らかにしていない。

③"total factor productivity" という名称は誤解をまねく。教育，科学，技術，社会的組織，文化的伝統，人間の熟練の程度，創意など多くの無形の要素を含んでいない。

④total factor productivity の意味が明らかでない。企業の費用の観点からの効率 (efficiency) を測定するのか、あるいは，全体としての経済および社会に対する費用の観点から効率を測定しようとするのか。

⑤賃金率との関連が明らかでない。賃金との比較の標準とはなり得ないと思われるのに，実際には比較を行なっている。

⑥概念的に異なる 2 つの測度 — 実際に使用された (actual) 労働時間当たり産

$$\frac{\Sigma q_t(l_0e_0+l_ne_n)+\Sigma q_t(k_0r_0+k_nr_n)}{\Sigma q_0(l_0e_0+l_ne_n)+\Sigma q_0(k_0r_0+k_nr_n)} \Bigg/ \frac{\Sigma q_tl_t(e_0+e_n)+\Sigma q_tk_t(r_0+r_n)}{\Sigma q_0l_0(e_0+e_n)+\Sigma q_0k_0(r_0+r_n)}$$

ただし，添字o, nは，分割された特定の小区間を区切るkey year であり（この小区間ではoが基準時をあらわす），tは，その小区間内の任意の時点をあらわす。

上式は，エッジウォース方式に近い産出量指数とエッジウォース方式に近い投入量指数の比であることがわかる。それは，(2.2) 式の右辺の第 3 項を変形すると，ラスパイレス的産出量指数とラスパイレス的投入量指数の比であることがわかり，(2.3) 式の右辺の第 3 項を変形すると，パーシェ的産出量指数とパーシェ的投入量指数との比であることがわかるということから明らかである。

すなわち，

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)}{\Sigma q_0(l_0e_0+k_0r_0)}}, \quad \frac{\dfrac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_0(l_1e_1+k_1r_1)}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_1e_1+k_1r_1)}{\Sigma q_0(l_0e_1+k_0r_1)}}$$

(24) 〔1〕 pp. 224～227.

出量と，利用可能な(available)資本の存在量1単位当たり産出量とを結合している。それに，資本の生産性についても問題が残る。

⑦労働分配率が過大であるようである。労働者の増加と，分配率のより高い産業への労働移動などを研究する必要がある。

5.2 E.D.Domarによる批判〔2〕

つぎに，Domarの批判点を列挙する。

①ケンドリックが測定しようとした生産性の意味をあらわす簡単なモデルが示されていない。

②ケンドリックの測度に "total factor productivity" と名づけるのはよくない。この指数が投入に含めなかった他のすべてのものを吸収しているという意味で M. Abramovitz にならって，"measure of our ignorance"（無知の測度）と呼ぶか，"residual"（残余）と呼ぶほうがよい。

③この指数は，いわゆる資源の利用における効率（efficiency），（生産可能量に対する実際の生産量の割合）を測定するものではない。

④この指数の系列を，他の要因が変化しないものと仮定して，補外することにより，国民生産物の将来の動向を予測するのは，早計であろう。他の要因については何もわかっていないからである。

⑤資本の限界生産物がその価格に等しいという仮定は，長期の均衡を要求する。

⑥線型生産関数の仮定。(連鎖指数を採用してはいるが)

⑦産業別の生産性指数の計測に際し，多くの場合，産出として，原材料も減価償却も含んだものを用いた。投入はこれらを除いて考えている。これは，カバレッジのそごをきたす。また，操業度の程度により変動を受ける。

⑧産業間の労働生産性指数とケンドリックの総合生産性指数との順位相関係数は0.94であった。資本の投入も考えることに意味があるか。

5.3 以上の批判に対する評価

以上の批判点に対する筆者の見解は，つぎのとおりである。

Ruttenberg の批判 ①，Domarの批判 ①については，筆者も全く同感である。小論の出発点もまさにここにあった。 (2.2) 式の右辺の第3項を導いた

のは，この欠陥を補うためであった。

Ruttenberg の批判②については，ケンドリックの著書〔1〕の第3章以下が total factor productivity の利用例であろうと思われるが「適当な使用法でない」というのであろうか。

