パラドックスとラッセルのタイプ理論

土　屋　盛　茂

目　　次

論理学も一朝一夕にして成ったものではない。ブールやド・モルガン等によって現代論理学として再生されてから百年余を経過しているが，その間順調な歩みばかりがあった訳でもなく，時には，その時点で最高の論理体系が根底から覆えされ兼ねない大きな難問に出会い，その解決に論理学者や数学者の多大の努力が要求されることもあった。論理学が言語や数学と密接に関わるものであり，それらはいずれも人間の思考の産物であるとすれば，難問解決の努力は，論理学が思考の構造を正確に反映しようとする努力の過程とみることもできよう。この点に注目して，人間の思考の構造をより明瞭にとり出すこともできよう。それのみならず，他の科学の場合と同様に，問題解決の過程を通して得られる知識成長の一つの場合と見ることもできるだろう。そのような問題解決の努力の最も典型的で最も有名な例が，論理学・数学・言語に関わるパラドックスの出現とその解決の試みである。それは今世紀初頭から数十年続けられた，いや現在もなお継続している問題である。筆者は香川大学において一般教育科目として論理学を担当すると共に，高学年向けの一般教育科目をも担当するものであるが，上の問題は，初等論理学を一度学習した学生に対する一般教育に

とって好個のテーマをなすと思われる。ここでこの問題をとり上げる所以である。ただ紙幅の関係上，代表的なパラドックスのみをとり上げ，パラドックス解決の初期の代表としてラッセル（B. Russell）のタイプ理論に焦点を絞りたい。彼のタイプ理論はしばしば「分岐的」（ramified）という修飾語を冠せられるようにかなり複雑なものであるが，筆者は本稿でその解明をいく分かでも試みると共に，ラッセルに続く発展の展望として，ラムゼイ（F. P. Ramsey）によるその単純化の試みにも簡単に触れることにする。

I パラドックス

(a) 嘘つきのパラドックス

古来最もよく知られているパラドックスに，エピメニデス（B. C. 6 C）の名を冠せられる嘘つきのパラドックスがある。

（1） クレタ人エピメニデスが「クレタ人の言うことは全部嘘だ」と言った。

では，クレタ人エピメニデスの言明「クレタ人の言うことは全部嘘だ」は真か偽か。常識的な真理理論に従えば，ある言明が真であるのは，その言明の主張内容が事実であるとき又そのときに限る。エピメニデスの言明が真であるなら，その内容に従って，それは嘘，つまり偽である。偽だとすれば，その内容に従えば，嘘でないから真である。要するにエピメニデスの言明は，それが偽であるとき又そのときに限って真ということになる。ここに明白な矛盾が生じている。

だが矛盾を導き出す推論を子細に検討すると，逃げ道が見出せないこともない。エピメニデスの言明が偽であるとき，「クレタ人の言うことは全部嘘だ」の否定は「クレタ人の言うことが全部嘘とは限らない」であるから，自分自身が真だと言っているとは限らない。これを真とすると矛盾が生じるが，偽と仮定すると矛盾が生じない。それ故偽である，と結論することができる。しかしこれで嘘つきのパラドックスが解消して了う訳ではなく，B. C. 4 Cのメガラ派の哲学者エウブリデスの作と伝えられる，

（2） 或る人が「私が今言っていることは嘘だ」と言った

は真正のパラドックスである。「私が今言っていること」はまさに「私が今言っ

ていることは嘘だ」という当の言明を指し，それ以外のものを指さないのだから，上のような逃げ道はない。このパラドックスの核心は，「…は偽である」という言明が曖昧さなしに自分自身に言及しているところにある。このことさえあれば，いろいろの変種をつくり出すこともできる。（2）をより明確にした，

（3） 『一般教育研究』第17号15頁の上から5行目の「『一般教育研究』…」なる言明（3）は偽である

もその一つである。相互に言及し合う二つの言明に関しても同様のパラドックスを見出しうる。ビュリダン作と伝えられる，

（4） ソクラテスが「プラトンの言うことは偽である」と言い，プラトンが「ソクラテスの言うことは真である」と言う

もその例である。

ついでに古くからパラドックスとして知られているものの中いくつかを挙げてみよう。

（5） ある領地の入口に橋があり，そのたもとに絞首台が建てられ，この橋を渡って領地に入るものはこれから自分のしようとすることを正直に告げねばならない，もし偽りを言えば絞首台に懸けられる，という布告が出された。ある旅人が「自分は絞首台に懸けられに行く」と告げた。彼を絞首刑に処すべきか否か。当惑した衛士に解決策を求められたサンチョ・パンザはどう答えただろうか。（『ドン・キホーテ』中の物語――Church 1951，pp. 103—4 et al.）

