

## クールノー型複占モデルと微分ゲーム\*

阿部文雄

## I 序

クールノー型複占モデルの従来の研究において、クールノー的均衡の存在の問題とともに、その安定性が重要なテーマとなっている。<sup>(1)</sup>我々のとりあつかうテーマは、この安定性と関わるものである。最も単純化されたクールノーモデル（需要関数が線型で、産出量調整に限界もタイムラグもない離散型モデル。ただし、このモデルではいわゆるクールノー的予想のもとで、交互に産出量調整が行なわれるのではなく、同時に産出量調整が行なわれる。）においては、任意の初期点から出発し、クールノー均衡点へ到達する径路は、均衡点を中心に振動しながら収束していくという特徴をもっている。その場合、初期点が均衡から遠いほど、大きな産出量の変動をとまなう。また、このことを価格面からみると、やはりかなり大幅な価格変動がみられるであろう。そこで改良されたのが、産出量調整にタイムラグを導入したモデルである。このモデルでは、ラグ係数を適当に定めることによって、振動のない、かなり現実的な径路を求めることができる。

小論文の目的は、上述したクールノー型複占モデルを微分ゲームを適用して再定式化し、最適径路の導出を試みることである。言い換えれば、クールノー型複占モデルの一つの動学化である。その際、従来との分析と異なる主な点は、①計画期間中の利潤汎関数の最大化問題として定式化すること、②産出量調整

※ 本稿の作成にあたり、香川大学経済学部・宍戸栄徳氏との討論を通じ、多くの有益な助言を頂いた。同氏に心より謝意を表明したい。また、同大学数学研究会及び近代経済学研究会のメンバーの方々には、貴重なコメントを頂いた。合わせてお礼を申し上げます。

(1) 奥口孝二〔6〕〔7〕参照。

能力に一定の限界をおくこと<sup>(2)</sup>、④両企業は、Nash 均衡制御をとること、である。その他の仮定については、ほぼ最も単純化されたクールノーモデルに従う。このような設定をおくとき、第2節以下の分析が示すように、従来の分析とはやや異なった過程を経て、均衡点へ収束する安定的な径路を導くことができる。

ところで、微分ゲームは、周知のように、R. Isaacs, *Differential Games* (1965) を先駆的業績として近時精力的に研究されている数学理論である。またこれは、「最適制御理論とゲームの理論の接点<sup>(3)</sup>にある問題」をとりあつかう理論であるといわれている。ゲームの理論にあっては、戦略と均衡解との対応に力点がおかれる反面、均衡に到るプロセスの説明力に難点があり、また最適制御理論にあっては、「1人の「人」<sup>(4)</sup>による制御問題がとりあつかわれ、競争的状况のもとにおける複数の主体の行動を分析対象としなかったという点を考え合わせるならば、微分ゲームはそれらの発展的統合といえるであろう。微分ゲームには、種々のタイプがあるが、我々がここで利用するのは、非ゼロ和・非協力・二人微分ゲーム (Nonzero-Sum Noncooperative Two-Player Differential Game) である。

## II モデルと諸仮定

### 仮定1 需要関数

第1企業と第2企業が存在し、同一の生産物を生産すると仮定する。このとき、需要関数が次のように与えられるとする。

$$p(t) = a - b(x_1(t) + x_2(t)), \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (1)$$

$$p(t) \geq 0 \quad (2)$$

### 仮定2 状態方程式

状態方程式が次のように与えられるとする。ここで、両企業の初期産出量水

(2) このような仮定を置いて、微分ゲームによる複占分析を行なったものに、例えば、N. Takeuchi [13] がある。

(3) ガブリロフ [1], 邦訳 pp. 6.

(4) 同上書, pp. 6.

準は所与とする。

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad x_1(0) = x_1^0 \geq 0 \quad (\text{given}) \quad (3)$$

$$\dot{x}_2(t) = v(t), \quad x_2(0) = x_2^0 \geq 0 \quad (\text{given}) \quad (4)$$

ここで、 $u(t)$ 、 $v(t)$  はそれぞれ、第 1 企業及び第 2 企業の制御変数である。<sup>(5)</sup> ここで、 $\dot{x}_1 = dx/dt$  である。

**仮定 3** 許容制御集合

両企業の許容制御集合が次のように与えられるとする。

$$U = \{u(t) \mid u(t) \in [-\alpha_1, \alpha_1], \alpha_1 > 0\} \quad (5)$$

$$V = \{v(t) \mid v(t) \in [-\alpha_2, \alpha_2], \alpha_2 > 0\} \quad (6)$$

ただし、ここで、定数  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  はかならずしも等しいとは限らないものとする。

