

## 研究ノート

## トレンドのあてはめについて

大藪 和 雄  
赤 澤 昌 二

トレンドと循環変動とからなる経済時系列に、最小自乗法を用いてトレンドをあてはめる場合、どのような結果が得られるかをみてみよう。

以下では、時系列データの加法モデルと乗法モデルを仮定し、仮想的なデータを作成し、そのデータの各種の部分区間について、最小自乗法を用いてトレンドをあてはめた結果について考察する。

データは四半期データと考え、循環変動の周期は3年とする。

加法モデルはつぎのように仮定する。

$$\begin{aligned} T &= 505 + 4.7t \\ C &= 45 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-1)\right) \\ O &= T + C \end{aligned} \quad \text{.....(1)}$$

乗法モデルとしては、つぎの式を採用する。

$$\begin{aligned} T &= 505 + 4.7t \\ C &= 1 + 0.0757 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-1)\right) \\ O &= T \cdot C \end{aligned} \quad \text{.....(2)}$$

時間  $t$  は 1 から 61 までの値をとるものとし、(1)、(2)式で計算した結果を四捨五入し、整数値のみをとることとする。(表 1 および図 1)

以上のように、(1)式または(2)式で計算した場合、データは波を打つが、その位置をあらわす用語として、山、谷、密、疎を用いることとする。(山、谷などは、景気指数との関連で用いられており、疎は、回復点とよばれている。ここでは、縦波を图示す

表1 はじめのデータ (仮想例)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加法モデル	555	553	542	524	506	494	493	504	525	552
乗法モデル	548	548	539	524	508	498	497	507	527	552
位 置	山			密			谷			疎
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
加法モデル	579	600	611	610	598	580	562	551	549	560
乗法モデル	578	598	609	608	597	580	563	551	549	560
位 置			山			密			谷	
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
加法モデル	581	608	636	657	667*	666	654	637	619	607
乗法モデル	581	608	636	658	670	668	656	637	617	604
位 置		疎			山			密		
t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
加法モデル	606	616	638	665	692	713	724	723	711	693
乗法モデル	601	612	635	665	695	718	730	728	714	693
位 置	谷			疎			山			密
t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
加法モデル	675	663	662	673	694	721	748	770	780	779
乗法モデル	671	656	654	665	689	721	753	778	791	789
位 置			谷			疎			山	
t	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
加法モデル	767	749	732	720	719	729	750	778	805	826
乗法モデル	773	749	726	709	706	718	744	778	812	839
位 置		密			谷			疎		
t	61									
加法モデル	837									
乗法モデル	852									
位 置	山									

注) \* 668 が正しいが、667 で計算してしまった。

図1 はじめのデータのグラフ (加法モデル)

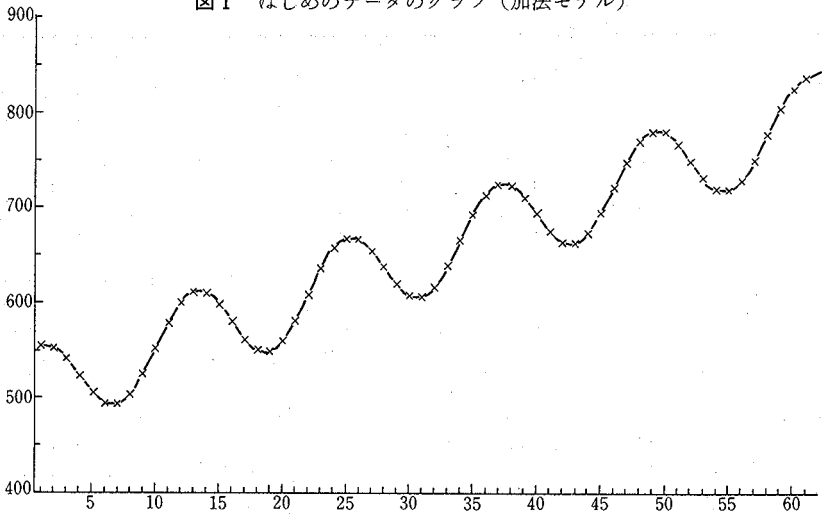
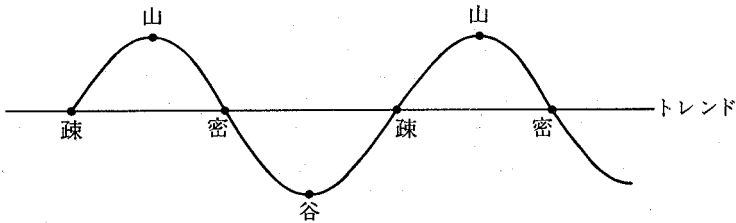