（6） プロタゴラスはエウアトロスに，エウアトロスが訴訟に初めて勝った時に授業料を支払うという条件で弁論術を教えた。ところが授業が終っても訴訟はなされず授業料は払われなかった。そこでプロタゴラスはエウアトロスを訴え，「エウアトロスがこの訴訟に勝てば，契約条件に従い彼は授業料を支払うべきであり，私が勝てば，それが裁判所の決定なのだから，彼は授業料を払うべきだ」と述べたが，一方エウアトロスも，「プロタゴラスがこの訴訟に勝てば，私はまだ訴訟に勝っていないのだから授業料を払う必要はないし，私が勝てば，それが裁判所の決定なのだから，授業料を払う必要はない」と述べた。さていずれに軍配を上げ

るべきか。(Mackie 1973, pp. 297--8)

これらはいずれもディレンマと言われるものであるが，同時に一種の自己言及を含んでいる。例えば（6）では，訴訟の決着のキー・ポイントは契約条件であるが，その条件は当の訴訟の勝敗に言及している。そのため決定を下すことができない，等々。では解決はないのだろうか。否，答は簡単で，そのような布告や契約は無効と言えばよい。その意味でこれらは偽似パラドックスといえる。だが嘘つきのパラドックスはそうではない。布告や契約の場合は不成立も可能であるが，「真」「偽」の概念が不成立では困るのである。常識的な真理概念を保持する限りこのパラドックスが不可避であるという点に，それが真正のパラドックスとみなされる理由がある。

(b) ブラリ・フォルティ（C. Burali-Forti）の最大序数のパラドックス (Burali-Forti 1897)

話を近代に，しかも数学の領域に移そう。集合論において，任意のクラスのメンバーは，推移的（transitive）で非反射的（irreflexive）で結合的（connected）ななんらかの関係によって順序づけ（ordering）をすることができる，ということが示されている。そのようなクラスを順序クラス（ordered class）という。しかもその順序クラスが最初のメンバーを持ち，しかもそのすべての部分クラスも最初のメンバーを持つとき，整列クラス（well-ordered class）という。二つの順序クラス α と β 間に一対一対応 f があり，h と k を α と β の順序づけの関係とするとき，$x, y \in \alpha$ で $x = hy$ なる任意の x, y に対して，$fx = k(fy)$ が成り立つならば，α と β は相似している (similar) という。ある整列クラスをとると，それに相似なクラスから成るクラスが存在する。それがそれらのクラスの序数（ordinal number）である。n 個のメンバーを持つ整列クラスの序数は n であり，この点基数 (cardinal number) と変らないが，自然数を大きさの順に並べた整列クラス $\{0, 1, 2, \cdots\}$ の序数は w_0 とされ，それに任意のメンバー，例えば w_0 を付け加えたクラス $\{0, 1, 2, \cdots, w_0\}$ の序数は w_0+1 とされる。無限クラスに関して w_0+1 なる序数のある点で，序数は基数と異なる。

さて，いかなる序数のクラスも整列加能なることはカントール（G. Cantor）

によって示されている。それ故，あらゆる序数のクラスも整列可能であり，それ自身の序数を有す。その序数をΩとする。上で見たように，0からnまでの序数から成るクラスの序数は$n+1$である。Ωも序数であるから，それを先のクラスに含めると，そのクラスの序数は$\Omega+1$となる。当然$\Omega<\Omega+1$。しかるに，Ωがその序数であるクラスは全序数のクラスであるから，Ωもそのメンバーでなければならず，それなら$\Omega>\Omega+1$でなければならない。これは不可能だから，Ωは序数でありながら全序数のクラスのメンバーでないことになる。

これは1897年にブラリ・フォルティの見出したパラドックスである。彼はこれを，序数の全順序づけが不可能なことの証明に用いようとしたのだが，同年カントールがその全順序づけの可能なことを証明しており，真正のパラドックスであることが知られた。後に見るようにこのパラドックスの原因は，序数の順序づけ以外のところにあったのである。又このパラドックスはカントールが，1899年のデデキント宛の書翰で見られる通り（1895年位には気付かれていたようだが），ブラリ・フォルティと独立に，無限基数の整列クラスに関しても言いうることを見出していた。だがここではそれは省略し，次に，最大基数に関するカントールのパラドックスを示すことにする。