**仮定 4** 目的関数

両企業は、計画期間  $[0, T]$  を通じて、次のような利潤汎関数を最大化するように行動するものとする。

$$M_1 \equiv \int_0^T \Pi_1(t) dt \quad (7)$$

$$M_2 \equiv \int_0^T \Pi_2(t) dt \quad (8)$$

ただし、ここで、

$$\Pi_1(t) = p(t)x_1(t) - c_1x_1(t) \quad (9)$$

$$\Pi_2(t) = p(t)x_2(t) - c_2x_2(t) \quad (10)$$

である。<sup>(6)</sup> また、 $T$  (終端時刻) は所与とする。<sup>(7)</sup>

- (5) このように制御変数が時間  $t$  だけの関数となっている制御は、open-loop 制御と呼ばれる。
- (6) ここで、 $C_1$ 、 $C_2$  はそれぞれ、第 1 企業および第 2 企業の平均＝限界費用である。なお、小稿ではクールノー均衡点の存在問題に触れないので、 $C_1$ 、 $C_2$  を含む諸パラメータは、クールノー均衡点の存在を保証するような値をとるものと仮定されている。
- (7) このモデルにおいては、投資行動を含んでいないので、 $T$  は比較的短期間を想定するのが適当であろう。また、終端時刻を指定することには、周知のやっかいな困難もあるが、このモデルにおいては、以下の分析が示すように、最適経路の決定に crucial な役割をもっているわけではない。

### 仮定5

各企業は、任意の時点において、その時点のライバル企業の産出量水準を知ることができるが、その時点でとるライバル企業の制御については分らないものとする。<sup>(8)</sup>

### 仮定6

両企業は、Nash 均衡制御を行なうものとする。

### 定義

$J_1(s_1, s_2)$ ,  $J_2(s_1, s_2)$  を、プレイヤー1, 2に対する評価(目的)関数とするとき、もし、 $i=1, 2$  について、

$$J_1[s_1^*(t), s_2^*(t)] \geq J_1[s_1(t), s_2^*(t)], t \in [0, T] \quad (11)$$

$$J_2[s_1^*(t), s_2^*(t)] \geq J_2[s_1^*(t), s_2(t)], t \in [0, T] \quad (12)$$

が成立するならば、戦略集合  $\{s_1^*(t), s_2^*(t)\}$ ,  $t \in [0, T]$  は、Nash 均衡戦略(制御)集合である。ここで、 $s_i(t)$  ( $i=1, 2$ ) は、プレイヤー  $i$  についての任意の許容戦略である。

さて、以上の諸仮定をおくとき、我々の取り扱かう問題は、次のように定式化される。

$$\text{Max}_{u(t)} M_1 \equiv \int_0^T \Pi_1(t) dt$$

$$\text{Max}_{v(t)} M_2 \equiv \int_0^T \Pi_2(t) dt$$

subject to

$$\Pi_1(t) = p(t)x_1(t) - c_1x_1(t) \quad (9)$$

$$\Pi_2(t) = p(t)x_2(t) - c_2x_2(t) \quad (10)$$

$$p(t) = a - b[x_1(t) + x_2(t)], a > 0, b > 0 \quad (1)$$

(8) この仮定は、いわゆる「クールノー仮説」と関わっている。クールノー仮説は二つの事柄から構成されていると考えられる。すなわち、①完全情報、つまりライバル企業の前期(離散型)の産出量水準、あるいは現在時点(連続型)のそれが分っていること。②クールノー的予想、つまり今期(あるいは現在時点)のライバル企業の産出量調整はないものと予想すること、である。我々は、①に関してはそのまま踏襲し、②に関しては、より一般的な形で「分らない」という形にしており、特定の「予想」を仮定していない。

$$p(t) \geq 0 \tag{2}$$

$$x_1(t) = u(t), \quad x_1(0) = x_1^0 \geq 0 \quad (\text{given}) \tag{3}$$

$$x_2(t) = v(t), \quad x_2(0) = x_2^0 \geq 0 \quad (\text{given}) \tag{4}$$

$$u(t) \in U \tag{13}$$

$$v(t) \in V \tag{14}$$

III 最適解の必要条件

問題,  $\underset{u(t)}{Max} M_1, \underset{v(t)}{Max} M_2$ , subject to (1), (2), (3), (4), (9), (10), (13), (14) に最適解 (Nash 均衡解) が存在するとすれば, 以下の条件, [A] [B], [C] を満足する連続関数  $\lambda_{ij}(t, j=1,2)$  が存在しなければならない。<sup>(9)</sup>

[A]

$$\lambda_{11}(t) = -\frac{\partial H_1(t)}{\partial x_1(t)} \tag{15}$$

$$\lambda_{12}(t) = -\frac{\partial H_1(t)}{\partial x_2(t)} \tag{16}$$

$$\lambda_{21}(t) = -\frac{\partial H_2(t)}{\partial x_1(t)} \tag{17}$$

$$\lambda_{22}(t) = -\frac{\partial H_2(t)}{\partial x_2(t)} \tag{18}$$

[B]

$$H_1[u^*(t), v^*(t)] \geq H_1[u(t), v^*(t)], \quad t \in [0, T] \tag{19}$$

$$H_2[u^*(t), v^*(t)] \geq H_2[u^*(t), v(t)], \quad t \in [0, T] \tag{20}$$

[C] 横断条件

$$\lambda_{11}(T) = 0 \tag{21}$$

$$\lambda_{22}(T) = 0 \tag{22}$$

(9) この種の必要条件の一般的な表現は, A. W. Starr & Y. C. Ho [11] で与えられている。我々がここで述べる必要条件は, open-loop 制御でかつ, 終端状態に関する項が目的関数に含まれていない special case である。また, 必要条件の表現には, value-function approach と variational approach とがあり, ここで述べたものは後者である。