図2 波形の変化



る場合あらわれる疎・密部をもとに便宜的に疎、密という用語を用いることにする。) それぞれの位置は、図2のとおりである。

さて、表1のデータを用いて、トレンドを求めるわけであるが、各種の部分区間のデータを用いて、最小自乗法により直線をあてはめる。その結果が、表2、表3に与えられている。例えば、表2の最初の行の左の部分は、密一密 (25, 4-28, 480.3, 6.2438) であるが、最初の数字は、データの個数であり、そのデータは、時点4という密の位置にあるデータから、時点28という密の位置にあるデータまでの計25個のデータを用いて  $y = a + bt$  という回帰直線を最小自乗法によって求めると、 $a =$

表2 加法モデルのデータから得られた回帰直線

データ数	種類	定数項	回帰係数	種類	定数項	回帰係数	平均	
							定数項	回帰係数
25	密-密 4-28	480.3	6.2438	疎-疎 10-34	538.8	3.1600	509.5	4.7019
37	4-40	489.2	5.4199	10-46	524.9	3.9867	507.1	4.7033
49	4-52	493.5	5.1095	10-58	518.9	4.2912	506.2	4.7004
22	谷-密 7-28	482.5	6.1446	山-疎 1-22	519.1	3.2315	500.8	4.6880
34	7-40	492.9	5.2921	1-34	513.5	4.1111	503.2	4.7016
46	7-52	497.0	5.0142	1-46	511.1	4.3828	504.1	4.6985
58	—	—	—	1-58	509.8	4.5028	—	—
22	密-山 4-25	481.2	6.1429	疎-谷 10-31	537.3	3.2580	509.3	4.7005
34	4-37	491.1	5.2889	10-43	522.3	4.1160	506.7	4.7024
46	4-49	495.3	5.0155	10-55	516.5	4.3872	505.9	4.7014
58	4-61	497.5	4.8983	—	—	—	—	—
19	谷-山 7-25	484.4	5.9877	山-谷 1-19	518.1	3.3860	501.2	4.6868
31	7-37	496.0	5.1089	1-31	511.6	4.2899	503.8	4.6994
43	7-49	499.6	4.8928	1-43	509.3	4.5054	504.4	4.6991
55	7-61	501.1	4.8134	1-55	508.1	4.5882	504.6	4.7008
16	山-密 1-16	504.5	5.5471	谷-疎 7-22	511.1	3.8132	507.8	4.6801
28	1-28	503.6	5.0547	7-34	508.6	4.3396	506.1	4.6972
40	1-40	503.7	4.8948	7-46	507.4	4.5067	505.6	4.7008
52	1-52	503.9	4.8171	7-58	506.8	4.5811	505.4	4.6991
16	密-谷 4-19	488.6	5.5471	疎-山 10-25	526.6	3.8397	507.6	4.6934
28	4-31	494.8	5.0619	10-37	517.1	4.3454	506.0	4.7036
40	4-43	497.8	4.8933	10-49	513.3	4.5087	505.5	4.7010
52	4-55	499.4	4.8204	10-61	511.2	4.5839	505.3	4.7021
19	疎-密 10-28	513.7	4.7035	密-疎 4-22	496.3	4.6825	505.0	4.6930
31	10-40	510.2	4.7097	4-34	499.5	4.7012	504.9	4.7054
43	10-52	508.9	4.7002	4-46	501.1	4.6999	505.0	4.7001
55	—	—	—	4-58	501.9	4.7004	—	—
13	山-山 1-13	508.7	4.6758	谷-谷 7-19	501.8	4.6758	505.2	4.6758
25	1-25	506.9	4.6900	7-31	503.2	4.7000	505.0	4.6950
37	1-37	506.2	4.6991	7-43	503.8	4.7001	505.0	4.6996
49	1-49	505.9	4.6986	7-55	504.0	4.7011	505.0	4.6998
61	1-61	505.7	4.7006	—	—	—	—	—