(c) カントールの最大基数のパラドックス（Cantor 1899――Kleene 1952, p. 36 et al.）

カントールは，いかなる条件を与えてもクラスが特定されるとするから，あらゆるクラスのクラスも存在すると考えられる。それをVとしよう。又任意のクラスαの部分クラスのクラスを$U\alpha$で表わし，クラスβの基数を$\overline{\overline{\beta}}$で表わすなら，$\overline{\overline{U\alpha}}=2^{\overline{\overline{\alpha}}}$，即ち$\overline{\overline{\alpha}}<\overline{\overline{U\alpha}}$なることも示されている。全クラスのクラス$V$に関しても$\overline{\overline{V}}<\overline{\overline{UV}}$がいえる。ところが$UV$はクラスのクラスであり，$V$はあらゆるクラスのクラスであるから，$UV$は$V$の部分クラス，即ち$UV\subseteq V$であり，従って$\overline{\overline{UV}}\leq\overline{\overline{V}}$である。これは上の結果と矛盾する。

(d) ラッセルのパラドックス（Russell 1902）

カントールに従って，いかなる条件によってもクラスは与えられるとしよ

う。即ち，

（7） $(\exists y)(x): x \in y . \equiv . Fx$ [1]

この条件 Fx を「クラス x は自分自身のメンバーでない」，即ち

（7′） $Fx . \equiv . x \notin x$

とすると，$\alpha = \{x : x \notin x\}$，即ち自分自身のメンバーでないクラスから成るクラスが特定できることになる。(7)と(7′)より $(x): x \in \alpha . \equiv . x \notin x$。ではこのクラス α は自分自身のメンバーであるかどうか。α も x のとりとる値の一つだから，

（7″） $\alpha \in \alpha . \equiv . \alpha \notin \alpha$

即ち，α が自分自身のメンバーであるなら，そのクラス特定条件から自分自身のメンバーでないことになり，α が自分自身のメンバーでないなら，同じく特定条件から，α のメンバー，即ち自分自身のメンバーであることになる。

このパラドックスは1902年のフレーゲ (G. Frege) 宛書翰によって発表された。時恰かもフレーゲが *Grundgesetze der Arithmetik* の第二巻を出版する直前であった。フレーゲはこの大作において，論理学を基に集合論を含む数学の基礎づけをなそうとしていた。ところがラッセルのパラドックスは，そのフレーゲの理論中に避け難い矛盾が含まれていることを指摘したのであった。フレーゲにとってこの結果は非常にショックだったらしく，上掲書の Nachwort (1902年10月）の冒頭に「科学の著作家にとって，その仕事の完成後に，その構築の基礎の一つがぐらつくこと以上に不都合なことはない。私はこの巻の印刷の終了間近になって，バートランド・ラッセル氏の手紙によってそのような状態に置かれたのである」と書いている。なぜフレーゲはラッセルのパラドックスをかほど深刻に受けとめたのか。それ以前すでに，ブラリ・フォルティやカントールのパラドックスも知られていたではないか。だがそれには十分理由がある。後者のパラドックスが深刻でないという訳ではないが，「あらゆる序数のクラス」とか「あらゆるクラスのクラス」などは，集合論構築の極限領域で生じるクラスであり，そのパラドックスはそこに至るまでの構築を揺がすものではなく，今後構成のし方を工夫すれば解消しうるかもしれない，という希望も持てたのである。事実後のツェルメロ (E. Zermelo) の公理体系ではそのような大きすぎるクラスの構成ができないように工夫された。ところがラッセルの

パラドックスは，集合論において基礎中の基礎であるメンバー性($x \in y$)の概念から生じるものであり，ここから矛盾が生じる以上，集合論の構築はそもそも最初から安心してなされ得ないと受けとめられたのである。そのため数学基礎論に関心を持つ数学者や論理学者は，ラッセルのパラドックスを機縁として集合論のパラドックス一般にも目を向けざるを得なくなった。いやそれのみか，嘘つきのパラドックスも含めたパラドックス一般の解決を，論理学にとって差し迫った必要性と受けとめるようになり，それから活発なパラドックス論議が展開されるようになったのである。

ラッセルのパラドックスは，自分自身のメンバーでないクラスのクラスαが当の α 自身のメンバーか否かという自己言及をなすという特徴と，「自分自身のメンバーでない」という特殊なメンバー性の条件を持っていた。後者を若干変更すると，同タイプのパラドックスが無数につくり出されうることも今は知られている（Quine 1951，p .131 et al.)。それにはメンバー性の条件 Fx を次のようにすればよい。

(8) $x \in \alpha_1 . \equiv :. (y) : \sim . x \in y . y \in x$

$x \in \alpha_2 . \equiv :. (y)(z) : \sim . x \in y . y \in z . z \in x$

$\vdots$

$x \in \alpha_n . \equiv :. (y_1) \cdots (y_n) : \sim . x \in y_1 . y_1 \in y_2 . \cdots . y_n \in x$

