労働生産性指数の算式について

大　藪　和　雄

1.　労働生産性指数算式の類型

「総合指数の構成を形式的に見ると，比率および総合という二つの統計方法から成立っている。……したがって総合指数の構成法には，どちらの方法を先にするかによって二つの基本的形式が区別される。すなわち個別品目の基本量の[1]比率を先に算出した上で，全品目のそれを平均する形で総合するものを相対法形式，または平均法形式といい，逆に個別基本量[1]を基準比較両時点のそれぞれにつきまず条件量[2]によって全品目の総合を行い，その上で両時点の総合値の比率をとるものを総和法形式という。すべての総合指数算式はこのいずれかの形式に分属する。[3]」

以上のような記述は，生産指数，物価指数にはそのままあてはまるのであるが，ここに考察しようとする労働生産性指数への適用には，より細かい配慮が必要だと思われる。

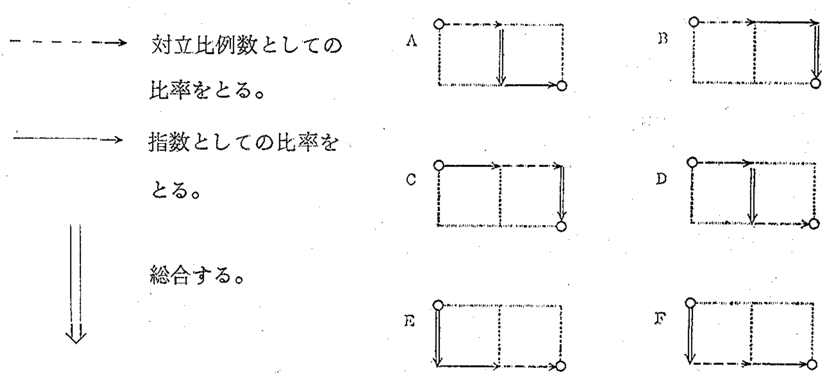
さて，統計比例数はつぎのように分類されている。[4]

統計比例数
- 分析的関係……………………………………分析比例数（構造比例数）
- 総合的関係
  - 同種統計集団の関係……………………指　数
  - 異種統計集団の関係（関係比例数）
    - 従属的・発生的関係……発生比例数
    - 相関的関係……対立比例数

(1)　物価指数については，「価格」である。原文では「価格」となっていたが，筆者が一般的な記述に変更した。
(2)　原文では，「取引数量を媒介に金額化すること」となっている。
(3)　〔1〕pp.215—216。
(4)　〔2〕pp.155—161，〔3〕pp.72—74。

労働生産性指数は，労働の生産性を示す指数であり，労働の生産性という意味で１つの比例数であると共に，指数であるという意味でも１つの比例数である。労働生産性は 産出/労働投入 という統計比例数であるから，対立比例数と理解することができる。分母と分子とは異種統計であり，従属的・発生的関係ではなく，相関的関係に立つものと考えられる。物的労働生産性は逆転するとき，労働量/産出量 となり，生産物１単位を作るのに必要とされる労働量，すなわち，「労働原単位」という概念を構成することができるからである。

以上のことから，労働生産性指数を構成するには，対立比例数としての比率をとること，指数としての比率をとること，および総合することの３つの統計方法を用いる必要があることが明らかとなる。これら３つの組み合わせを考えるとつぎの図のようになる。



記号の約束をつぎのように決める。

q: 生産量，l: 生産物単位当たり必要労働量，w，w': ウェイト，p: 生産物単位当たり価格または付加価値，　e: 平均時間当たり賃金，

k: 生産物単位当たり必要資本量，r: 収益率

そこで，上図に対応する生産性指数を構成するとつぎのようになる。

$$\frac{\Sigma\left(\frac{q_1}{q_1 l_1}\right)w\Big/\Sigma w}{\Sigma\left(\frac{q_0}{q_0 l_0}\right)w\Big/\Sigma w} \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{\Sigma\left(\dfrac{q_1}{q_1 l_1}\Big/\dfrac{q_0}{q_0 l_0}\right)w}{\Sigma w} \tag{B}$$

$$\frac{\Sigma\left(\dfrac{q_1}{q_0}\Big/\dfrac{q_1 l_1}{q_0 l_0}\right)w}{\Sigma w} \tag{C}$$

$$\frac{\Sigma\left(\dfrac{q_1}{q_0}\right)w\Big/\Sigma w}{\Sigma\left(\dfrac{q_1 l_1}{q_0 l_0}\right)w'\Big/\Sigma w'} \tag{D}$$

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1 w}{\Sigma q_0 w}}{\dfrac{\Sigma q_1 l_1 w'}{\Sigma q_0 l_0 w'}} \tag{E}$$

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1 w}{\Sigma q_1 l_1 w'}}{\dfrac{\Sigma q_0 w}{\Sigma q_0 l_0 w'}} \tag{F}$$

基本的には，以上につきると思われるが，つぎのようなものも考えられる。

$$\frac{\Sigma\left(\dfrac{q_1}{q_0}\right)w\Big/\Sigma w}{\dfrac{\Sigma q_1 l_1 w'}{\Sigma q_0 l_0 w'}} \tag{G}$$