表3 乗法モデルのデータから得られた回帰直線

データ数	種類	定数項	回帰係数	種類	定数項	回帰係数	平均	
							定数項	回帰係数
25	密-密 4-28	481.3	6.2177	疎-疎 10-34	539.2	3.1138	510.3	4.6658
37	4-40	489.5	5.4303	10-46	525.9	3.9277	507.7	4.6790
49	4-52	493.3	5.1380	10-58	519.9	4.2427	506.6	4.6903
22	谷-密 7-28	482.7	6.1592	山-疎 1-22	517.8	3.3123	500.2	4.7357
34	7-40	492.5	5.3286	1-34	513.3	4.0946	502.9	4.7116
46	7-52	496.2	5.0609	1-46	511.4	4.3473	503.8	4.7041
58	-	-	-	1-58	510.2	4.4691	-	-
22	密-山 4-25	482.7	6.0774	疎-谷 10-31	536.9	3.2575	509.8	4.6674
34	4-37	491.9	5.2683	10-43	522.3	4.0990	507.1	4.6837
46	4-49	495.8	5.0082	10-55	516.6	4.3724	506.2	4.6903
58	4-61	497.7	4.9021	-	-	-	-	-
19	谷-山 7-25	485.1	5.9632	山-谷 1-19	516.7	3.4930	500.9	4.7281
31	7-37	496.1	5.1133	1-31	511.0	4.3048	503.6	4.7091
43	7-49	499.5	4.9011	1-43	509.1	4.5000	504.3	4.7005
55	7-61	500.8	4.8283	1-55	508.1	4.5800	504.5	4.7041
16	山-密 1-16	502.9	5.6706	谷-疎 7-22	513.2	3.6779	508.1	4.6743
28	1-28	502.2	5.1541	7-34	510.6	4.2310	506.4	4.6925
40	1-40	502.5	4.9618	7-46	509.3	4.4210	505.9	4.6914
52	1-52	502.6	4.8764	7-58	508.4	4.5172	505.5	4.6968
16	密-谷 4-19	491.6	5.3265	疎-山 10-25	523.1	4.0294	507.4	4.6779
28	4-31	496.8	4.9600	10-37	515.2	4.4231	506.0	4.6916
40	4-43	499.3	4.8290	10-49	511.9	4.5538	505.6	4.6914
52	4-55	500.7	4.7772	10-61	509.9	4.6214	505.3	4.6993
19	疎-密 10-28	510.4	4.8772	密-疎 4-22	498.7	4.5298	504.6	4.7035
31	10-40	507.8	4.8113	4-34	501.7	4.5847	504.8	4.6980
43	10-52	506.6	4.7838	4-46	503.1	4.6096	504.8	4.6967
55	-	-	-	4-58	503.7	4.6329	-	-
13	山-山 1-13	506.3	4.9615	谷-谷 7-19	505.1	4.4396	505.7	4.7005
25	1-25	505.5	4.7892	7-31	504.9	4.6115	505.2	4.7004
37	1-37	505.2	4.7492	7-43	505.0	4.6456	505.1	4.6974
49	1-49	505.1	4.7301	7-55	505.0	4.6651	505.1	4.6976
61	1-61	504.9	4.7285	-	-	-	-	-

図3-1 データの種類別データ数と定数項の関係 (加法モデル)

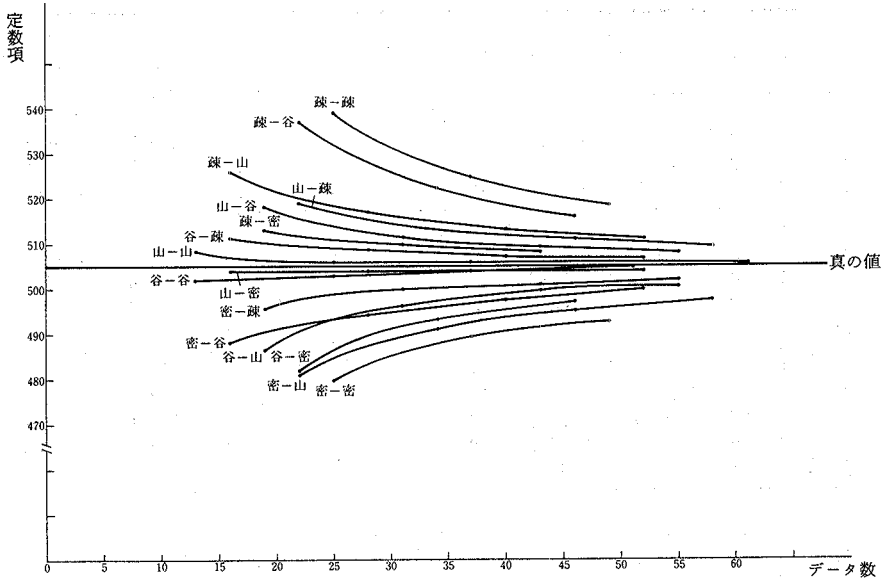


図3-2 データの種類別データ数と回帰係数の関係 (加法モデル)