ただし、ここで、ハミルトニアン  $H_1, H_2$  は次のように定義される。

$$H_1(t) = p(t)x_1(t) - c_1x_1(t) + \lambda_{11}(t)u(t) + \lambda_{12}(t)v(t) \quad (23)$$

$$H_2(t) = p(t)x_2(t) - c_2x_2(t) + \lambda_{21}(t)u(t) + \lambda_{22}(t)v(t) \quad (24)$$

そこで、以下、各条件を検討してみよう。まず条件 [A] について。条件 [A] は、簡単な計算によって次のようになる。

$$\lambda_{11}(t) = 2bx_1(t) + bx_2(t) - (a - c_1) \quad (15')$$

$$\lambda_{12}(t) = bx_1(t) \geq 0 \quad (16')$$

$$\lambda_{21}(t) = bx_2(t) \geq 0 \quad (17')$$

$$\lambda_{22}(t) = bx_1(t) + 2bx_2(t) - (a - c_2) \quad (18')$$

第1図で示されるように、 $\lambda_{11} = 0, \lambda_{22} = 0$  を満足する直線を  $(x_1, x_2)$ -平面に描くことができる。<sup>(10)</sup>そこで、以下の分析上の便宜を考慮して、次のような七つの領域に分ける。

$$S_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid \lambda_{11} > 0, \lambda_{22} > 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$S_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid \lambda_{11} > 0, \lambda_{22} < 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$S_3 = \{x = (x_1, x_2) \mid \lambda_{11} < 0, \lambda_{22} > 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$S_4 = \{x = (x_1, x_2) \mid \lambda_{22} < 0, \lambda_{22} < 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$S_5 = \{x = (x_1, x_2) \mid \lambda_{11} = 0, \lambda_{22} \neq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$S_6 = \{x = (x_1, x_2) \mid \lambda_{11} \neq 0, \lambda_{22} = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

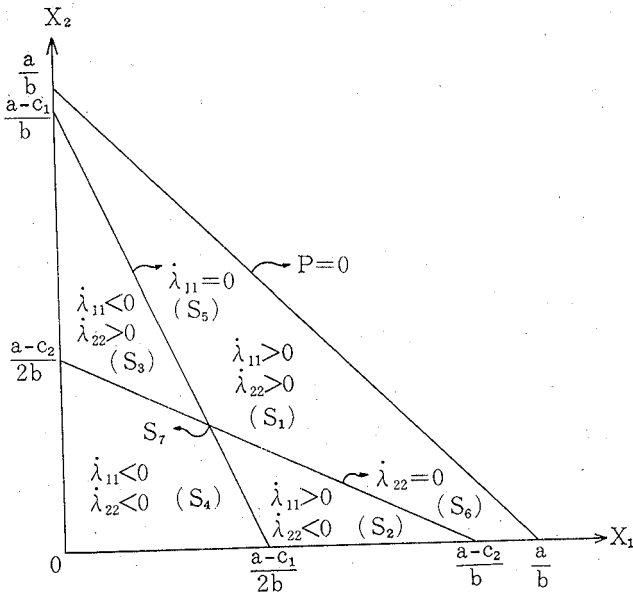
$$S_7 = \{x = (x_1, x_2) \mid \lambda_{11} = 0, \lambda_{22} = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

次に条件 [B] について。この条件は、目的関数が制御変数  $u(t), v(t)$  に依存せず、また、 $x_1(t), x_2(t)$  が、それぞれ、 $u(t), v(t)$  の線型関数であることから、 $\lambda_{11}(t) = 0$  あるいは  $\lambda_{22}(t) = 0$  となる場合を除き、端点解が成立することを意味する。換言すれば、Nash 均衡制御は、このモデルの場合、bang-bang 制御である。それゆえ、条件 [B] は、次の条件 [B'] と同値である。<sup>(11)</sup>

(10) これらの直線は、いわゆる反応関数と同じ形をしている。

(11) なおこのとき、次のことが成り立っている。すなわち、 $H_1(u^*(t), v^*(t)) = \text{constant}$ ,

$H_2(u^*(t), v^*(t)) = \text{constant}$ 。証明は、 $\frac{dH_1^*}{dt} = \frac{dH_2^*}{dt} = 0$  より明らかである。



< 第1図 >

[B']

$$\text{Max}_{u(t)} H_1(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{11}(t) > 0 & \text{ならば, } u^*(t) = \alpha_1 \\ \lambda_{11}(t) < 0 & \text{ならば, } u^*(t) = -\alpha_1 \end{cases}$$

$$\text{Max}_{v(t)} H_2(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{22}(t) > 0 & \text{ならば, } v^*(t) = \alpha_2 \\ \lambda_{22}(t) < 0 & \text{ならば, } v^*(t) = -\alpha_2 \end{cases}$$