指数としての比率をとる→総合する ┐
総合する ┐
総合する ┘→指数としての比率をとる ┘→

対立比例数としての比率をとる

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1 w}{\Sigma q_0 w}}{\Sigma\left(\dfrac{q_1 l_1}{q_0 l_0}\right)w'\Big/\Sigma w'} \tag{H}$$

総合する ┐
総合する ┘→指数としての比率をとる ┐
指数としての比率をとる→総合する ┘→対立比例数としての比率をとる

また，上の諸式では「平均する」場合，加重算術平均式を用いたが，調和平均，幾何平均式なども用いることができる。(B) 式と (C)式，および (E)式と (F)式は，計算上同一値を与えることは明らかである。(A)，(B)，(D)式に対応する調和平均式を書けばつぎのようになる。（簡略化できるものは簡略化した）

$$\frac{\Sigma l_0 w}{\Sigma l_1 w} \tag{A′}$$

$$\frac{\Sigma w}{\Sigma \dfrac{l_1}{l_0} w} \tag{B′}$$

$$\frac{\Sigma w \Big/ \Sigma\left(\frac{q_0}{q_1}\right) w}{\Sigma w' \Big/ \Sigma\left(\frac{q_0 l_0}{q_1 l_1}\right) w'} \qquad \text{(D}'\text{)}$$

2. 労働生産性指数に関連する経済量の分解

前節の考察により，労働生産性指数の実際式としては，w および w' に適当な経済量を与えればよいことがわかり，そのえらび方により各種各様の労働生産性指数が得られることになるのである。しかし，現実の経済分析においては，労働生産性指数は他の経済指数と対比して用いられるのが常であり，その場その場に適した労働生産性指数が考えられなければならないと考える。以下では，このような観点から，労働投入量，生産金額，賃金支払総額，分配率の分解を試みよう。

2.1 労働投入量の分解[5]

労働投入量は ql としてあらわされるので，つぎのような分解法が考えられる。

$$\frac{\Sigma q_1 l_1}{\Sigma q_0 l_0} = \frac{\Sigma q_1 l_1}{\Sigma q_0 l_1} \cdot \frac{\Sigma q_0 l_1}{\Sigma q_0 l_0} \qquad (2.\ 1)$$

$$\frac{\Sigma q_1 l_1}{\Sigma q_0 l_0} = \frac{\Sigma q_1 l_0}{\Sigma q_0 l_0} \cdot \frac{\Sigma q_1 l_1}{\Sigma q_1 l_0} \qquad (2.\ 2)$$

上式の左辺は，0時点に対する1時点の労働投入量指数であり，右辺の第1項は，生産物単位当たり必要労働量をウェイトとした生産指数である（(2.1)式では l_1，(2.2) 式では l_0 をウェイトとする)。右辺の第2項は，生産数量をウェイトとした，生産物単位当たり必要労働量の指数であり，その逆数が労働生産性指数である。

2.2 生産金額（あるいは付加価値総額）の分解

$$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \cdot \frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right) q_1 l_1}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right) q_0 l_0} \cdot \frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right) q_1 l_1}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right) q_1 l_1} \qquad (2.\ 3)$$

(5) この考えによる算式は〔4〕,〔5〕等にあらわれている。

$$\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\cdot\frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right)q_1l_1}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_0}\cdot\frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_0}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right)q_0l_0} \tag{2.4}$$

$$\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\cdot\frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_1l_1}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_0l_0}\cdot\frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_1l_1}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_1l_1} \tag{2.5}$$

$$\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\cdot\frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_1l_1}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_0}\cdot\frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_0}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_0l_0} \tag{2.6}$$

上の4つの式は，いずれも左辺が生産金額（あるいは付加価値総額）の指数であり，右辺の第1項は価格指数であり，第2項は労働投入量指数であり，第3項は生産性指数である。

2.3　賃金支払総額の分解

つぎに，賃金支払総額 qle の分解を考えよう。

$$\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}=\frac{\Sigma q_1l_0e_0}{\Sigma q_0l_0e_0}\cdot\frac{\Sigma q_1l_0e_1}{\Sigma q_1l_0e_0}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1l_0e_1} \tag{2.7}$$

$$\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}=\frac{\Sigma q_1l_0e_0}{\Sigma q_0l_0e_0}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1l_1e_0}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_0}{\Sigma q_1l_0e_0} \tag{2.8}$$

$$\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}=\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_1e_1}\cdot\frac{\Sigma q_0l_1e_1}{\Sigma q_0l_1e_0}\cdot\frac{\Sigma q_0l_1e_0}{\Sigma q_0l_0e_0} \tag{2.9}$$

$$\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}=\frac{\Sigma q_1l_1e_0}{\Sigma q_0l_1e_0}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1l_1e_0}\cdot\frac{\Sigma q_0l_1e_0}{\Sigma q_0l_0e_0} \tag{2.10}$$

$$\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}=\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_1e_1}\cdot\frac{\Sigma q_0l_0e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}\cdot\frac{\Sigma q_0l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_1} \tag{2.11}$$

$$\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}=\frac{\Sigma q_1l_0e_1}{\Sigma q_0l_0e_1}\cdot\frac{\Sigma q_0l_0e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1l_0e_1} \tag{2.12}$$

