企業の研究・開発モデルにおける比較動学分析

阿　部　文　雄

I　はじめに

Kamien & Schwartz は，近年の一連の論文において，不確実性下における企業の最適研究・開発（R & D）政策，とりわけその動学的特性についての興味深い研究を行ってきた。しかしながら，彼等のモデルにはいずれも少なからず各種パラメータが含まれているが，そういったパラメータの変化が最適R & D政策の時間径路に対してどのような変更をもたらすのかという，いわゆる「比較動学分析」はほとんど試みられていない。

そこで小論文において我々はKamien & Schwartz モデル〔7〕を取り上げ，多少の修正を施こした上で比較動学分析を試みることにする。比較動学分析(comparative dynamics) は，経済分析においては Oniki(〔9〕,〔10〕) による画期的な成果に端を発せられたが，板垣〔3－5〕等数少ない例外を除いて未だに十分応用されていない現状にあるといえよう。また，この比較動学分析は最適径路の特徴についての付加的情報を与えるものであり，かかる意味において小論文は，Kamien & Schwartz 論文〔7〕の最後につけ加えられるべき一節と位置付けられよう。

以下小論文の構成は次のようになっている。II節ではモデル設定がなされ，III節では最適R & D政策の導出とその特徴が述べられ，IV節においてその比較動学分析が展開されている。

II　モデルの設定

まず以下の分析に用いられる重要な変数及びパラメータをリストアップして

おく。

$m(t)$：時刻 t におけるR＆D支出（貨幣額で表示される）

$z(t)$：時刻 t までに当該プロジェクトに蓄積された累積的有効R＆D努力（貨幣額で表示される）

$F(t)$：ライバルが時刻 t までに当該プロジェクトを完成させる確率

$\phi[z(t)]$：累積的有効R＆D努力が z となる時刻までに当該プロジェクトが完成する確率

ρ　：主観的時間割引率

T　：計画期間

R　：当該プロジェクトの完成によって得られる総利益（一定値）

h　：ライバル企業の完成率（以下の＜仮定1＞で定義）

次に以下の仮定がおかれる。

＜仮定1＞市場的不確実性

今 v を，ライバル企業の完成時刻とし，かつ次のような確率分布関数 $F(t)$ をもつ確率変数であるとする。

$$P_r\{v \leq t\} = F(t) = 1 - e^{-ht},\ h > 0 \tag{1}$$

＜仮定2＞

関数 $\phi[z(t)]$ は，以下の性質をもつ2回連続微分可能な関数であると仮定する。

$$\phi(0) = 0,\ \phi'(0) = 0,\ \phi'(z) \geq 0 \tag{2}$$

更に，$k(z) \equiv \phi'(z)/[1-\phi(z)]$ とするとき，

$$k'(z) \geq 0,\ \text{for all } z \geqq 0 \tag{3}$$

を仮定する。

＜仮定3＞累積的有効R＆D努力の蓄積方程式

累積的有効R＆D努力の蓄積方程式は次のように示される。

$$\dot{z}(t) = g[m(t)],\quad z(0) = 0 \tag{4}$$

ここで関数 $g(m)$ は，次のような性質をもつ，有界で，厳密に凹の単調増加関

数である。

$$g(0)=0,\ g'(0)<\infty,\ g'(m)>0,\ g''(m)<0 \qquad (5)$$

＜仮定４＞革新からの予想収益

当該プロジェクトを先に完成させた企業が全市場を制圧する（winner takes all）ものと仮定する。従って先にプロジェクトを完成させた場合にのみ，Rの収益を得るものと仮定され，かつこのRは完成時刻から独立であるとされる。

以上の仮定の下で，企業は所与の計画期間Tに対して予想収益を最大化するように，各時点のＲ＆Ｄ支出$m(t)$を決定するものとする。このとき企業によって解かれるべき問題は以下の如く確定的有限計画問題として定式化される。

＜問題＞

$$Max\ M=\int_0^T e^{-(\rho+h)t}[R\phi'(z)g(m)-m(t)(1-\phi(z))]dt \qquad (6)$$

subject to

$$\dot{z}(t)=g[m(t)],\ z(0)=0 \qquad (4)$$

(1)～(3)，(5)