Ruttenberg の批判③, Domar の批判②については，全く批判者のいうとおりである。“total factor productivity”を「全要素生産性」と訳さずに，「ケンドリックの総合生産性指数」といってきたのもそのためである。

Ruttenberg の批判④については，ケンドリック自身「われわれの測度は，わが国に存在する私的企業の経済の観点から構成されたものである。すなわち，労働は雇用されるときに，したがって，生産において利用可能なときにのみコストとして算入され，他方，資本は，所有されるときに，したがって，利用可能なときにコストとして算入される。これは経済理論におけるコストの一般的取扱いにかなっている。[(25)]」といっている。この問題は，Ruttenbergの批判⑥の前半にも関連するが，経済全体の観点からする生産性の測度の例としては，「利用可能な資源の単位当たり産出量」(output per unit of available resources)があげられる。[(26)] これを用いれば，ある程度⑥の批判の前半を一応のがれることができる。なお，労働も資本も actual のデータを用いる方法も考えられるが，資本の操業度に関するデータはほとんど得られない。

Ruttenbergの批判⑤については，ケンドリックは，

実質賃金率[(10)]＝生産性×労働の相対的要素価格

といった，いわば，恒等式を用いて分析を行なっている。[(27)] この式から，実質賃金率指数がケンドリックの総合生産性指数と同率で増大すべし，とか，ケンド

---

(25)　〔1〕 p. 32.

(26)　「生産性系列のいっそう興味ある可能な一種は，労働を社会的費用の観点から考えることであり，正常な摩擦的失業（たとえば，労働力の3.5%）以上の失業者を労働コストの一部と考えることである。さらにそのような人々——定義により，就業を希望し，就業可能な——は，就業者と同じ平均時間働くことを望んでいるという仮定がなされる。」

（〔1〕 p. 77.）

(27)　〔1〕 p. 126.

リックの総合生産性指数より何割多く増大すべしとかいったことはでてこないことは明らかである。実質賃金率，生産性，労働の相対的要素価格の動向を過去のデータで分析し，それらの関連をみることによって，現実の分析を深めようとするものといえよう。

Domarの批判⑦については，生産関数を用いた分析において，多くの論者が投入として，資本と労働の2要素のみを考え，産出として，原材料を除いた純産出を用いる立場をとっている。これに対して，生産関数は本来，原材料を含めた投入と，原材料を含めた粗産出との関係であるとするものがある。これに対応させて考えてみると，生産性指数として，分母子から原材料を除いて分析する場合と，分母子に原材料を含めたもので分析する場合との2方法が考えられる。しかるに，ケンドリックの産業部門別生産性指数は，一般に，このいずれにもあたらない。ケンドリックでは，粗生産量指数と純生産量指数との動向が等しいものと仮定せねばならず，この仮定が満たされない程度に従って指数は不正確となる。

Domarの批判⑧については，ケンドリックの測度が重要性を増すのは，資本のウェイトが大きい場合，労働に対して資本の増加が著しい場合など[(28)]である。ケンドリックの総合生産性指数のみで，生産性の動向をみるのではなく，いろいろの指標を併用すべきであるといいたい。

その他，ケンドリックの生産性指数について注意しなければならないのは，自明のことながら，それが生産性の水準を示すものではないということであり，国際比較，産業間比較など特に注意しなければならない。また，操業度の影響を受けるので，比較的似かよった景気局面（好況時）をえらんで比較することが必要であり，データの確実な時点間の比較にこころがけるべきである。

6. 結　　語

以上を概観すると，2節では，

名目所得指数＝総合物価指数[(6)]×投入量指数×生産性指数

(28) あまり著しいものになると，ケンドリックの総合生産性指数の関数論的意味づけがなくなってくる。

という恒等式から出発して，望ましい3条件を満たす生産性指数が，

$$\frac{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)},\ \frac{\Sigma q_0(l_0e_1+k_0r_1)}{\Sigma q_0(l_1e_1+k_1r_1)}$$