ここで、以上の必要条件において重要な役割をはたす補助変数  $\lambda_{ij}(i, j=1, 2)$ 、および、ハミルトニアン  $H_i(i=1, 2)$  の経済学的意味に触れておこう。まず補助変数  $\lambda_{ij}(i, j=1, 2)$  について。今、最適経路  $\{x_1^*(\tau), x_2^*(\tau) \mid t \leq \tau \leq T\}$  上の任意の  $\tau$  時点における第  $i$  企業 ( $i=1, 2$ ) の利潤を  $\Pi_i^*(\tau) = p^*(\tau)x_i^*(\tau) - c_i x_i^*(\tau)$  とすれば、条件 [A] から  $\lambda_{ij}(\tau) = -\frac{\partial \Pi_i^*(\tau)}{\partial x_j^*(\tau)}$  であることを考慮することにより、

$$\lambda_{ij}(t) = \int_t^T \frac{\partial \Pi_i^*(\tau)}{\partial x_j^*(\tau)} d\tau, \quad i, j=1, 2 \tag{25}$$

を得る。従って、 $\lambda_{ij}(t)$  は、 $t$  時点において、第  $j$  企業の産出量を 1 単位増加

させた場合、第  $i$  企業が期間  $[t, T]$  にわたって得る利潤（または損失）を表わすことになる。またこのとき、ハミルトニアン  $H_i(t)$ , ( $i=1,2$ ) は、利潤プラス両企業の産出量調整によって生じる利潤（または損失）を意味することになる。

### III 最適経路の特徴（その1. $\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leq 2$ の場合）

さて、以上の必要条件から具体的に最適経路を求めてみよう。まず各時点における Nash 均衡制御を見出すためには、条件 [B'] から明らかなように、各時点での補助変数  $\lambda_{11}(t)$ ,  $\lambda_{22}(t)$  の符号を知らねばならない。そこで、 $t=T$  時点における  $\lambda_{11}(T)=\lambda_{22}(T)=0$ （横断条件）を手がかりとして、 $T$  時点から時間を逆にたどっていくという方法をとる。その際、手順として終端状態の位置によって、以下のように、三段階のステップに分けて順次取り上げていく<sup>(14)</sup>。また、各ステップにおいて、最初は局所的分析、すなわち、十分に小さくとった  $\varepsilon(>0)$  に対して、次のように定義される  $\varepsilon$ -近傍内についての分析を行ない、続いて、 $\varepsilon$  を適当に大きくしていった場合の大域的分析へと進む。

$$N(\varepsilon) = \{t \mid t \in [T-\varepsilon, T], \varepsilon > 0\} \quad (26)$$

#### ステップ1 $x^T \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ のケース

この場合、 $x^T = [x_1(T), x_2(T)]$  の位置を上述のように指定すると、 $\lambda_{11}(T) = \lambda_{22}(T) = 0$  と、 $\varepsilon$ -近傍内での  $\lambda_{11}(t)$ ,  $\lambda_{22}(t)$  の符号により、 $\varepsilon$ -近傍内における  $\lambda_{11}(t)$  及び  $\lambda_{22}(t)$  の符号を決定することができる。例えば、 $x^T \in S_4$  のケースで考えてみよう。このとき、 $\lambda_{11}(T) = \lambda_{22}(T) = 0$  でかつ、 $\lambda_{11}(t) < 0$ ,  $\lambda_{22}(t) < 0$  ( $t \in N(\varepsilon)$ ) であることから、 $\lambda_{11}(t)$ ,  $\lambda_{22}(t)$  が厳密に減少関数であること、それゆえ、 $\lambda_{11}(t) > 0$ ,  $\lambda_{22}(t) > 0$  であることが分る。従ってこのとき、Nash

(12) 従って、 $\lambda_{ii}$  ( $i=1, 2$ ) は自らのとる制御によって自らが享受する効果を示し、 $\lambda_{ij}$  ( $i \neq j$ ) は、ライバル企業のとる制御によって影響を受ける効果を示している。

(13) このような方法が利用できるのは、上述の必要条件が、微分ゲームを微分方程式の境界値問題へ還元させるという基本的性質をもっているからである。

(14) 我々の想定するモデルにあっては、終端状態がどのような位置になるかは、 $x_1^0$ ,  $x_2^0$ ,  $T$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  といったパラメーターの値に依存することになる。それゆえ、これらの値如何では、 $S_1$  から  $S_7$  で示される領域のいずれにも位置する可能性がある。