III 最適Ｒ＆Ｄ政策の導出と特徴

前節で述べた問題に最適解$m(t)$が存在すれば，それが満たすべき必要条件は最大原理により次のように示される。ハミルトニアンを，

$$H=e^{-\rho t}\{e^{-ht}[R\phi'(z)g(m)-m(t)(1-\phi(z))]+\lambda(t)g(m)\} \qquad (7)$$

とおくとき，

$$\text{(i)}\quad \frac{d}{dt}[\lambda(t)e^{-\rho t}]=-\frac{\partial H}{\partial z} \qquad (8)$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\partial H}{\partial m}\leqq 0,\quad m\frac{\partial H}{\partial m}=0,\quad m\geqq 0 \qquad (9)$$

$$\text{(iii)}\quad \lambda(T)=0 \qquad (10)$$

を満足する連続関数$\lambda(t)$が存在すること。

(8)式は整理すると次のように示される。

$$\dot{\lambda}(t)=\rho\lambda(t)-e^{-ht}[R\phi''(z)g(m)+m(t)\phi'(z)] \tag{11}$$

更に，条件 (ii) は次のように計算される。

$$\frac{\partial H}{\partial m}=e^{-\rho t}\{e^{-ht}[R\phi'(z)g'(m)-(1-\phi(z))]+\lambda(t)g'(m)\} \tag{12}$$

そこで今内点解 $(m(t)>0)$ のケースを取り扱うとすると，(12) 式より

$$g'(m)[R\phi'(z)+e^{-ht}\lambda(t)]=1-\phi(z) \tag{13}$$

が成立しなければならない。

さてここで以下での分析上の便宜のために次のような新しい変数を定義する。

$$\Omega(t)\equiv\frac{R\phi'(z)+exp(ht)\lambda(t)}{1-\phi(z)} \tag{14}$$

このとき，$\Omega(t)$ に関する微分方程式が次のように示される。

$$\dot{\Omega}(t)=[\rho+h+k(z)g(m)]\Omega(t)-k(z)[(\rho+h)R+m(t)] \tag{15}$$

〔1〕 初期時点における最適R＆D政策

$t=0$ において，$z(0)=\phi'(0)=0$ であるから

$$\left.\frac{\partial H(0)}{\partial m}\right|_{m=0}=-1+\lambda(0)g'(0) \tag{16}$$

であり，それゆえ最適性規準は，

$$\left.\begin{array}{lll}-1+\lambda(0)g'(0)\leqq 0 & \text{ならば} & m(0)=0\\ -1+\lambda(0)g'(0)>0 & \text{ならば} & m(0)>0\end{array}\right\} \tag{17}$$

であることが分る。以下での分析を比較動学にもっぱら専念するため，我々はここで，$\lambda(0)>1/g'(0)$，すなわち初期時刻からR＆D支出を実行するようなプロジェクトの分析に限定して分析を進めることにする。

〔2〕 R＆D開始時刻以後の最適政策（内点解のケース）

ここでは最適R＆D政策 $m(t)$ が時間の経過とともにどのように変化するのか調べてみよう。必要条件 (ii) より内点解が成立する時，(13) 式が成立するが，これを (14) 式で定義された $\Omega(t)$ を使って示すと，

$$1-g'(m)\Omega(t)=0 \tag{18}$$

となる。そこで $m(t)$ の時間に関する変化をみるために (18) 式の両辺を時間 t

で微分すると次式を得る。

$$-\frac{g''}{(g')^2}\dot{m}(t)=k(z)\left[\frac{g(m)}{g'(m)}-m(t)-(\rho+h)R\right]+\frac{\rho+h}{g'(m)} \qquad (19)$$

そして，Kamien & Schwartz〔7〕で証明されているように，(19) 式の右辺は $m(t)>0$ である期間中正であり，従って最適 R & D 支出は時間の経過とともに増大していくということが分る。

IV　比較動学分析

この節の目的は，前節までに導出・検討した企業の最適R&D政策の時間径路が，種々のパラメータ (ρ, h, R, T) の変化によってどのような影響を受けるか，という問題を考察することである。