上式の左辺は，賃金支払総額の指数であり，右辺の第1項は生産指数，第2項は賃金指数，第3項は，その逆数が労働生産性指数である。

2.4　分配率の分解

分配率をその絶対値で考察することはしばしばあるが，分配率指数という形で問題にすることはまれである。しかし，分配率の動きがどのようであるかを

観察するのに利用できる。生産性の上昇は，賃金の上昇か，価格の低落か，労働分配率の低下をもたらす。これら4変数の相互関係を把握せんとするのがつぎの分解である。もちろん，2.3までの分解とは様相を異にする。いままでのものが，分解された項の1つの項のみで労働生産性指数を表わすことができたのに対し，この場合には2つの項の比としてしか表現することができず，やや複雑な形式となっている。それは，のちにみるように，個別労働生産性指数の平均としての意味を持ち得ず，その意味で限界がある。（付表参照）

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma p_1q_1}}{\dfrac{\Sigma q_0l_0e_0}{\Sigma p_0q_0}}=\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1l_1e_0}\cdot\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}\cdot\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_0q_1}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_0}{\Sigma q_0l_0e_0} \tag{2.13}$$

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma p_1q_1}}{\dfrac{\Sigma q_0l_0e_0}{\Sigma p_0q_0}}=\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_1l_1e_0}\cdot\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\cdot\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_1q_1}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_0}{\Sigma q_0l_0e_0} \tag{2.14}$$

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma p_1q_1}}{\dfrac{\Sigma q_0l_0e_0}{\Sigma p_0q_0}}=\frac{\Sigma q_0l_0e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}\cdot\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}\cdot\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_0q_1}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_1} \tag{2.15}$$

$$\frac{\dfrac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma p_1q_1}}{\dfrac{\Sigma q_0l_0e_0}{\Sigma p_0q_0}}=\frac{\Sigma q_0l_0e_1}{\Sigma q_0l_0e_0}\cdot\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\cdot\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_1q_1}\cdot\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_1} \tag{2.16}$$

上式の右辺の第1項は，賃金指数であり，第2項は，その逆数が物価指数であり，第3項は，その逆数が生産指数であり，第4項は，労働投入量指数である。従って第3項と第4項の積の逆数が労働生産性指数となる。

3.　導出された算式の意味

第2節で各種経済量の分解によって得られた生産性指数算式は，第1節の各算式に変形しなおすことができる。その場合のウェイトにあたるものが，付表に示されている。以下では，比較的意味のわかりやすい変形を中心に各算式を吟味してみようと思う。

3.1 労働投入量の分解により導出された算式

(2.1)式および(2.2)式の右辺に含まれる労働生産性指数算式はつぎの2つである。

$$\frac{\Sigma q_0 l_0}{\Sigma q_0 l_1} \qquad (3.1)$$

$$\frac{\Sigma q_1 l_0}{\Sigma q_1 l_1} \qquad (3.2)$$

$\dfrac{\Sigma q_0 l_1}{\Sigma q_0 l_0}$ を考える。分母は0時点の実際必要労働時間の合計を意味し，分子は1時点の技術水準で0時点と同一生産物構成を作るに必要とされる労働時間の合計である。この両者の比は労働時間の節約の程度を示す指標となる。この逆数が労働生産性指数(3.1)式である。(3.2)式についてもほぼ同様の説明が可能である。[6]

(3.1)式はまた $\dfrac{\Sigma q_0 l_0}{\Sigma\left(\dfrac{l_1}{l_0}\right) q_0 l_0}$ と変形できるので，個別生産性指数 $\dfrac{l_0}{l_1}$ を0時点の労働投入量で加重調和平均したものになっている。(3.2)式も

$\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{l_0}{l_1}\right) q_1 l_1}{\Sigma q_1 l_1}$ と変形できるので，ほぼ同様の説明が可能である。

また，(3.1)式を変形すると $\Sigma \dfrac{q_0 l_0}{l_1} l_1 \Big/ \Sigma \dfrac{q_0 l_0}{l_0} l_1$ となる。分母は0時点の生産量を1時点の単位当たり必要労働量により加重して得られた生産数量であり，分子は0時点と同一労働投入量があったと仮定したとき1時点の技術水準で得らるべき生産量を l_1 で加重して得た生産量である。この比は労働生産性指数としての意味を持つことは明らかである。(3.2)式は同様に

$\Sigma \dfrac{q_1 l_1}{l_1} l_0 \Big/ \Sigma \dfrac{q_1 l_1}{l_0} l_0$ と変形できるので，同じような説明が与えられる。

