与えられた二点を通る既約代数曲線

藤　田　和　憲

1. xy座標平面上で，相異る二点A＝(a_1,b_1)，B＝(a_2,b_2)をとる。A,Bを通る直線の方程式は，$(b_2-b_1)x-(a_2-a_1)y=a_1b_2-a_2b_1$である。また，線分ABの垂直二等分線上の任意の点を中心として，点A,Bを通る円がある。同じくA，Bを通る双曲線，放物線は無限個ある。更にnを任意の自然数とするとき（但し$n\geq 2$）容易にわかるように，A，Bを通るn次既約代数曲線は無限個ある。既約代数曲線については，参考文献中の「代数曲線論」を，以下使用する環論の用語については，「近代代数学」または「可換環論」を参照されたい。とにかく「点A,Bを通る既約代数曲線は無限個存在する」。これを環論用語を使って言い換えると，「実数体$\mathbf{R}$上の二変数多項式環$\mathbf{R}[X,Y]$の極大イデアル$(X-a_1, Y-b_1)\mathbf{R}[X,Y]$と$(X-a_2, Y-b_2)\mathbf{R}[X,Y]$に共通に含まれる高さ1の素イデアルは無限個存在する」となる。次に3次元座標空間$\mathbf{R}^3$で，相異る二点A＝(a_1,b_1,c_1)，B＝(a_2,b_2,c_2)をとる。点A,Bを通る平面を考えると，A,Bを通る既約空間代数曲線は，無限個存在することがわかる。またW_1，W_2を$\mathbf{R}^3$での既約代数曲線あるいは点とすると，W_1，W_2を含む既約代数曲面は無限個存在する。これらを環論用語で言い換えると「P_1，P_2を実数体$\mathbf{R}$上の三変数多項式環$\mathbf{R}[X,Y,Z]$の素イデアルで，高さが2以上とすると，$P_1\cap P_2$に含まれる$\mathbf{R}[X,Y,Z]$の高さ1の素イデアルは無限個存在する」となる。$\mathbf{R}[X,Y]$は$\mathbf{R}[Y][X]$と同型，$\mathbf{R}[X,Y,Z]$は$\mathbf{R}[Y,Z][X]$と同型である。従ってともにネーター正規整域上の一変数多項式環の形である。ここでは，上の命題の拡張について述べる。得たのは次の定理である。

定理　AをKrull整域，P,QをA上一変数多項式環A$[X]$の高さ2の素イデアルとする。このとき，$P\cap Q$に含まれるA$[X]$の高さ1の素イデアルがある。そして$P\cap A\not\subset Q\cap A$ かつ $Q\cap A\not\subset P\cap A$ならば，$P\cap Q$に含ま

れるA[X]の高さ1の素イデアルは，無限個存在する。

この証明の前に補題を2つ用意する

補題 1. Aを正規整域で，Aの商体Kは代数的閉体とする。このときAの任意の極大イデアルMに対して，A/M は代数的閉体である。

証明 $X^n+\bar{a}_1X^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n$をA/M上の任意のモニック多項式とする。ここに $a_i\in A$，$\bar{a}_i=a_i \bmod M$。Kは，代数的閉体であるから，$X^n+a_1X^{n-1}+\cdots a_n$ はK上で一次因子の積に分解する。つまり，$X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n=(X-\alpha_1)\cdots\cdots(X-\alpha_n)$，$\alpha_i\in K$。各 α_i はA上整であり，仮定よりAは正規であるから，α_i はAの元である。従って，$X^n+\bar{a}_1X^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n$ はA/M上で，一次因子の積に分解する。故にA/Mは，代数的閉体である。

補題 2. Aを整域，a，b を互いに素なAの元とする。つまり，$Aa\cap Ab=Aab$。このとき，$bX-a$ は，A[X]の素元である。

証明 $A[X]/(bX-a)A[X]$ と $A[a/b]$ が同型であることが云えれば十分である。$\varphi: A[X]\longrightarrow A[a/b]$ を $\varphi(X)=a/b$ なるA準同型写像とする。$f(X)$を $\mathrm{Ker}\varphi$ の任意の元とする。$f(X)$ の次数の帰納法により，$f(X)$がイデアル$(bX-a)A[X]$の元であることを示す。$f(X)$ の次数が1のとき，つまり，$f(X)=dX-c$，$c,d\in A$，$d\cdot(a/b)-c=0$ なので，$da=bc$，これより $da\in Aa\cap Ab$，従って仮定より $da\in Aab$ であるから，$d=rb$となるAの元 r が存在する。これを $da=bc$ に代入すると，$rba=bc$となる。よって $c=rb$ がえられる。以上より $c=ra$，$d=rb$であるから，$f(X)=r(bX-a)$。次に$f(X)$の次数が2以上とする。$f(X)=c_nX^n+c_{n-1}X^{n-1}+\cdots\cdots+c_0$とおく。$f(a/b)=0$ より，$c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}b+\cdots+c_0b^n=0$ ゆえに c_na^n は $Aa\cap Ab=Aab$ の元であることがわかる。よって $c_na^n=rab$ をみたすAの元 r がある。これより$c_na^{n-1}=rb$。従ってc_na^{n-1}は Aab の元である。以下，同じ操作をくりかえすことにより $c_na=tb$ となるAの元 t が存在することがわかる。これより $c_n(a/b)-t=0$，つまり c_nX-t が $((bX-a)A[X]$の元であることがわかる。$f(X)$を変形すると，$f(X)=(c_nX-t)x^{n-1}+(t+c_{n-1})X^{n-1}+\cdots\cdots+c_0$ となる。ここで $(t+c_{n-1})X^{n-1}+\cdots+c_0$ に帰納法の仮定を適用すると，これが $(bX-a)A[X]$ の元になるから，結局$f(X)$