〔1〕 革新利益 R が最適R&D政策に及ぼす効果

まず，ライバルに先んじてプロジェクトを完成させたときに得られると予想される革新利益 R の変化が，最適R&D政策の時間径路にどのような変化をもたらすかを検討してみよう。今最適性規準 (18) 式の両辺をパラメータ R で微分すると次式を得る。

$$m_R(t)=-\frac{[g'(m)]^2}{g''(m)}\Omega_R(t) \qquad (20)$$

従って計画期間中の任意のt時点における $m_R(t)$ の符号は，$\Omega_R(t)$ のそれと同じである。そこで動学体系 (4)，(15) 式をそれぞれ R で微分し上の (20) 式を使って整理すると次式を得る。

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_R(t)\\ \dot{\Omega}_R(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{[g'(m)]^3}{g''(m)}\\ k'(z)\left\{\dfrac{g(m)}{g'(m)}-[(\rho+h)R+m(t)]\right\} & \rho+h+k(z)g(m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_R(t)\\ \Omega_R(t)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0\\ -(\rho+h)k(z)\end{pmatrix} \qquad (21)$$

ここで前節で得た最適 R & D 政策の特徴から (21) 式の同次項の係数行列および非同次項の符号は次の通りである。

$$\begin{bmatrix} 0 & + \\ + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix} \tag{22}$$

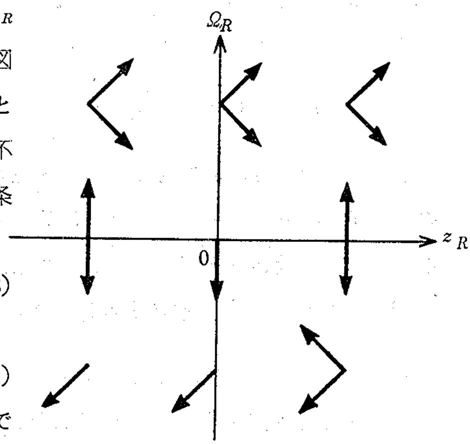
そこで，$(z_R,\ \Omega_R)$ー平面上での解 $[z_R(t),\ \Omega_R(t)]$ の可能な変化の方向を図示すれば，第1図の如く示される。ところで R が変化するとき，$z(0)$ は不変であるので次式が成立する（初期条件)。

$$z_R(0)=0 \tag{23}$$

また，横断条件 $\lambda(T)=0$ より

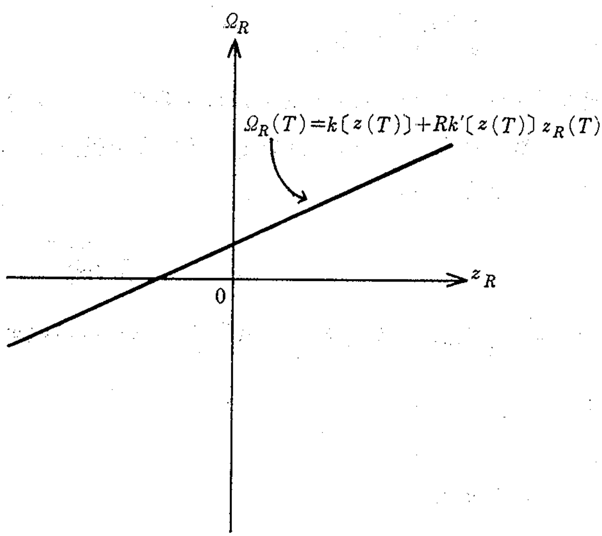
$$\Omega(T)=Rk[z(T)] \tag{24}$$

を得るが，この (24) 式の両辺を R で微分すると境界条件，



<第 1 図>

$$\Omega_R(T)=k[z(T)]+Rk'[z(T)]z_R(T) \tag{25}$$



<第 2 図>

が得られる（第２図参照)。

(23)，(25) 式の意味するところは次の通りである。まず，(23) 式は (z_R, Ω_R) ー平面上において解〔$z_R(t)$，$\Omega_R(t)$〕の時間径路が示す軌道は，垂直軸上の点から出発しなければならないことを意味している。また (25) 式は，それが直線 $\Omega_R(T)=k[z(T)]+Rk'[z(T)]z_R(T)$ 上の点へ到達しなければならないことを意味する。