---

(6) $\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{q_1}{q_0}\right) q_0 l_0}{\Sigma q_1 l_1}$ と変形すると，分母は1時点の実際労働投入量，分子は0時点における労働者と機械その他の生産条件の下で，1時点と同じ生産量の構成を得るのに必要とされたであろう労働時間をあらわす。

3.2 生産金額（あるいは付加価値総額）の分解により導出された算式

(2.3)～(2.6)式よりつぎの労働生産性指数が得られた。

$$\frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right)q_1l_1}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right)q_1l_1} \tag{3. 3}$$

$$\frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_0}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right)q_0l_0} \tag{3. 4}$$

$$\frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_1l_1}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_1l_1} \tag{3. 5}$$

$$\frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_0}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_0l_0} \tag{3. 6}$$

(3.4)式は $\Sigma p_0\frac{q_0l_0}{l_1}\Big/\Sigma p_0\frac{q_0l_0}{l_0}$ と変形できる。この分母は0時点における実際産出金額，分子は0時点と同一労働投入量を仮定して技術水準は1時点の水準であるときの仮想的生産量を0時点の価格で評価した実質生産金額であり，この比が生産性指数をあらわすことは明らかである。(3.3)式は $\Sigma p_0\frac{q_1l_1}{l_1}\Big/\Sigma p_0\frac{q_1l_1}{l_0}$ と変形できるし，(3.5)式は $\Sigma p_1\frac{q_1l_1}{l_1}\Big/\Sigma p_1\frac{q_1l_1}{l_0}$ と変形でき，(3.6) 式は，$\Sigma p_1\frac{q_0l_0}{l_1}\Big/\Sigma p_1\frac{q_0l_0}{l_0}$ と変形できるから，ほぼ同様の説明をなすことができる。

(3.4)式はふたたび，$\Sigma\left(\frac{l_0}{l_1}\right)p_0q_0\Big/\Sigma p_0q_0$ と変形できる。これは各個別生産性指数を0時点の金額（あるいは付加価値）で加重平均したものである。(3.3)式は $\Sigma p_0q_1\Big/\Sigma\left(\frac{l_1}{l_0}\right)p_0q_1$，(3.5)式は $\Sigma p_1q_1\Big/\Sigma\left(\frac{l_1}{l_0}\right)p_1q_1$ (3.6)式は $\Sigma\left(\frac{l_0}{l_1}\right)p_1q_0\Big/\Sigma p_1q_0$ と変形できるので，ほぼ同様の説明をなすことができる。

(3.3)式をまた別の形に変形すると，$\Sigma\left(\frac{l_0}{l_1}\right)p_0\frac{q_1l_1}{l_0}\Big/\Sigma p_0\frac{q_1l_1}{l_0}$ となる。これは，0時点の技術水準の下で1時点の労働投入があったときに得られるであろう生産量を0時点の価格で評価した生産金額をウェイトとする個別生産性指数の平均値である。上の変形を少しかえると，$\Sigma\left(\frac{l_0}{l_1}\right)\left(p_0\frac{l_1}{l_0}\right)q_1\Big/\Sigma\left(p_0\frac{l_1}{l_0}\right)q_1$ となる。$p_0\frac{l_1}{l_0}$ は，労働生産性が上昇した割合だけ価格が下落するものと考えた場合の1時点の仮想的価格であり，$\left(p_0\frac{l_1}{l_0}\right)q_1$ は，そのような価格で評価した1時点の生産金額と考えられ，原式はこれをウェイトとした個別労働生産性指数の平均と考えることができる。他の(3.4)，(3.5)，(3.6)式も同様の変形ができ，ほぼ同様の説明を与えることができる。

(3.3)式を更に変形すれば $\dfrac{\Sigma\left(\frac{q_1}{q_0}\right)p_0q_0\Big/\Sigma p_0q_0}{\Sigma\left(\frac{q_1l_1}{q_0l_0}\right)p_0q_0\Big/\Sigma p_0q_0}$ となる。これは個別生産指数を，それぞれの生産金額（あるいは付加価値）でウェイトした平均を，個別労働投入量指数をそれぞれの生産金額（あるいは付加価値）でウェイトして平均したもので除したことになっている。(3.6)式も $\dfrac{\Sigma p_1q_1\Big/\Sigma\left(\frac{q_0}{q_1}\right)p_1q_1}{\Sigma p_1q_1\Big/\Sigma\left(\frac{q_0l_0}{q_1l_1}\right)p_1q_1}$ と変形できるので，ほぼ同様の説明をすることができる。[7]

---

(7) 2.2から明らかに，生産金額（あるいは付加価値）の分解によって得られるのは，(3.3)〜(3.6)式であるが，他の類似式を考えれば，つぎのようなものがある。

$$\frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right)q_1l_0}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right)q_1l_0}=\frac{\Sigma\left(\frac{l_0}{l_1}\right)p_0q_1}{\Sigma p_0q_1},\qquad \frac{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_1}{\Sigma p_0\left(\frac{1}{l_0}\right)q_0l_1}=\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma\left(\frac{l_1}{l_0}\right)p_0q_0},$$

$$\frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_1l_0}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_1l_0}=\frac{\Sigma\left(\frac{l_0}{l_1}\right)p_1q_1}{\Sigma p_1q_1},\qquad \frac{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_1}\right)q_0l_1}{\Sigma p_1\left(\frac{1}{l_0}\right)q_0l_1}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma\left(\frac{l_1}{l_0}\right)p_1q_0}$$