の2つに限られることを明らかにした。そして，前者がケンドリックの総合生産性指数の構造を示す算式であることを理解した。

3節ではこの算式をいろいろに変形して，その意味を理解することに努めた。3.1では，$\frac{\text{産出}}{\text{投入}}$というオーソドックスな生産性の定義式により理解し，労働と資本という異質的な投入がいかにして共通の尺度で測られるかをみた。3.2ではケンドリックの指数が労働生産性指数と資本の生産性指数とをそれぞれの分配率でウェイトした平均であること，3.3では，生産力が一定に保たれるときに，比較時点に投入された実際の投入量から得られる仮想的産出量に対する現実の実質産出量の比であること，3.4では，実質賃金率指数と実質収益率指数との平均であることを理解した。3.5では生産関数との関連をつけ，3.6では，生産性関数を利用して，理論的生産性指数の下限値を示すことを明らかにし，そして，3.7では，生産におけるコストの節約の程度を示す指標であることを理解した。そして，4節では，ケンドリックの実際の指数測定についてやや具体的にのべた。最後の5節では，Ruttenberg，Domar の批判を中心にケンドリックの総合生産性指数に対する筆者の考えをいちおうあげておいた。

ところで，注意しなければならないのは，上述の説明が，すべて同様の重要度を持つわけではないことである。満たされる条件，分析目的，データの適用とその精度などにより異なってくる。ケンドリックの意図からすれば，生産関数との関連などをつけずに，オーソドックスな生産性指数の説明にとどまるべきであったかもしれない。ただ、生産性については，一般に，各種の説明がなされるので，この小論では，ケンドリックの総合生産性指数に即して考えられるだけのものを考えてみたわけである。本来，測定の目的が具体的に決まってはじめて，投入に何を含め，産出として何をとればよいかがわかり，どの範囲で問題にするか，データとして何を利用するかが決まるはずである。従って，指数の作成者は，まず，自分自身の目的をはっきりと示すべきであり，誤用さ

れないよう心をくばるべきである。

より最近の動向としては，ケンドリックやソロー〔8〕における，“residual” をいっそう細部分に区分し，それらのより具体的な意味づけをする方向に進んでいる。その例としては，Denison〔9〕，Griliches〔10〕の測定があげられる。かれらは，投入の質の変化，労働と資本のウェイト修正，規模の経済，知識の増大，資源の配分などの要因を residualの内容として考えた。そして，本格的な生産関数法による接近も，この方向にむかって精緻化がなされつつある。しかし，これらの分割には，本来非常な困難を覚悟しなければならない。それはデータ的に満足でないばかりでなく，分割された個々の要因間の相互関係についての難問が未解であるからである。

参 考 文 献

〔1〕 John W. Kendrick, Productivity Trends in the United States, 1961, NBER.

〔2〕 E. D. Domar, “On Total Productivity and All That,” J. P. E., 1962.

〔3〕 W. D. Evans and I. H. Siegel, “The Meaning of Productivity Index,” J. A. S. A. ,1942.

〔4〕 I. H. Siegel, Concepts and Measurement of Production and Productivity, U. S. Bureau of Labor Statistics, 1952.

〔5〕 I. H. Siegel, “On the Design of Consistent Output and Input Indexes for Productivity Measurement,” Studies in Income and Wealth vol. 25, NBER, 1961.

〔6〕 J. W. Kendrick and Ryuzo Sato, “Factor Prices, Productivity and Economic Growth,” A. E. R.,1963.

〔7〕 R. G. D. Allen, Mathematical Analysis for Economists, 1938.

〔8〕 R. M. Solow, “Technical Change and the Aggregate Production Function,” R. E. Statistics, Aug., 1957.

〔9〕 E. F. Denison, The Sources of Economic Growth in the United States and the Alternatives Before Us, 1962.

〔10〕 Z. Griliches, “The Sources of Measured Productivity Growth : U. S. Agriculture, 1940～60,” J. P. E., Aug., 1963.