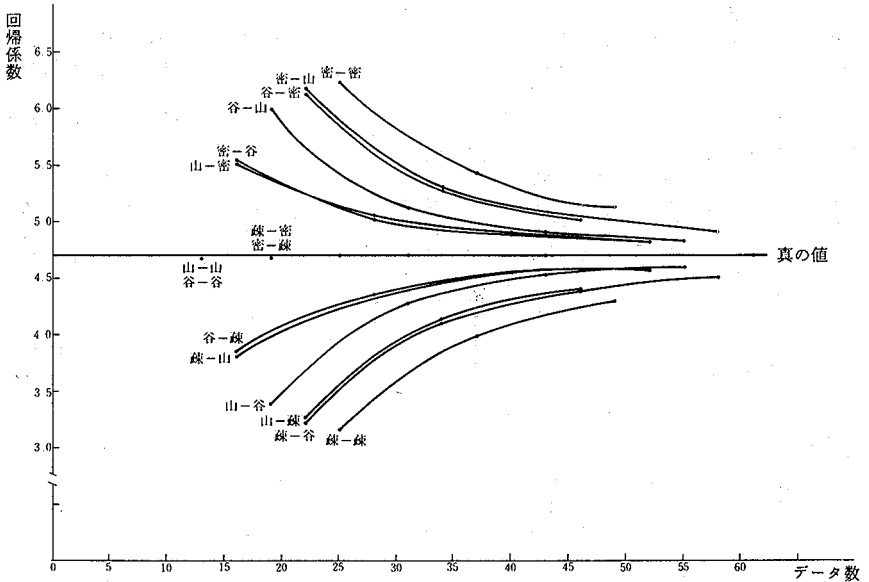


図4-1 データの種類別データ数と定数項の関係(乗法モデル)

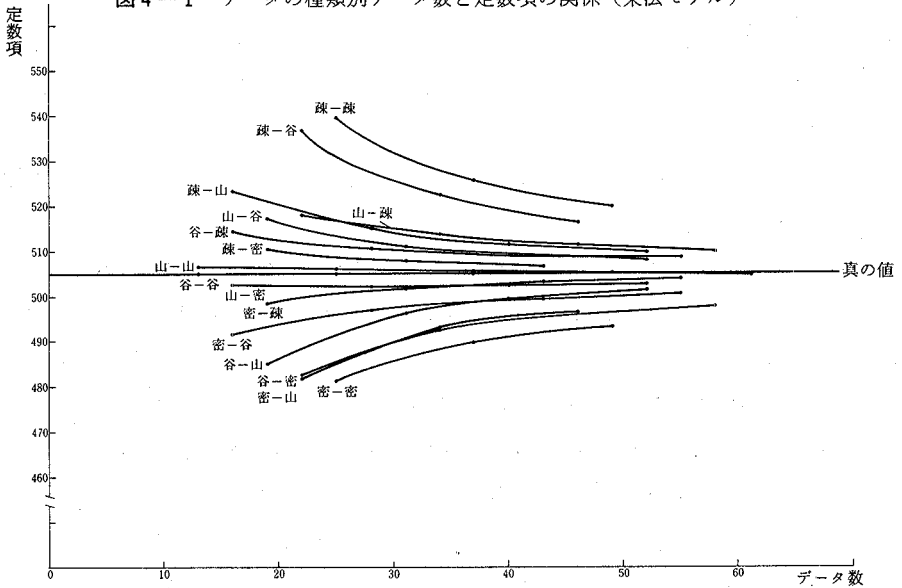
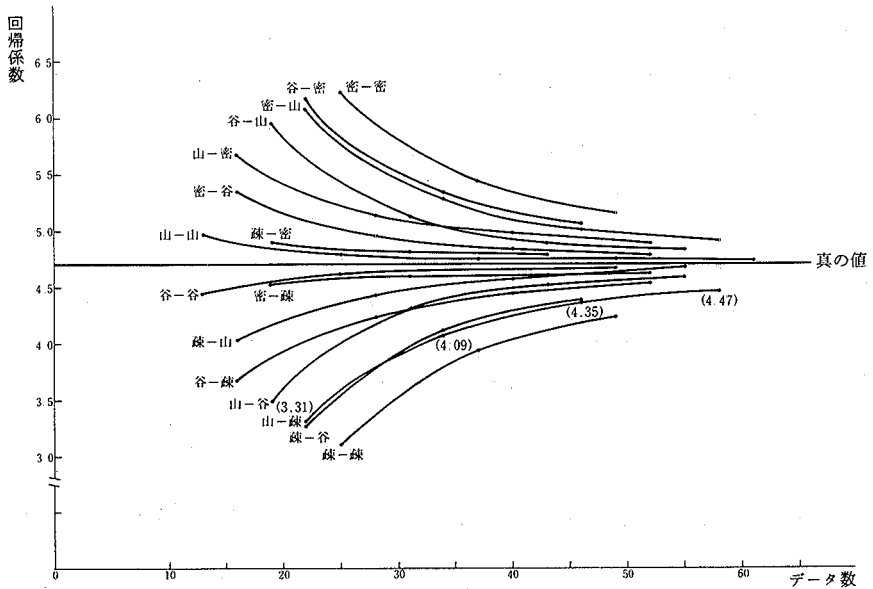