付　表

式番号	A		B		
	算術平均	調和平均	算術平均	調和平均	算　術
(3. 1)	$w=q_0l_0l_1$	$w=q_0$	$w=q_0l_1$	$w=q_0l_0$	$w=w'$ $=\frac{q_0}{q_1}q_0l_0$
(3. 2)	$w=q_1l_1l_0$	$w=q_1$	$w=q_1l_1$	$w=q_1l_0$	$w=w'$ $=q_0l_0$
(3. 3)	$w=p_0q_1l_1$	$w=\frac{p_0q_1}{l_0}$	$w=p_0q_1\frac{l_1}{l_0}$	$w=p_0q_1$	$w=w'$ $=p_0q_0$
(3. 4)	$w=p_0q_0l_0$	$w=\frac{p_0q_0}{l_1}$	$w=p_0q_0$	$w=p_0q_0\frac{l_0}{l_1}$	$w=w'$ $=p_0q_0\frac{q_0l_0}{q_1l_1}$
(3. 5)	$w=p_1q_1l_1$	$w=\frac{p_1q_1}{l_0}$	$w=p_1q_1\frac{l_1}{l_0}$	$w=p_1q_1$	$w=w'$ $=p_1q_0$
(3. 6)	$w=p_1q_0l_0$	$w=\frac{p_1q_0}{l_1}$	$w=p_1q_0$	$w=p_1q_0\frac{l_0}{l_1}$	$w=w'$ $=p_1q_0\frac{q_0l_0}{q_1l_1}$
(3. 7)	$w=q_1l_1e_1l_0$	$w=q_1e_1$	$w=q_1l_1e_1$	$w=q_1l_0e_1$	$w=w'$ $=q_0l_0e_1$
(3. 8)	$w=q_1l_1e_0l_0$	$w=q_1e_0$	$w=q_1l_1e_0$	$w=q_1l_0e_0$	$w=w'$ $=q_0l_0e_0$
(3. 9)	$w=q_0l_0e_0l_1$	$w=q_0e_0$	$w=q_0l_1e_0$	$w=q_0l_0e_0$	$w=w'$ $=\frac{q_0^2l_0e_0}{q_1}$
(3.10)	$w=q_0l_0e_1l_1$	$w=q_0e_1$	$w=q_0l_1e_1$	$w=q_0l_0e_1$	$w=w'$ $=\frac{q_0^2l_0e_1}{q_1}$
(3.11)	—	—	—	—	$w=p_0q_0$ $w'=q_0l_0e_0$
(3.12)	—	—	—	—	$w=p_1q_0$ $w'=q_0l_0e_0$
(3.13)	—	—	—	—	$w=p_0q_0$ $w'=q_0l_0e_1$
(3.14)	—	—	—	—	$w=p_1q_0$ $w'=q_0l_0e_1$