又ラッセルは，関係に関しても類似のパラドックスを見出しうることを指摘している（Russell 1908，1910 et al.)。関係Tを次のような条件で定義する。

(9) $R\{T\}S . \equiv . \sim R\{R\}S$（‘$R\{T\}S$’は$R$が$S$に対して関係$T$を持つと読む。なおここの$R$，$S$は関係変項とする）

即ち，任意の関係RとSが関係Tを有するのは，RとSが関係Rを有しないとき又そのときに限る，と定義する。RとSは変項であるから任意の関係を代入することができる。両者にTを代入すると，

(9′) $T\{T\}T . \equiv . \sim T\{T\}T$

即ち，Tが自分自身に対して関係Tを有するのは，Tが自分自身に対して関係Tを有しないとき又そのときに限る。かくて先と同様のパドラックスが生じる。

ところでラッセルは上のパドラックスを日常言語によって具体化した「理髪

師のパラドックス」も考案している（類似のものは数多くある)。

(10) ある村に一人の男の理髪師がいて，彼は，自分で自分の髭を剃らない村内のすべての男の，またそれらの男だけの髭を剃るように定められている。では彼は自分の髭を剃るかどうか（Quine 1951 et al.)。

矛盾の生じるのは明らかである。彼が自分で自分の髭を剃るとすれば，自分の髭を剃ってはならず，自分で自分の髭を剃らないとすれば，自分の髭を剃らねばならない。しかし我々は，先のサンチョ・パンザのパラドックスなどと同様に，このような理髪師の存在を必然と考える必要はない。この条件を満たす理髪師は存在しえない，と結論すればよい。それがクラスや関係に関するラッセルのパラドックスと異なる点である。クラスのメンバー性や関係を不必要と考えることはできない。たしかに，パラドックスを生み出すこれらのクラスや関係にはどこか間違ったところがあり，それは取り除かねばならない。しかしその除去は，間違いの源だからといって，クラスや関係の概念全体を捨て去ることによってすることはできない。必要なのは，それらの概念は保持しながら，それら特定のクラスや関係を生む間違いを特定し取り除くことであり，それがパラドックスにからむ焦眉の問題だったのである。

(e) リシャール（J. Richard）の定義可能性のパラドックス（Richard 1905）

$0<a<1$ なる実数 a の言葉による定義を考えてみる。言葉による定義は，日本語又は何語であれ，各々（いかに長くとも）有限個の文字によってなされるものであるから，定義された数は可付番無限個を超えない。それらの数から成るクラスEとしよう。それらの数はすべて無限小数の形に展開できるから，Eのメンバー a_i は次のように配列できる。

$$a_1=0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots\ a_{1n}\cdots$$
$$a_2=0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots\ a_{2n}\cdots$$
$$a_3=0.\,a_{31}a_{32}a_{33}\cdots\ a_{3n}\cdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_n=0.\,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots\ a_{nn}\cdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

（a_n はこの配列における n 番目の小数，a_{nn} は a_n の小数点第 n 位の数字とする）

ここでリシャール数とも名付くべき数 N を，カントールの対角線法にならっ

て,「整数部分に数字0を有し，小数点n位の数字としては,E中のn番目の数a_nの小数点n位の数字が9でなければ$a_{nn}+1$を有し，a_{nn}が9なら0を有すような数」と定義する。このNも言葉によって定義された$0<N<1$なる数であるから,Eのメンバーでなければならない。ところがNはEのどのメンバーとも異なる。a_1とはa_{11}に関して,a_2とはa_{22}に関して，一般にa_nとはa_{nn}に関してNは異なるからである。それ故NはEのメンバーでないことになる。

(f) ケーニッヒ（D. König）の定義可能性のパラドックス(2) (König 1905)

このパラドックスは，リシャールのものと同じく定義可能性に関するものであるが，それより一年前にハイデルベルクでの数学者会議で公表されたものである。彼も同じく言葉によって有限的に定義されうる実数の集合Eを考える。Eの濃度は$\aleph_0$であり，実数全体の数は$\aleph_0$よりはるかに多いから，定義されえぬ実数が存在し，それら全体で一つのクラスFを構成する。カントールの連続体仮説によれば，実数全体のクラスは整列可能であるから，その部分クラスも最初のメンバーを持つ。そこでケーニッヒ数Nを「有限的に定義されえない(Eに属さない）すべての実数のクラスFの第一番目の数」と定義する。このNは有限の言葉で定義されているからEのメンバーでなければならない。ところがこの定義は，NがEのメンバーでないことを告げているのである。(ラッセルは実数の代りに序数を扱い,Nの定義を「有限的に定義されえない最初序数」と変項してパラドックスを構成しているが，本質は変らない)。