図4-2 データの種類別データ数と回帰係数の関係(乗法モデル)



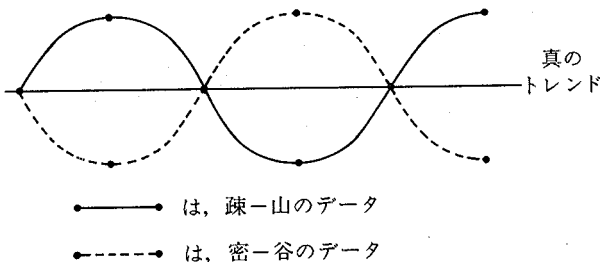
480.3,  $b = 6.2438$  が得られるということを示している。

これらの結果を、横軸にデータ数を取り、縦軸に  $a$  または  $b$  の値をとってグラフにしたものが、図 3-1, 図 3-2, 図 4-1, 図 4-2 である。これらのグラフから気付くことは、

- (1) どの部分区間のデータについても、データの個数が多くなればなるほど真の値に近づくこと。
- (2) 回帰係数が真の値よりも大きめの値をとる場合は定数項が小さめの値をとりがちであること。(これには、例外がある。加法モデルでは、疎-密のデータの回帰係数は真の値に近いのに、定数項は大きめの値をとっていること、密-疎のデータの回帰係数は真の値に近いのに、定数項は小さめの値をとっていること、乗法モデルでは、疎-密のデータの回帰係数、定数項はいずれも大きめになっており、密-疎のデータの回帰係数、定数項はいずれも小さめになっている。)
- (3) 逆の関係にあるデータの組について、一方の回帰係数が大きめになるとき、他方の回帰係数はそれとほぼ同程度だけ小さめになる。また、定数項についても同じことが言える。ここで、逆の関係にあるデータとは、疎-山に対して、密-谷というような関係にあるデータのことである。(図 5 参照)

ただ、これにも例外があり、定数項のグラフについてみると密-密と疎-疎、谷

図 5 逆の関係にあるデータ

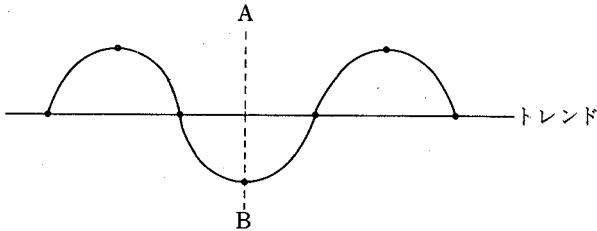


一密と山一疎、密-山と疎-谷などは真の値を示す横線に関して対称になっていない。



- (4) データの個数が比較的少なくても、かなり真の値に近い値を示すのは、山—山、谷—谷、疎—密、密—疎のデータである。加法モデルの定数項については、疎—密、密—疎も比較的良好な結果を示すが、山—密、谷—疎の方がより真の値に近いようである。疎—密、密—疎は、山—山、谷—谷と同様、中央部(直線 AB)に関して対称であり、(図6)回帰係数については真の値に近い値を示し、定数項については、疎—密は大きめになり、密—疎は小さめになる。

図6 中央部に関して対称なデータの例



以上、要するに、限られたシミュレーションからの推論であるが、循環変動を伴うような時系列のデータにトレンドをあてはめる場合、山—山とか、谷—谷とかいうデータの組にトレンドをあてはめるか、回帰係数と定数項の対称性を利用した上で、疎—密、密—疎というデータの組にトレンドをあてはめ、その両者のパラメータの推定値の平均(表2、表3の平均の欄)を用いるならば、かなりよい結果が期待できるものと思われる。なお、問題点として残るのは、如何にして山、谷、密、疎などの位置を見つけるか、循環変動の周期が一定しないことから起こる問題、トレンドが直線でない場合はどうかというようなことがある。