そこで以下可能な２つの初期条件，$\Omega_R(0)>0$，$\Omega_R(0)<0$ に対して，R の変化が最適Ｒ＆Ｄ政策の時間径路にどのような影響を及ぼすかを検討する。(1)

〔１－１〕 $\Omega_R(0)>0$ のケース

この場合，(22)，(23) 式及び第１図から明らかなように，基本的に次の３つの可能なパターンが存在する。

（イ） (z_R, Ω_R) ー平面上の垂直軸上の上半分から出発して，計画期間中第１象限内に止まり第１象限内の終端多様体に到達するケース。

（ロ） 出発点と到達点は基本的に（イ）のケースと同じであるが，途中第４象限を少なくとも１回通過するケース。

（ハ） (z_R, Ω_R) ー平面上の垂直軸上の上半分から出発し，途中第４象限内を通過した後，第３象限内の終端多様体に到達するケース。

以上のことを整理すれば次のような３つの可能な変化パターンが存在することになる。

（イ） $\Omega_R(t)>0$，$m_R(t)>0$　for all $t\in[0, T]$　(26)

（ロ） $\Omega_R(0)>0$，$m_R(0)>0$

$$\left.\begin{array}{lll}\Omega_R(t)>0, & m_R(t)>0 & \text{for an initial period}\\ \Omega_R(t)<0, & m_R(t)<0 & \text{for an intermediate period}\\ \Omega_R(t)>0, & m_R(t)>0 & \text{for a final period}\end{array}\right\}\qquad(27)$$

(1) ただし，$\Omega_R(0)=0$ の場合は次のような唯一の可能な変化パターンが存在する。
$\Omega_R(0)=0$，$m_R(0)=0$
$\Omega_R(t)<0$，$m_R(t)<0$ for all $t\in[0,T]$

$$
\left.\begin{array}{lll}
\text{（ハ）}\ \Omega_R(0)>0, & m_R(0)>0 & \\
\Omega_R(t)>0, & m_R(t)>0 & \text{for small } t \\
\Omega_R(t)<0, & m_R(t)<0 & \text{for large } t
\end{array}\right\} \quad (28)
$$

〔1—2〕 $\Omega_R(0)<0$ のケース

この場合，(23)，(24) 式及び第1図から明らかなように，次の唯一の可能な変化パターンが存在する。

$$
\left.\begin{array}{l}
\Omega_R(t)<0 \\
m_R(t)<0
\end{array}\right\} \text{for all } t \in [0, T] \quad (29)
$$

以上のように，我々の分析フレームワークの下では，革新収益を表わすパラメータ R の変化が最適R＆D政策の時間径路に及ぼす影響は必ずしも確定的に得られないけれども，少くとも，変化パターンの基本形が初期条件に帰着されるということは意味のある命題であると主張できるように思われる。

〔2〕 計画期間 T が最適R＆D政策に及ぼす効果

Kamien & Schwartz モデル〔7〕では，計画期間 T は所与とされている。そこでこのパラメータ T が変化したとき，最適R＆D政策の時間径路がどのように変化するかを検討してみよう。

まず，(20) 式に相当する式は次のように示される。

$$
m_T(t) = -\frac{[g'(m)]^2}{g''(m)}\Omega_T(t) \quad (30)
$$

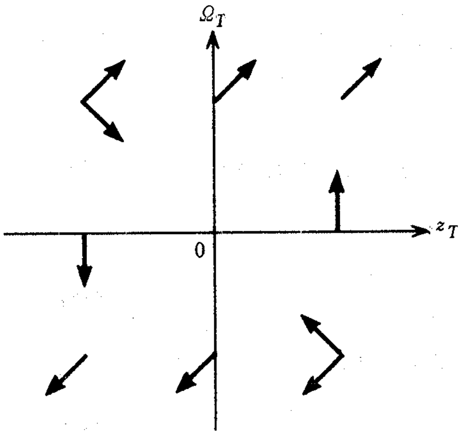
更に (21) 式に相当し，解 $[z_T(t), \Omega_T(t)]$ を決定する微分方程式体系は次の如く示される。