ケーニッヒはこのパラドックスを，実数のクラスが整列不可能なることを背理法によって示すために用いたのであるが，同タイプのリシャールのパラドックスの発見によって，パラドックスの原因が別にあることが知られ，しかもツェルメロが1904年にあらゆるクラスが整列可能なることを示しているから，その背理法は力を失ない，このパラドックスは真正のパラドックスとみなされるようになった。

(g) ベリー（G. G. Berry）の命名可能性のパラドックス（Russell 1908, p. 153, 1910, p.61 et al.）

これは英国の司書ベリーが見出し，ラッセルによって公表されたパラドックスである。すでに見た如く数は言葉によって定義されうるが，数の名前につい

ても同様である。「九」や「三の三乗」はいずれも9の名前である。日本語による正の整数の名前を考えよう。一字の名前，二字の名前等々がある。一般に名前の字数が増すと，不規則的ではあるが，名づけられた数は大きくなる傾向がある。又，一定数の文字によって命名される数は，文字とその配列が有限なのだから，その数は有限である。22字以内の文字で命名される正の整数は有限個しかなく，従って22字以内の文字では命名されない正の整数が無限に存在し，それらは一つのクラスを成し，明らかにその中で最小の正の整数がある(3)。今そのような最小の正の整数に「二十二字以内では命名され得ない最小の正の整数」という名前を与える。ところがこの名前は22字から成っており，22字以内の文字で命名されうる正の整数のクラスに属することになるが，一方，その名前の告げるところでは22字以内では命名できない数なのである。

(h) グレリング(K. Grelling)の 'heterological' のパラドックス(4)(Grelling & Nelson 1908,——Beth 1959, p. 486, Quine 1961, pp. 6—7, Ramsey 1925, p. 27 et al.)

今二つの新しい形容詞を導入しよう。それらは形容詞の性質に関するもので，自分自身にあてはまる形容詞を autological（自己記述的）と呼び，自分自身にあてはまらない形容詞を heterological（非自己記述的）と呼ぶことにする。英語の形容詞について言うなら，'short' はそれ自身短かいから autological であり，'English' はそれ自身英語の語だから autological である。一方，'long' は長くないから自身にあてはまらず，heterological であり，'French' はそれ自身はフランス語の語でないから heterological である。ところで 'heterological' も形容詞であるが，これは heterological なのかどうか。heterological だとすれば，自分自身にあてはまっているから heterological でなく autological であり，heterogical でないとすれば，自身にあてはまらないから，heterological である，という矛盾が生じる。

これは嘘つきのパラドックスとよく似ているが，それも当然である。形容詞は，'red' が赤いものについて真であるように，あるものについて真ということができる。これを特定化すれば「自分自身について真」という複合的形容詞に至る。'autological' と 'heterological' は，各々「自分自身について真」と

「自分自身について真でない」を単一の形容詞として表現し直したものに他ならない。「自分自身について真でない」は自分自身について真でないのかどうかと問うのは，嘘つきのパラドックスと同じであり，それが‘heterological’のパラドックスなのである。

なおこの他にもパラドックス又は偽似パラドックスはいろいろな種類のものがあるが(5)，ラッセルのパラドックスをきっかけに生じた一連の動きの中で注目されるべきパラドックスとしては，これまで挙げたもので十分であろう。一部すでに指摘したように，これらのパラドックス中にはなんらかの形の自己言及が含まれていることは明らかであり，又その点こそがラッセルのタイプ理論とも関連しているのである。その意味からも我々は，上記のパラドックスの枚挙に留め，他の種のパラドックスは後の機会に別の観点から見てみたいと思う。

II　パラドックスの解決の試み

a．解決の模索

上記のパラドックスは，数学・言語を包括する論理体系の構築を構想する，フレーゲやラッセルなどの論理主義者にとっては勿論一時も放置できない重大問題であるが，他の数学者・論理学者・哲学者にとっても，問題が数学・言語の基本概念に関わるものである以上，たとえ，それらの概念の特殊な使用に際して初めてパラドックスが生じるため，それ以外の使用では実際的な支障が生じることがないと予想されるとはいえ，やはり数学や言語の基礎に不安のあることに変りはなく，同じく忽せにできない問題と映じていた。例えば，ツェルメロの如く，自己の領域（集合論）で安全性を確保できるような公理体系の建設に取り組んだり，又他に，パラドックスの原因をさぐる論理的・哲学的な議論がいろいろなされたりした。われわれはそれらの試みを，その極く一部ではあるが，ラッセルのタイプ理論とそれに関連する考え方を通して，眺めてみたいと思う。