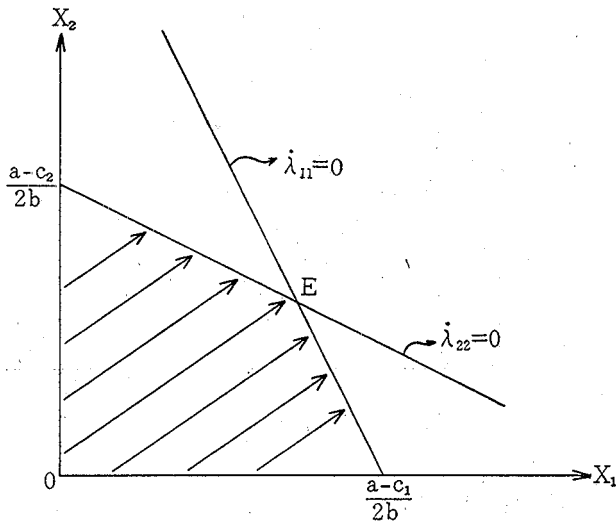


均衡制御は、 $u(t)=\alpha_1$ 、 $v(t)=\alpha_2$  となる。同時に、状態方程式は、 $\dot{x}_1(t)=\alpha_1$ 、 $\dot{x}_2(t)=\alpha_2$  と表わされ、これを解かれた形で示すと次のようになる。

$$x_1(t) = x_1^T - \alpha_1(T-t) \tag{27}$$

$$x_2(t) = x_2^T - \alpha_2(T-t) \tag{28}$$

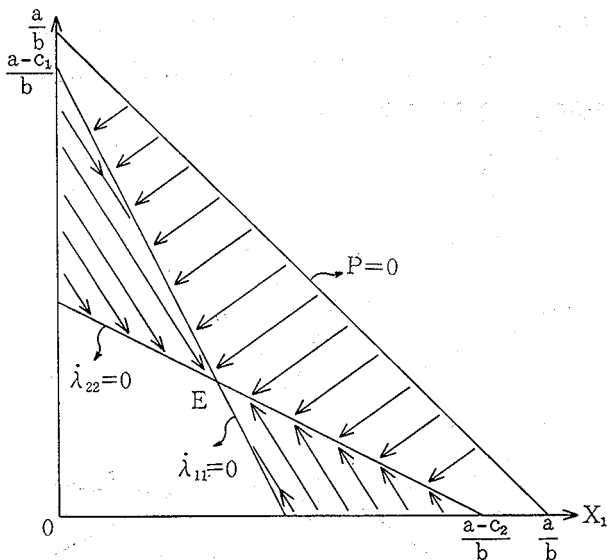
以上のことから、 $x^T \in S_4$  の場合、 $\varepsilon$ -近傍において  $x^T$  点を通るユニークな最適解が存在することが分る。さてそこで、今度は  $\varepsilon$  を適当に大きくしていった場合を考えてみよう。この場合  $[x_1(t), x_2(t)] \in S_4$  である限り、 $\lambda_{11}(t)$ 、 $\lambda_{22}(t)$  の符号は変化せず、それゆえ、制御の切り換えは、いずれの企業においても生じない。従って、微分方程式、 $\dot{x}_1(t)=\alpha_1$  および  $\dot{x}_2(t)=\alpha_2$  の  $x_1$ 、 $x_2$  についての定義域を  $S_4$  全体に延長することができる。かくして上述した  $\varepsilon$ -近傍内での局所的分析は、 $S_4$  の領域全体において大域的に成立することが分る。以上の分析から、一般性を失うことなく、 $S_4$  の領域における最適経路が第2図のごとく描かれることが保証されるであろう。また、 $S_1$ 、 $S_2$  および  $S_3$  の場合についても、同様の分析ができ、表1のようにまとめることができよう。またその場合の最適経路も第3図のように示される。



< 第2図 >

	$\dot{\lambda}_{11}(t)$	$\lambda_{11}(t)$	$u(t)$	$x_1(t)$
	$\dot{\lambda}_{22}(t)$	$\lambda_{22}(t)$	$v(t)$	$x_2(t)$
$x^T \in S_1$	+	-	$-\alpha_1$	$x_1(T) + \alpha_1(T-t)$
	+	-	$-\alpha_2$	$x_2(T) + \alpha_2(T-t)$
$x^T \in S_2$	+	-	$-\alpha_1$	$x_1(T) + \alpha_1(T-t)$
	-	+	$\alpha_2$	$x_2(T) - \alpha_2(T-t)$
$x^T \in S_3$	-	+	$\alpha_1$	$x_1(T) - \alpha_1(T-t)$
	+	-	$-\alpha_2$	$x_2(T) + \alpha_2(T-t)$
$x^T \in S_4$	-	+	$\alpha_1$	$x_1(T) - \alpha_1(T-t)$
	-	+	$\alpha_2$	$x_2(T) - \alpha_2(T-t)$

< 第1表 >



< 第3図 >

ステップ2  $x^T \in S_5 \cup S_6$  のケース

このケースは、 $x^T = [x_1(T), x_2(T)]$  が  $\lambda_{11} = 0$  曲線あるいは  $\lambda_{22} = 0$  曲線上