$$
\begin{pmatrix} \dot{z}_T(t) \\ \dot{\Omega}_T(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{[g'(m)]^3}{g''(m)} \\ k'(z)\left\{\dfrac{g(m)}{g'(m)} - [(\rho+h)R+m(t)]\right\} & \rho+h+k(z)g(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_T(t) \\ \Omega_T(t) \end{pmatrix} \quad (31)
$$

ここで (31) 式右辺の係数行列の符号は R のケースと全く同じである。 また，初期条件および堺界条件は次の如く示される。

$$
z_T(0) = 0 \quad (32)
$$

$$\Omega_T(T)=Rk'[z(T)]z_T(T) \tag{33}$$



<第 3 図>

さて，(31)式によって $(z_T,\ \Omega_T)$－平面上での解 $[z_T(t),\ \Omega_T(t)]$ の可能な変化の方向を図示すれば，第3図の如く示される。そこで，(32)，(33) 式および第3図を用いて，パラメータ R の場合と同様の分析を行うことによって次のような結果が得られる。

〔2－1〕 $\Omega_T(0)>0$ のケース

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_T(t)>0\\ m_T(t)>0\end{array}\right\}\text{ for all } t\in[0,\ T] \tag{34}$$

〔2－2〕 $\Omega_T(0)=0$ のケース

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_T(t)=0\\ m_T(t)=0\end{array}\right\}\text{ for all } t\in[0,\ T] \tag{35}$$

〔2－3〕 $\Omega_T(0)<0$ のケース

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_T(t)<0\\ m_T(t)<0\end{array}\right\}\text{ for all } t\in[0,\ T] \tag{36}$$

〔3〕 h が最適R＆D政策に及ぼす効果

この場合の解 $[z_h(t),\ \Omega_h(t)]$ を決定する微分方程式体系は次の通りである。

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_h(t)\\ \dot{\Omega}_h(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{[g'(m)]^3}{g''(m)}\\ k'(z)\left\{\dfrac{g(m)}{g'(m)}-[(\rho+h)R+m(t)]\right. & \rho+h+k(z)g(m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_h(t)\\ \Omega_h(t)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{g'(m)}-k(z)R\end{pmatrix} \tag{37}$$

ここで，(37) 式右辺の非同次項の符号は未知であるが，

$$\frac{1}{g'[m(0)]}-k[z(0)]R=\frac{1}{g'[m(0)]}>0 \tag{38}$$

および，$t=T$ 時点における最適性規準

$$\frac{\partial H(T)}{\partial m}=e^{-cT}\{e^{-hT}[R\phi'(z)g'(m)-(1-\phi(z))]\}=0 \tag{39}$$

より，

$$\frac{1}{g'[m(T)]}=Rk[z(T)] \tag{40}$$

であることを考慮に入れて次のことを仮定する。

$$\frac{1}{g'(m)}-k(z)R>0 \qquad \text{for all } t\in[0,\ T) \tag{41}$$

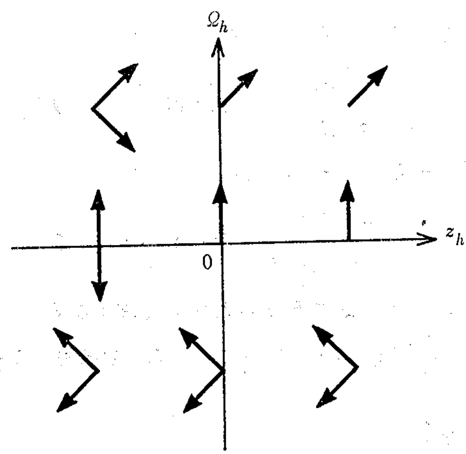
従って，このとき (37) 式右辺の同次項の係数行列および非同次項の符号は次の通りである。

$$\begin{bmatrix} 0 & + \\ + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix} \tag{42}$$