リシャールは，パラドックスを告げる1905年の書翰において，「この矛盾はみかけだけのものだ」と言い，一つの解決の方法を示唆している。彼のパラドッ

クスは，リシャール数 N が，有限的に言葉で定義された数のクラス E に属すべきであるのに，E に属していないという点にあった。E に N を加えてクラス E' を作っても解決されない。なぜなら同じく E' に対応する新たなリシャール数 N' が定義されうるからである。問題は，クラス E が総体的に定義されていない (not totally defined)，即ちそのメンバーが確定していないという点にある。それをするには N の定義も付け加えねばならないが，N の定義中には E への言及が含まれているから，E を定義するのに E を以ってするという循環が含まれている。この循環の故に E は総体的に定義されえず，有意味にならない，と言うのである。

ポアンカレ (H. Poincaré) もリシャールと同じ見解を持つ (Poincaré 1906)。ポアンカレ自身は，論理主義のものであれ形式主義のものであれ，数学の論理学化には批判的であって，数学にはやはり直観に立脚するアプリオリな綜合的原理がある，少くともその一つが数学的帰納法だと主張する。それを認めず，数をクラスのクラスと定義するものも，無意味な記号列から成る公理系の無矛盾性を証明し，その公理系を満たすものとして数を定義するものも，実は数又は数学的帰納法を前提しているから，等しく循環論法を犯しているのだ，と指摘する。我々のパラドックスも同じく循環論法により生じる。循環した定義によって与えられるのが，ラッセルのいう非確定的 (impredicative) なクラスなのだという。彼は更にその病根を，論理学者が前提するカントールの集合論に含まれる実無限の観念に求める。上記パラドックスの循環的定義には，常に「すべての」という語が現れ，自己言及を含むクラスをそれによって確定したものとみなそうとしている。それらのクラスは無限のメンバーを含むから，そのクラスを所与とすることは実無限を認めることである。しかし無限の対象に対する定義は完了しない。それを完了したものとみなす虚構からパラドックスが生まれる。特に定義が循環しているときは，定義が完了したと一応仮定してみても，まさにそのとき未定義のメンバーが次々と登場してくる。ポアンカレは，実無限を前提するときは，そのような危険性を常に内蔵している，と言うのである。

ラッセルも，どんなメンバー性の条件（彼は「命題関数」(propositional function）という術語を主に使う）によってもクラスが確定されるとはもはや言いえないこと，非確定的な命題関数のあることは認めた。タイプ理論の完成に先き立って1905年にラッセルは，非確定性排除の方向として三つの仮説を提示した。（1）ジグザグ理論，（2）サイズ制限理論，（3）無クラス理論の三つである。ジグザグ理論は，命題関数がクラス確定に成功するのは，それが単純なときであり，命題関数が複雑で分りにくい時はクラス確定に失敗する，という考えに基づいている。複雑で分りにくいことをジグザグ性と呼ぶが，ではどのような命題関数をジグザグと判定するのかは曖昧である。パラドックスを生み出すような命題関数がそうと言うのでは，何の助けにもならない。勿論その条件はこれから求めるべきものとされているのであるが，結局はタイプ理論で明確化されるべきものであった。ところで，ブラリ・フォルティの「あらゆる序数のクラス」やカントールの「あらゆるクラスのクラス」という条件はジグザグではないが，その与えるクラスが余りに大きすぎるということは明らかである。とすれば，大きすぎるクラスを生み出すような命題関数を除外するというのも一つの考え方である。だがどのようなクラスが大きすぎるのか。それが前記の類のものだとしても，どのようなし方で大きすぎるクラスを生まないようにクラスのサイズを制限するのか。その方法は別途求められねばならない。結局ラッセルはこの方向は採らなかった。代りにツェルメロやフォン・ノイマン(J. von Neumann）が，厳密な構成規則に従って生み出されるもののみをクラス(又は集合 (set)）と認めるという公理的方法を採ることによって，クラスのサイズの制限をなしえたのである。無クラス理論は，クラスと命題関数の間にある微妙なずれにパラドックスの原因を認め，クラスを存在の類から除外しようとする態度を表わす。「クラス」という語を用いるとしても，それはそのメンバーについて語る便宜的な手段に他ならない。その結果，命題関数 Fx がクラスを決定すると言うことは，F なる多くの x について語る便宜として認められるとしても，存在でないクラスの方から命題関数を決定することは認められない。かくて，ラッセルのパラドックスに現れる“$x \notin x$”は命題関数と認められないことになる。だが集合論では「クラスのクラス」と有意味的に語られていたのであるから，たとえ「クラス」概念は用いずとも，それに対応するもの