にある場合である。<sup>(15)</sup> 例えば、 $x^T \in S_5$  であるとしよう。そして今、 $x^T$  が第4図の線分EBの内点にあるとする。この点において $\lambda_{11} = 0$ 、 $\lambda_{22} < 0$  であり、かつ、 $\lambda_{11}(T) = \lambda_{22}(T) = 0$  である。そこでまず、 $\varepsilon$ -近傍内での局所的性質について考えてみよう。このとき明らかに、 $\lambda_{22}(t) > 0$  ( $t \in N(\varepsilon)$ ) であるから、第2企業の Nash 均衡制御は決定され、 $v(t) = \alpha_2$  である。また、この場合第2企業については、 $\varepsilon$  を適当に大きくしていても、制御の切り換えは生じない。一方、第1企業の Nash 均衡制御を決定するために必要な  $\lambda_{11}(t)$  の符号については確定できない。というのは、 $\varepsilon$ -近傍における  $\lambda_{11}(t)$  の符号が決まらないからである。そこで、次の3つのケースに分けて考えてみる。すなわち、 $t \in N(\varepsilon)$  について、

$$(イ) \quad \lambda_{11}(t) > 0$$

$$(ロ) \quad \lambda_{11}(t) < 0$$

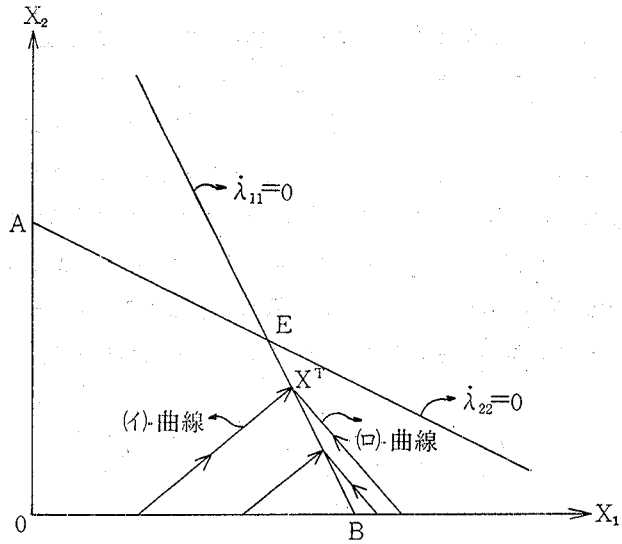
$$(ハ) \quad \lambda_{11}(t) = 0$$

のケースである。まず(イ)のケースについて。この場合、 $\lambda_{11}(T) = 0$  であることを考慮すれば、 $\lambda_{11}(t) < 0$  でなければならない。というのは、 $\lambda_{11}(t) > 0 \rightarrow \lambda_{11}(T) = 0$  であるためには、 $\lambda_{11}(t)$  が厳密に減少関数でなければならないからである。従って、 $\varepsilon$ -近傍内において、 $[x_1(t), x_2(t)] \in S_4$  でなければならない。そして、ステップ1の結論と合わせ考えると、最適径路はこの場合、典型的には、第4図(イ)-曲線のごとく示されるであろう。(ロ)のケースについては、 $\lambda_{11}(t) > 0$  でなければならない。従って、 $[x_1(t), x_2(t)] \in S_2$  となる。この場合の最適径路は、やはり典型的には、第4図(ロ)-曲線のごとく示される。次に(ハ)のケースについて。このケースでは、 $\lambda_{11}(T) = 0$  かつ  $\lambda_{11}(t) = 0$  であるから、 $\varepsilon$ -近傍内では、 $\lambda_{11} = 0$  曲線上に位置することになるが、 $\lambda_{22}(t) > 0$ 、従って、 $x_2(t) > 0$  であることから、 $[x_1(t), x_2(t)]$  は、 $\lambda_{11} = 0$  曲線上の  $x^T$  点よりも右下、すなわち、B点のある側に存在することになる。また、(イ)、(ロ)のケースでは、一般に  $\varepsilon$  を適当に大きくしていったとしても、ステップ

(15) ただし、両曲線の交点は除かれる。

1の結論から明らかなように、 $\lambda_{11}(t)$ 、 $\lambda_{22}(t)$ の符号が変わることはないが、(ハ)のケースでは、 $\lambda_{11}(t) \neq 0$ となる場合が起こりうる。そして、 $\lambda_{11}(t) = 0$ である間は、 $\lambda_{11} = 0$ 曲線上を動くことを意味し、またそれが最適でもある。 $\lambda_{11}(t) \neq 0$ となれば、その点から領域  $S_2$  か  $S_4$  内へ入っていくことが最適となる。この  $\lambda_{11}(t)$  が非ゼロとなる時点が第1企業の制御切り換え点である。<sup>(16)</sup>(第4図参照)。初期点が  $S_2$  か  $S_4$  にあり、Nash 均衡制御によって、線分EB上の内点に  $t = T$  時点以前に到達した場合、第1企業がそれまでとっていた制御、 $u(t) = \alpha_1$  あるいは、 $u(t) = -\alpha_1$  を、 $u(t) = -\frac{1}{2}\alpha_2$  に切り換えることによって、 $\lambda_{11} = 0$  曲線上を動かすることができる。その際、一つのやっかいな問題が生じる。すなわち、 $\lambda_{11} = 0$  曲線上に到達した場合、第2企業においては、 $\lambda_{22}(t)$  の符号に変化が生じないのでそれまでとっていた制御を切り換える必要はない。従って、第1企業だけが、 $\lambda_{11} = 0$  曲線上に乗ることを考慮することになる。しかし、この場合、仮定5によってライバル企業のとる戦略が分からないので、事前に、 $u(t) = -\frac{1}{2}\alpha_2$  を決定できないことになる。換言すれば、Nash 均衡制御が実行可能であるかという問題である。ここでもし、脚注(8)のクールノー仮説の②クールノー的予想を第1企業がとるとすれば、その制御は、 $u(t) = 0$  となるであろう。その結果、瞬間的に  $\lambda_{11} = 0$  曲線から乖離することになるが、この乖離を第1企業が認めるや、 $\lambda_{11} = 0$  曲線へ到達すべく制御  $u(t) = -\alpha_1$  を切り換えるであろう。従って、この場合第1企業が制御  $u(t) = -\frac{1}{2}\alpha_2$  を選択できなくとも  $\lambda_{11} = 0$  曲線に向う強い吸引力が働き、究極的には、この  $\lambda_{11} = 0$  曲線に沿ってクールノー均衡点へ収束する安定的な径路が存在することが確かめられるであろう。またこのことは、我々の仮定5のもとでも確認されるであろう。 $x^T \in S_5 \cup S_6$  で、上述したケース以外のすべての場合についても、本質的に同様の分析ができるであろう。