D			E	
平均	調和平均			
$w=q_0l_1$ $w'=q_0l_0$	$w=q_0l_0$ $w'=q_0l_1$	$w=w'$ $=q_1l_1$	$w=\frac{q_0l_0}{q_1}$ $w'=\frac{q_0}{q_1}$	$w=l_1$ $w'=1$
$w=q_1l_1$ $w'=q_1l_0$	$w=q_1l_0$ $w'=q_1l_1$	$w=w'$ $=\frac{q_1}{q_0}q_1l_1$	$w=l_0$ $w'=1$	$w=\frac{q_1l_1}{q_0}$ $w'=\frac{q_1}{q_0}$
$w=p_0q_1\frac{l_1}{l_0}$ $w'=p_0q_1$	$w=p_0q_1$ $w'=p_0q_1\frac{l_1}{l_0}$	$w=w'$ $=p_0q_1\frac{q_1l_1}{q_0l_0}$	$w=p_0$ $w'=\frac{p_0}{l_0}$	$w=p_0\frac{q_1l_1}{q_0l_0}$ $w'=\frac{p_0q_1}{q_0l_0}$
$w=p_0q_0$ $w'=p_0q_0\frac{l_0}{l_1}$	$w=p_0q_0\frac{l_0}{l_1}$ $w'=p_0q_0$	$w=w'$ $=p_0q_1$	$w=p_0\frac{q_0l_0}{q_1l_1}$ $w'=\frac{p_0q_0}{q_1l_1}$	$w=p_0$ $w'=\frac{p_0}{l_1}$
$w=p_1q_1\frac{l_1}{l_0}$ $w'=p_1q_1$	$w=p_1q_1$ $w'=p_1q_1\frac{l_1}{l_0}$	$w=w'$ $=p_1q_1\frac{q_1l_1}{q_0l_0}$	$w=p_1$ $w'=\frac{p_1}{l_0}$	$w=p_1\frac{q_1l_1}{q_0l_0}$ $w'=\frac{p_1q_1}{q_0l_0}$
$w=p_1q_0$ $w'=p_1q_0\frac{l_0}{l_1}$	$w=p_1q_0\frac{l_0}{l_1}$ $w'=p_1q_0$	$w=w'$ $=p_1q_1$	$w=p_1\frac{q_0l_0}{q_1l_1}$ $w'=\frac{p_1q_0}{q_1l_1}$	$w=p_1$ $w'=\frac{p_1}{l_1}$
$w=q_1l_1e_1$ $w'=q_1l_0e_1$	$w=q_1l_0e_1$ $w'=q_1l_1e_1$	$w=w'$ $=\frac{q_1^2l_1e_1}{q_0}$	$w=l_0e_1$ $w'=e_1$	$w=\frac{q_1l_1e_1}{q_0}$ $w'=\frac{q_1}{q_0}e_1$
$w=q_1l_1e_0$ $w'=q_1l_0e_0$	$w=q_1l_0e_0$ $w'=q_1l_1e_0$	$w=w'$ $=\frac{q_1^2l_1e_0}{q_0}$	$w=l_0e_0$ $w'=e_0$	$w=\frac{q_1l_1e_0}{q_0}$ $w'=\frac{q_1}{q_0}e_0$
$w=q_0l_1e_0$ $w'=q_0l_0e_0$	$w=q_0l_0e_0$ $w'=q_0l_1e_0$	$w=w'$ $=q_1l_1e_0$	$w=l_1e_0$ $w'=e_0$	$w=\frac{q_0l_0e_0}{q_1}$ $w'=\frac{q_0}{q_1}e_0$
$w=q_0l_1e_1$ $w'=q_0l_0e_1$	$w=q_0l_0e_1$ $w'=q_0l_1e_1$	$w=w'$ $=q_1l_1e_1$	$w=\frac{q_0l_0e_1}{q_1}$ $w'=\frac{q_0}{q_1}e_1$	$w=l_1e_1$ $w'=e_1$
—	$w=p_0q_1$ $w'=q_1l_1e_0$	—	$w=p_0$ $w'=e_0$	—
—	$w=p_1q_1$ $w'=q_1l_1e_0$	—	$w=p_1$ $w'=e_0$	—
—	$w=p_0q_1$ $w'=q_1l_1e_1$	—	$w=p_0$ $w'=e_1$	—
—	$w=p_1q_1$ $w'=q_1l_1e_1$	—	$w=p_1$ $w'=e_1$	—

3.3　賃金支払総額の分解により導出された算式

$$\frac{\Sigma q_1 l_0 e_1}{\Sigma q_1 l_1 e_1} \tag{3.7}$$

$$\frac{\Sigma q_1 l_0 e_0}{\Sigma q_1 l_1 e_0} \tag{3.8}$$

$$\frac{\Sigma q_0 l_0 e_0}{\Sigma q_0 l_1 e_0} \tag{3.9}$$

$$\frac{\Sigma q_0 l_0 e_1}{\Sigma q_0 l_1 e_1} \tag{3.10}$$

(3.9)式をみると，分子は0時点における実際の賃金支払総額であり，分母は1時点における技術水準で0時点と等量の生産物を得るのに0時点と同一賃金率のとき支払われるべき賃金総額をあらわしている。この比率が生産性指数と考えられる。他の式もほぼ同様に説明される。

つぎに(3.7)式を変形すると，$\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{l_0}{l_1}\right)q_1 l_1 e_1}{\Sigma q_1 l_1 e_1}$ となる。これは個別生産性指数を1時点の賃金支払額でウェイトした平均である。他の式も同様に変形され，ほぼ同様の説明が可能である。

また，(3.8)式は $\dfrac{\Sigma\left(\dfrac{q_1}{q_0}\right)q_0 l_0 e_0 \Big/ \Sigma q_0 l_0 e_0}{\Sigma\left(\dfrac{q_1 l_1}{q_0 l_0}\right)q_0 l_0 e_0 \Big/ \Sigma q_0 l_0 e_0}$ と変形でき，分母は個別労働投入量指数を0時点の支払賃金でウェイトした平均であり，分子は個別生産数量指数を0時点の支払賃金でウェイトした平均である。これらの比は生産性指数と考えることができる。他の式も，ほぼ同様に説明できる。

3.4　分配率の分解により導出された算式

$$\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \Big/ \frac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0} \tag{3.11}$$

$$\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0} \Big/ \frac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0} \tag{3.12}$$

$$\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \Big/ \frac{\Sigma q_1 l_1 e_1}{\Sigma q_0 l_0 e_1} \tag{3.13}$$

$$\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_1q_0}\Big/\frac{\Sigma q_1l_1e_1}{\Sigma q_0l_0e_1} \tag{3.14}$$

(3.11)式の分母 $\frac{\Sigma q_1l_1e_0}{\Sigma q_0l_0e_0}$ は0時点の賃金率をウェイトとした労働投入量指数，分子は0時点の価格（あるいは単位当たり付加価値）p_0 をウェイトとした生産指数である。他の式も同様の説明が可能である。