が命題関数によって表現できねばならない。だがその時は，パラドックスの原因は，クラスと無関係に，特殊な形の命題関数にあるということが明確にされねばならないだろう。無クラス理論を採る必要があったかどうかはともかくとして，次に述べるタイプ理論では，無クラス理論は前提されるであろう。

b．ラッセルの分岐的タイプ理論（Ramified Type Theory）

ラッセルも，定義項中に被定義項が含まれているような循環にパラドックスの原因を認めるという点では，リシャールやポアンカレと軌を一にする。彼はそれを「悪循環の原理」(Vicious Circle Principle) とし，「ある集まりに総体があるとするとき，その集まりがその総体によってしか定義されえないなら，先の集まりには総体がないのである」と述べた。簡単にすれば，「ある集まりのすべてを含むものは，その集まりの一員となってはいけない」(whatever involves all of a collection must not be one of the collection)。(共に Russell 1908, p. 155)。カントールのパラドックスについていうなら，あらゆるクラスのクラスも又クラスであるから，それ自身のメンバーでなければならない。かくて悪循環の原理を犯し，あらゆるクラスのクラスは不正当な総体(an illegimate totality) ということになる。そこで問題は，第一に，悪循環の原理を正しく反映する論理学の体系を構築することであり，第二に，それに従えばパラドックスが排除されるということを示すことによって，逆に悪循環の原理の(帰納的な) 立証を試みることである。これをするのがタイプ理論であり，それをラッセルは，「クラス」を前提せず，主に「命題関数」に対して行なうのである。

「x は歩く」や「x は y の父親である」などを‘φx’や‘ψxy’などで表わす。ラッセルはルーズなし方でこれらを命題関数と呼ぶ時もあるが，厳密には命題関数と区別する。命題関数は x の値となる個体 $a, b, \cdots$ と命題 $\varphi a, \varphi b, \cdots$ とを対応づける機能であり，‘$\varphi\hat{x}$’や‘$\psi\hat{x}\hat{y}$’などで表わす。φx や ψxy は，x や y に個体名 $a, b, \cdots$ などが代入されたとき確定した命題 $\varphi a, \cdots, \psi ab, \cdots$ になるような未定の命題であり，曖昧に表示される命題である。数学における“$x=x$”のように，φx が主張されるならば，それは特定の個体 a や b に関してだけでなく，いかなる (any) 個体に関しても φ であると主張していることになる。それ故

φx，従って$\varphi\hat{x}$が明確な意味を持つ (well-defined) とすれば，先ず φa，φb，… のすべてが明確な意味を持ちえねばならない。従って個体の名前 a，b，…のすべてが明確な意味を持っていなければならない。即ち，φx又は $\varphi\hat{x}$ は a，b，… の総体を前提する。逆に a．b，… が $\varphi\hat{x}$を前提することはない。もし φx の x に $\varphi\hat{x}$ を代入するなら，悪循環の原理が破られている。それは $\varphi(\varphi\hat{x})$ となるが，その一例「『歩く』は歩く」のように，真でないのみか偽ですらなく，意味を全く失なうのである。

普通命題 $(x).\varphi x$ に関しても同様のことがいえる。それが明確な意味を持つには，x の値，個体の総体が前提されていなければならない。それ故 $(x).\varphi x$ は「x のすべての値に関して φx は真である」と読むべきではない。x の値として何が与えられるかが明確にされていないからである。むしろ「x のすべての可能な値に関してφxは真である」と読むべきだという。xの可能な値とは，$(x).\varphi x$ 又はφxを有意味にするような x の値である。そのような値の総体を $\varphi\hat{x}$ の「有意味性の変域」(range of significance) と呼ぶ。命題関数には，個体に関するものだけでなく，個体の関数を独立変項 (argument) とするものもある。それは有意味となるために個体の関数の総体を前提する，即ち，個体の関数の総体が有意味性の変域をなす。これは更に個体の関数の関数についてもいいうるだろう。かくて命題関数には階層のあることが分かる。この階層を決定するのは各命題関数の有意味性の変域であるから，それをタイプと呼ぶのである。こうして，第一のタイプをなすものが個体，第二のタイプが個体の命題関数，第三のタイプが個体の命題関数の命題関数等々，とタイプ区分されるであろう。

だが命題関数のタイプがその独立変項だけでは決まらない場合がある。束縛変項を含む命題関数にその場合がある。例えば $\varphi\hat{x}$ も $(\varphi).f(\varphi\hat{x},\hat{x})$ も共に個体 x を独立変項とする命題関数である。(個体の関数は φ，ψ，…というギリシア文字を用いて表わすが，それと区別するために，個体の関数の関数は f，g，…で表わし，又これらの関数は F，G，…で表わすことにし，それ以上の階層の関数にも同様の工夫があるものとする)。$\varphi\hat{x}$ は個体の総体を前提するだけでよいが，$(\varphi).f(\varphi\hat{x},\hat{x})$ は，x の可能な値の総体だけでなく，束縛変項 $\varphi\hat{x}$ の可能な値の総体をも前提する。それ故 $\varphi\hat{x}$ より高次の関数とみなさねばならない。それ故