(16) どの時点で  $\lambda_{11}$  が非ゼロとなるかは、実際は、初期条件によって一意的に決定される。



< 第4図 >

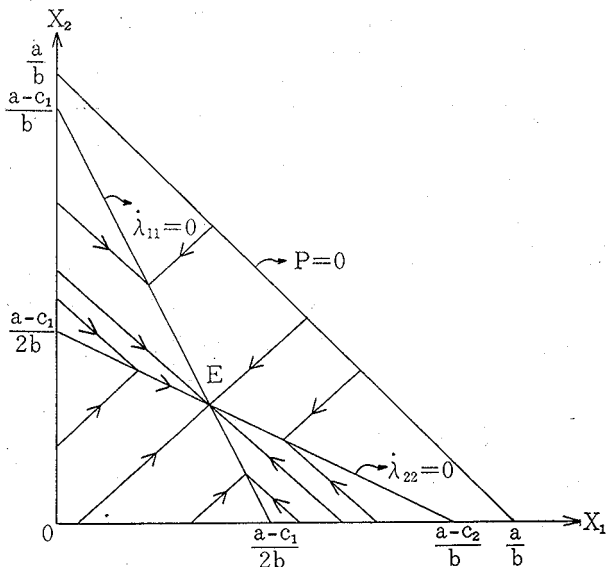
ステップ3  $x^T \in S_7$  のケース

このケースは、 $x^T = [x_1(T), x_2(T)]$  が  $\lambda_{11} = 0$  曲線と  $\lambda_{22} = 0$  曲線の交点にある場合である。このとき、 $\varepsilon$ -近傍において、以下の九つのケースが考えられる。

- (イ)  $\lambda_{11}(t) > 0, \lambda_{22}(t) > 0$
- (ロ)  $\lambda_{11}(t) > 0, \lambda_{22}(t) < 0$
- (ハ)  $\lambda_{11}(t) > 0, \lambda_{22}(t) = 0$
- (ニ)  $\lambda_{11}(t) < 0, \lambda_{22}(t) > 0$
- (ホ)  $\lambda_{11}(t) < 0, \lambda_{22}(t) < 0$
- (ヘ)  $\lambda_{11}(t) < 0, \lambda_{22}(t) = 0$
- (ト)  $\lambda_{11}(t) = 0, \lambda_{22}(t) > 0$
- (チ)  $\lambda_{11}(t) = 0, \lambda_{22}(t) < 0$
- (リ)  $\lambda_{11}(t) = 0, \lambda_{22}(t) = 0$

以上のケースについて、ステップ1およびステップ2の場合と本質的に同様の分析を行なうことができる。(詳細は省略)。得られる最適径路を図示すれば、典型的には、第5図のように示すことができよう。ただし、(リ)のケースの場合、 $\lambda_{11}(t)=\lambda_{22}(t)=0$  を満足するような $\varepsilon$ -近傍が存在する可能性もあるが、その場合には、最適径路は $\varepsilon$ -近傍内でE点に静止することを意味する。

かくして、我々は、ステップ1からステップ3までの分析を総合することによって、任意の初期点から出発して、与えられた時刻  $T$  までに、両企業の利潤関数を Nash 均衡の意味において最大にするようなユニークな最適解(径路)のすべての集合を求めることができたといえるであろう。