また，(3.11)式を変形すると $\dfrac{\Sigma\left(\frac{q_1}{q_0}\right)p_0q_0\Big/\Sigma p_0q_0}{\Sigma\left(\frac{q_1l_1}{q_0l_0}\right)q_0l_0e_0\Big/\Sigma q_0l_0e_0}$ となる。これは，分母が個別労働投入量指数を0時点の支払賃金でウェイトした平均であり，分子が個別生産指数を0時点の金額（あるいは付加価値）でウェイトした平均であることから，労働生産性指数と考えることができる。他の式もほぼ同様の変形を行ない説明を加えることができる。

3.5 総合生産性指数との関連

つぎに上述の算式と総合生産性指数[8]との関連をみておこう。総合生産性指数の算式は

$$\frac{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)} \tag{3.15}$$

および

$$\frac{\Sigma q_0(l_0e_1+k_0r_1)}{\Sigma q_0(l_1e_1+k_1r_1)} \tag{3.16}$$

であった。

(3.15)式は変形すると，つぎのようになる。

$$\frac{\Sigma q_1l_1e_0}{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)}\cdot\frac{\Sigma q_1l_0e_0}{\Sigma q_1l_1e_0}+\frac{\Sigma q_1k_1r_0}{\Sigma q_1(l_1e_0+k_1r_0)}\cdot\frac{\Sigma q_1k_0r_0}{\Sigma q_1k_1r_0} \tag{3.15$'$}$$

$$\frac{1}{\dfrac{\Sigma q_1l_0e_0}{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}\cdot\dfrac{\Sigma q_1l_1e_0}{\Sigma q_1l_0e_0}+\dfrac{\Sigma q_1k_0r_0}{\Sigma q_1(l_0e_0+k_0r_0)}\cdot\dfrac{\Sigma q_1k_1r_0}{\Sigma q_1k_0r_0}} \tag{3.15$''$}$$

---

(8) 拙稿「J.W．ケンドリックの総合生産性指数に関する一考察」『香川大学経済論叢』第40巻第1号，pp.1—20。

$$\frac{1}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_0}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1 l_1 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}}+\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_0}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}}} \quad (3.15''')$$

(3.15′)式は，(3.8)式で示された労働生産性指数と $\dfrac{\Sigma q_1 k_0 r_0}{\Sigma q_1 k_1 r_0}$ で示される資本の生産性指数を，賃金率，収益率が0時点のものと同じと仮定されたときのそれぞれの分配率を加重とする平均をあらわしている。(3.15″)式は，同じ労働生産性指数，資本の生産性指数を，$\dfrac{\Sigma q_1 l_0 e_0}{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}$ および $\dfrac{\Sigma q_1 k_0 r_0}{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}$ でウェイトし調和平均をとったものである。また，(3.15‴)式は，(3.11)式で示される労働生産性指数と，$\dfrac{\Sigma q_1(l_0 e_0+k_0 r_0)}{\Sigma q_0(l_0 e_0+k_0 r_0)}\Big/\dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_0}{\Sigma q_0 k_0 r_0}$ で示される資本の生産性指数とを0時点の分配率で調和平均したものである。

つぎに，(3.16)式を変形すると

$$\frac{\Sigma q_0 l_1 e_1}{\Sigma q_0(l_1 e_1+k_1 r_1)}\cdot\frac{\Sigma q_0 l_0 e_1}{\Sigma q_0 l_1 e_1}+\frac{\Sigma q_0 k_1 r_1}{\Sigma q_0(l_1 e_1+k_1 r_1)}\cdot\frac{\Sigma q_0 k_0 r_1}{\Sigma q_0 k_1 r_1} \quad (3.16')$$

$$\frac{1}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1+k_0 r_1)}\cdot\dfrac{\Sigma q_0 l_1 e_1}{\Sigma q_0 l_0 e_1}+\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1+k_0 r_1)}\cdot\dfrac{\Sigma q_0 k_1 r_1}{\Sigma q_0 k_0 r_1}} \quad (3.16'')$$

$$\frac{1}{\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1+k_0 r_1)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1 l_1 e_1}{\Sigma q_0 l_0 e_1}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_1 e_1+k_1 r_1)}{\Sigma q_0(l_1 e_1+k_1 r_1)}}+\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1+k_0 r_1)}\cdot\dfrac{\dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_1}{\Sigma q_0 k_0 r_1}}{\dfrac{\Sigma q_1(l_1 e_1+k_1 r_1)}{\Sigma q_0(l_1 e_1+k_1 r_1)}}} \quad (3.16''')$$

となる。

(3.16′)式は，(3.10)式と $\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_1}{\Sigma q_0 k_1 r_1}$ とを分配率 $\dfrac{\Sigma q_0 l_1 e_1}{\Sigma q_0(l_1 e_1+k_1 r_1)}$ および $\dfrac{\Sigma q_0 k_1 r_1}{\Sigma q_0(l_1 e_1+k_1 r_1)}$ で加重平均したものであり，(3.16″)式は，やはり同じ労働生産性指数および，資本の生産性指数をウェイト $\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1+k_0 r_1)}$,