そこで (z_h,Ω_h) ー平面上での解 $[z_h(t),\ \Omega_h(t)]$ の可能な変化の方向は第4図の如く示される。またこのとき，初期条件および境界条件として次式が成立する。

$$z_h(0)=0 \tag{43}$$

$$\Omega_h(T)=Rk'[z(T)]z_h(T) \tag{44}$$



<第 4 図>

そこで，第4図および (43)，(44) 式を用いてこれまでと同様の分析を行うことにより次のような結果を得る。

〔3—1〕 $\Omega_h(0)\geqq 0$ のケース

この場合，次のような唯一の可能な変化パターンが存在する。

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_h(t)>0\\ m_h(t)>0\end{array}\right\}\quad \text{for all } t\in[0,\ T] \tag{45}$$

〔3—2〕 $\Omega_h(0)<0$ のケース

この場合，基本的に次の3つの可能な変化パターンが存在する。

(イ) $\Omega_h(t)<0,\quad m_h(t)<0\quad$ for all $t\in[0,\ T]$ (46)

(ロ) $\Omega_h(0)<0,\quad m_h(0)<0$

$$\left.\begin{array}{lll}\Omega_h(t)<0, & m_h(t)<0 & \text{for an initial period}\\ \Omega_h(t)>0, & m_h(t)>0 & \text{for an intermediate period}\\ \Omega_h(t)<0, & m_h(t)<0 & \text{for a final period}\end{array}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{array}{lll}(\text{ハ})\ \Omega_h(0)<0, & m_h(0)<0 & \\ \Omega_h(t)<0, & m_h(t)<0 & \text{for small } t\\ \Omega_h(t)>0, & m_h(t)>0 & \text{for large } t\end{array}\right\} \tag{48}$$

〔4〕 時間割引率 ρ が最適R＆D政策に及ぼす効果

企業の主観的時間割引率の最適R＆D政策の時間径路に対して及ぼす影響の仕方は，(15) 式を見ても予想される通り，実は当該企業が市場的不確実性に直面して予想するパラメータ h と全く同じ効果をもつことが明らかである。従って，我々は上の〔3〕のケースにおける (46)，(47)，(48) 式において，h を ρ に置き換えた命題をもつことになる。

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J. & M. Kurz, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, The Johns Hopkins Press, 1970.

〔2〕 Halkin, H., "Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizon", *Econometrica*, Vol. 42, No. 2, 1974, pp. 267-272.

〔3〕 板垣有記輔「個人の消費・貯蓄・資産保有および労働供給に及ぼす財産税の効果について——比較動学分析——」『創価経済論集』Vol. 5, No. 2, 1975, pq. 63-101.

〔4〕 板垣有記輔「個人の消費・貯蓄・資産保有および労働供給に及ぼす所得税の効果について——比較動学分析——」『創価経済論集』Vol. 5, No. 3・4,（創立5周年記念論文集）1976, pp. 30-38.

〔5〕 Itagaki, Y., "The Effects of Expenditure Tax on Individual Consumption, Savings, Assets Holdings and Labor Supply——A Comparative Dynamic Analysis in the Context of a Life-Cycle Model," *Soka-Keizaironshu*, Vol. 6, No. 3, 1976, pp. 121-132.

〔6〕 Kamien, M. I. & N. L. Schwartz, "Expenditure Patterns for Risky R and D Projects," *Journal of Applied probability*, Vol. 8, (March) 1971, pp. 60-73.

〔7〕 ————————, "Risky R & D with Rivalry," *Annals of Economic and Social Measurement*, Vol. 3, No. 1, 1974, pp. 267-277.

〔8〕 Lucas, R. E. Jr., "Optimal Management of a Research and Development Project," *Management Science*, Vol. 17, No. 11, July, 1971, pp. 679-697.

〔9〕 Oniki, H., "Comparative Dynamics in the Theory of Optimal Growth," *Keizaigaku (Tohoku Economic Journal)*, Vol. 30, 1969, pp. 48-57.

〔10〕 Oniki, H., "Comparative Dynamics (Sensitivity Analysis) in Optimal Control Theory," *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, ,No. 3, 1973, pp. 265-283.