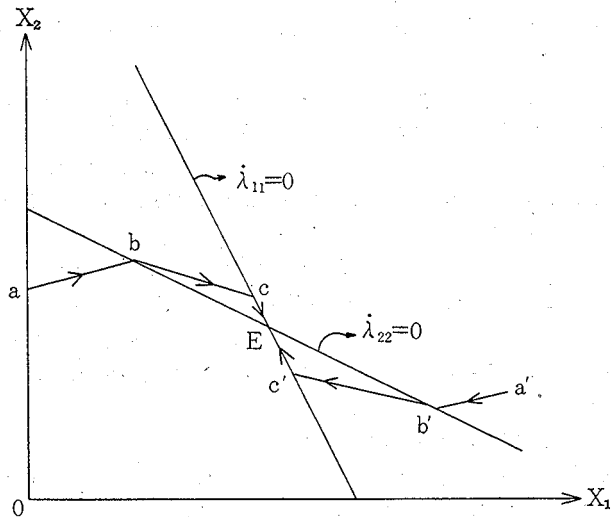


< 第5図 >

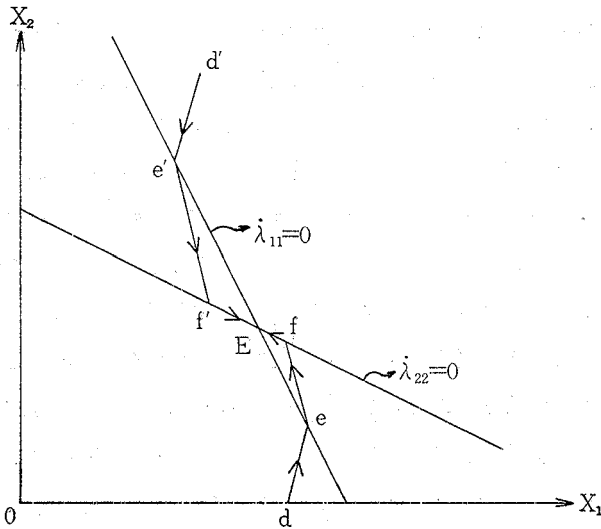
V 最適径路の特徴 (その2. 条件  $\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leq 2$  が満たされない場合)

第4節の分析において我々は、 $\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leq 2$  という仮定をおいた。これは両企

業の産出量調整能力に一定以上の差がないことを意味している。この仮定のもとでは、 $S_2$ と $S_3$ の領域における最適経路の勾配は、 $\lambda_{11}=0$ 曲線および $\lambda_{22}=0$ 曲線の勾配の中間の値をとることになる。このような場合、第4節での分析によって明らかなように、 $S_2$ あるいは $S_3$ の領域からいったん $\lambda_{11}=0$ 曲線あるいは $\lambda_{22}=0$ 曲線に到達した場合、その後は、 $\lambda_{11}=0$ 曲線か $\lambda_{22}=0$ 曲線上に沿ってE点に向かう経路が、技術的にfeasibleであると同時にNash均衡条件をも満足する。ところが、例えば $0 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{1}{2}$ の場合、 $\lambda_{22}=0$ 曲線上をE点に向かって進むことは第2企業にとって技術的に不可能となる。一方、 $2 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ の場合、 $\lambda_{11}=0$ 曲線上をE点に向かって進むことが第1企業にとって技術的に不可能になってしまうのである。 $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{1}{2}$ の場合については、第6図に示されているように、経路a b E (あるいはa'b'E)は、実行不可能であり、最適経路はこの場合、abcE (あるいはa'b'c'E)となる。 $2 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ の場合については、第7図に示されているように、経路deE (あるいはd'e'E)は実行不可能であり、最適経路はこの場合、defE (あるいはd'e'f'E)となる。



< 第6図 >



< 第7図 >

参 考 文 献

- [1] Гавридов, В. М. (1969). 坂本実訳『競争の場の最適過程』東京図書株式会社 (1971)
- [2] Clemhout, S., Leitmann, G. and Wan, H. Y. "A Differential Game Model of Duopoly", *Econometrica*, Vol.39, No. 6 (1971) 911—938.
- [3] Ho, Y. C. "Survey Paper: Differential Games, Dynamic Optimization, and Generalized Control Theory", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 6, No. 3 (1970) 179—209.
- [4] Intriligator, M. D. *Mathematical Optimization And Economic Theory*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1971)
- [5] Levitan, R. & Shubik, M. "Price Variation Duopoly with Differentiated Products and Random Demand", *Journal of Economic Theory*, 3, (1971) 23—39.
- [6] 奥口孝二『寡占の理論』創文社 (1971)
- [7] Okuguchi, K. *Expectations and Stability in Oligopoly Models*. Springer-Verlag Berlin. Heidelberg. New York. (1977)
- [8] Osborne, D. K. "The Duopoly Game: Output Variations", *American Eco-*



- conomic Review, 61 (1971) 538-560.
- [9] Osborne, D. K. "A Duopoly Price Game", *Economica*, May, (1974) 157-175.
- [10] Shapley, L. & Shubik, M. "Price Strategy Oligopoly With Product Variation", *Kyklos*, Vol.22, (1969) 30-44.
- [11] Starr, A. W. & Ho, Y. C. "Nonzero-Sum Differential Games", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 3, No. 3 (1969) 184-206.
- [12] Starr, A. W. & Ho, Y. C. "Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 3, No. 4 (1969) 207-219.
- [13] Takeuchi, N. "On the Firm's Policy under Duopoly", *The Economic Studies Quarterly*, Vol. XXVII, No. 2 (1976) 81-95.
- [14] Theocharis, R.D. "On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem", *Review of Economic Studies*, Vol. 27 (1960) 133-134.