$\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1 + k_0 r_1)}$により調和平均したものである。(3.16''') 式は (3.14) 式を労働生産性指数，$\dfrac{\Sigma q_1(l_1 e_1 + k_1 r_1)}{\Sigma q_0(l_1 e_1 + k_1 r_1)} \Big/ \dfrac{\Sigma q_1 k_1 r_1}{\Sigma q_0 k_0 r_1}$ を資本の生産性指数として，それぞれのウェイトとして $\dfrac{\Sigma q_0 l_0 e_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1 + k_0 r_1)}$, $\dfrac{\Sigma q_0 k_0 r_1}{\Sigma q_0(l_0 e_1 + k_0 r_1)}$ を用いた加重調和平均である。

4. 結　語

この小論の主題は，労働生産性指数の構成法を明確にすることと，労働生産性指数の代表的具体的算式を，それと関連して考えられる経済量の分解によって導出することにあった。算式間の比較，計算上の実際的問題など，多くのことを不問に付した。

わが国の労働生産性指数の実際算式を記号でかけば，つぎのようになる。

$$\frac{\sum_{j=1}^{m}\left\{\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n_j} q_1 p_0}{\sum_{i=1}^{n_j} q_0 p_0} \bigg/ \dfrac{\sum_{i=1}^{n_j} q_1 l_1}{\sum_{i=1}^{n_j} q_0 l_0}\right)\sum_{i=1}^{n_j} p_0 q_0\right\}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n_j} p_0 q_0\right)} \qquad (4.\ 1)$$

ただし，j は業種をあらわし，全部で m 業種（実際は19業種）あり，i はある特定業種内の特定品目をあらわし，品目数は，各業種につき n_1, n_2, ……, n_mある。分子の(　)内の業種別生産性指数を計算するにあたっては，前述の(E)式で $w = p_0$, $w' = 1$ としたものを考え，全業種の労働生産性指数を計算するにあたっては，(C)式のようなものを考え，w として $\sum_{i=1}^{n_j} p_0 q_0$ を用いているといえよう。(9)

(9) $\dfrac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \Big/ \dfrac{\Sigma q_1 l_1}{\Sigma q_0 l_0}$ を $\dfrac{q_1}{q_0} \Big/ \dfrac{q_1 l_1}{q_0 l_0}$ とみなせば(C)式そのものであるが，実際式はそうではないので，業種内での構造変化を含む生産性が評価されることになる。なお，これと同じ考え方をしたものに〔6〕がある。わが国の労働生産性指数については〔7〕参照。

また，ソ連の生産性の測定式は，つぎのようである。

$$\frac{\Sigma q_1 l_n}{\Sigma q_1 l_1} \Big/ \frac{\Sigma q_0 l_n}{\Sigma q_0 l_0} = \frac{\Sigma q_1 l_n}{\Sigma q_0 l_n} \Big/ \frac{\Sigma q_1 l_1}{\Sigma q_0 l_0} \qquad (4.\ 2)$$

ただし，l_n は製造基準による生産物1単位当たり労働投入量である。
これは，(F)式あるいは，(E)式で $w=l_n$，$w'=1$ とおいたものである。(10)

このように，実際計算式は，データの利用可能性とか，正確性，その生産性指数の使用目的などによって限定されるので，具体的に充分な検討がなされねばならないが，今後の課題としたい。

参　考　文　献

〔1〕 森田優三編『統計学』青林書院新社，1955。

〔2〕 森田優三『統計学汎論』日本評論社，1948。

〔3〕 森田優三『統計概論＜増補版＞』日本評論新社，1956。

〔4〕 Magdoff, H., "The Purpose and Method of Measuring Productivity," *Journal of the American Statistical Association*, vol.34, June 1939.

〔5〕 Evans, W.D. and I.H. Siegel, "The Meaning of Productivity Indexes," *Journal of the American Statistical Association*, vol.37, March 1942.

〔6〕 Nicholson, R.J. and S. Gupta, "Output and Productivity Change in British Manufacturing Industry, 1948—1954," *Journal of the Royal Statistical Society (Series A)*, vol.123, Part 4, 1960.

〔7〕 日本生産性本部生産性研究所『季刊生産性統計』

〔8〕 Baklanov, G.I., "Measurement of Labor Productivity in Soviet Industry," J.T. Dunlop and V.P. Diatchenko (eds.), *Labor Productivity*, Mc Graw-Hill, 1964.

(付　記)

2.3において，賃金支払総額＝労働投入量・単位当たり労働費用・労働生産性という分解を行なうと，(3.7)～(3.10)式以外に，

$$\frac{\Sigma q_1 l_1 e_1}{\Sigma \frac{l_1}{l_0} q_1 l_1 e_1}, \quad \frac{\Sigma \frac{l_0}{l_1} q_0 l_0 e_0}{\Sigma q_0 l_0 e_0}$$

が得られることがわかった。

---

(10) 〔8〕pp.36—44。