が$(bX-a)A[X]$の元になる。以上より，$\mathrm{Ker}\varphi=(bX-a)A[X]$がえられる。故に$A[X]/(dX-a)A[X]\simeq A[a/b]$が成立する。

定理の証明　$p=P\cap A$，$q=Q\cap A$とおく。まず$p\subseteq q$とする。素イデアルpの高さが1ならば，$pA[X]$は，$P\cap Q$に含まれる高さ1の素イデアルである。pの高さが2ならば，$P=Q=pA[X]$となる。pの高さが2であるから，pは互いに素となる元a，bを含む。この二つの元a，bの存在はAが Krull 整域であることから導かれる。補題2より，$(bX-a)A[X]$は$P\cap Q$に含まれる高さ1の素イデアルである。もちろんa，bの取り方は無限通りあるから，$P\cap Q$に含まれる素イデアルは，無限個ある以下$p\not\supseteq q$かつ$q\not\supseteq p$とする。次の三つの場合について考えなければならない。(1)p，qの高さがともに1 (2)pの高さが2でqの高さが1 (3)q，qの高さがともに2。まず(1)の場合，Aを積閉集合$A-p\cup q$で局所化することにより，はじめから(A, p, q)を半局所 Dedekind 整域としてよい。KをAの商体，LをKの代数的閉包とし，BをLの中でのAの整閉包とする。P'，Q'をそれぞれP，Qの上にある$B[X]$の素イデアルとする。さらに$p'=P'\cap B$，$q'=Q'\cap B$とおく，明らかにBの商体はLである。p'はBの極大イデアルだから，補題1よりB/p'は代数的閉体である。従って，$P'=p'B[X]+(X-a)B[X]$となるBの元aが存在する。同様にして，$Q'=q'B[X]+(X-b)B[X]$となるBの元bが存在がわかる。(A, p, q)は，半局所環だから，$A=p+q$。従って任意の自然数nに対して$A=p^n+q^n$が成立する。故に$1=x_n+y_n$となるp^nの元x_n及びq^nの元y_nが存在する。これより，$P_n=(X-a-(b-a)x_n)B[X]=(X-b+(b-a)y_n)B[X]$は，$P'\cap Q'$に含まれる$B[X]$の高さ1の素イデアルになる。よって$P_n\cap A[X]$は$P\cap Q$に含まれる高さ1の素イデアルである。ところで，$x_n$の選び方と，共役元の性質を考え合わせれば$\{P_n\cap A[X]; n\in\mathbf{N}\}$は，無限集合であることがわかる。次に(2)の場合，Aを積集合$A-p\cup q$で局所化することにより，はじめから，(A, p, q)を半局所 Krull 整域としてよい。(1)の場合と同様にして，K, L, P', Q', p', q'を選ぶ。p'の高さは2であるから$P'=p'A[X]$であり，Q'については(1)の場合と同じ理由で，$Q'=q'B'[X]+(X-a)B[X]$

となる。CをA$[a]$の整閉包とすると，K$[a]$は，Kの有限次代数拡大体であるから，CはKrull 整域になる。ここで$P^*=P'\cap C[X]$，$p^*=p'\cap C$，$Q^*=Q'\cap C[X]$，$q^*=q'\cap C$とおくと，容易にわかるように$P^*=p^*C[X]$，$Q^*=q^*C[X]+(X-a)C[X]$となる。bを$p^*\cap q^*$の任意の元とする。但し$b\neq 0$。CはKrull domainであり，p^*の高さが2であることより，b，cが互いに素となるp^*の元cが存在する。固定したbに対してcの選び方は無限通りある。補題2より，$P_0=(c(X-a)-b)C[X]$は，$P^*\cap Q^*$に含まれる高さ1の素イデアルである。従って$P_0\cap A[X]$は，$P\cap Q$に含まれるA$[X]$の高さ1の素イデアルである。b，cの取り方と共役元の性質を考えれば，上の$P_0\cap A[X]$の形の素イデアルは無限個あることがわかる。最後に(3)の場合，p，qの高さが2であることより，互いに素となる$p\cap q$の元a，bが存在する。このa，bの選び方は無限通りある。補題2より$(bX-a)A[X]$は，$P\cap Q$に含まれる高さ1の素イデアルである。この$(bX-a)A[X]$の形の素イデアルが無限個あることは，(1)あいは(2)での理由と同じである。

2. 参考文献中の「素イデアルの存在についての一問題」で，永田氏は，次の性質をもつネター半局所一意分解整域(A, p, q)を構成している。p，qの高さは2であり，p，qに含まれるAの素イデアルは$\{0\}$だけである。

3. Aが一般の正規整域のとき，定理の主張は成立しない。例えば，高さが2の極大イデアルp及び高さが1の極大イデアルqを有する Prüfer 半局所整域Aについて，$pA[X]\cap(pA[X]+XA[X])$に含まれる高さ1の素イデアルは存在しない。Krull 整域と正規整域の中間に完全整閉整域がある。これについて定理の主張が成立するかどうかは，いまのところわからない。完全整閉整域に関して定理の主張の成否には，階数1の付値環と完全整閉整域との関係を調べる必要があると思われる。階数1の付値環が，完全整閉整域になることは全く明らかであるが，その逆，一次元の完全整閉局所整域が，付値環になるかどうかは未解決である。

参考文献

「代数曲線論」　河田敬義著　至文堂

「可換環論」 永田雅宜著 紀 伊 國 屋
「近代代数学」 秋田康夫・永田雅宜著 共 立 出 版
「素イデアルの存在についての一問題」
永田雅宜 数学（岩波）27巻 p.368