命題関数のタイプは，何の関数かという面だけでなく，その表現の中にいかなる束縛変項を含むかという面からも考察せねばならないことになり，それだけ複雑化する。それらのことを含め，ラッセルは「階」(order) という語を用いて命題関数を次の如く区分する。

先ず，束縛変項を全く含まぬ関数，マトリックスについて見ると，その階は独立変項だけで決まる。個体変項のみを含むものは一階の関数 (first-order function)，一階の関数を独立変項の中に含むものが二階の関数，そして一般に，その独立変項の中に最高階として $n-1$ 階の関数を含むものは n 階の関数である。例で示せば次の通りである。(各文脈中最高階の関数のみが定項)

一階の関数　$\varphi\hat{x}, \psi(\hat{x}, \hat{y}), \chi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), \cdots$

二階の関数　$f(\hat{\varphi}\hat{x}), g(\hat{\varphi}\hat{x}, \hat{\psi}\hat{x}), h(\hat{\varphi}\hat{x}, \hat{x}), \cdots$

三階の関数　$F(\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x})), G(\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x}), \hat{\varphi}\hat{x}, \hat{x}), \cdots$

束縛変項を含む命題関数については，個体の総体以外を前提しない（個体変項（自由又は束縛）以外を含まない）ものが一階の関数であり，例えば，

$\varphi\hat{x}, \psi(\hat{x}, \hat{y}), (x).\psi(x, \hat{y}), (Ey).\psi(\hat{x}, y), \cdots$(6)

変項として一階の関数を含み，かつそれより高階の関数を含まないものを二階の関数とする。例えば，

$f(\hat{\varphi}\hat{x}), g(\hat{\varphi}\hat{x}, \hat{\psi}\hat{x}), h(\hat{\varphi}\hat{x}, \hat{x}), (x).h(\hat{\varphi}\hat{x}, x), (\varphi).g(\varphi\hat{x}, \hat{\psi}\hat{x}),$

$(\varphi).h(\varphi\hat{x}, \hat{x}), \cdots$

変項として二階の関数を含み，かつそれより高階の関数を含まないものを三階の関数とする。例えば，

$F(\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x})), G(\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x}), \hat{\varphi}\hat{x}), H(\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x}), \hat{\varphi}\hat{x}, \hat{x}),$

$(x).H(\hat{f}(\hat{\varphi}\hat{x}), x), (f)(\varphi).H(f(\hat{\varphi}\hat{x}), \varphi\hat{x}, \hat{x}), \cdots$

一般に n 階の関数は，$n-1$ 階の関数を変項として含み，かつそれより高階の関数を含まないものと定めることができる。

自由変項を含まない命題に関しても，関数の場合と同様に階を定めることができる。一階の命題とは，基礎命題 (elementary proposition) 又は個体変項のみを束縛変項として持つものであり，例えば，

$\varphi a, \varphi a \,.\,\mathrm{v}.\, \varphi b, (x).\varphi x, (\exists x)(y).\psi(x, y), \cdots$

二階の命題は，束縛変項として一階の関数又は命題を含み，かつそれより高階の関数又は命題を含まないものである。例えば，

$(\varphi).f(\varphi\hat{x}), (\exists\varphi)(x).g(\varphi\hat{x}, x), (p).h(p), \cdots$

一般に n 階の命題は，$n-1$ 階の関数又は命題を束縛変項として含み，かつそれより高階の関数又は命題を含まないものとされる。

こうしてみるとタイプは相当に複雑である。個体の関数にも一階，二階，三階の区別があり，又三階の関数にも個体の関数，個体と一階の関数の関数，二階の関数の関数等々があることになる。そしてそれらは明らかにタイプを異にしている。分岐的タイプ理論と言われる所以である。関数のタイプは厳密には，その関数の値のタイプと独立変項の数とタイプによって決まるものなのである。$(i_1, \cdots i_k: j)$ をタイプ表記とし，$i_1, \cdots, i_k$ を独立変項のタイプ，j を関数の値のタイプを表わすものとするなら，例えば次のようになるだろう。

$\varphi\hat{x}$	$(0:1)$	（個体を0階とする）
$\psi(\hat{x}, \hat{y})$	$(0, 0:1$	
$(x).\psi(x, \hat{y})$	$(0:1)$	
$f(\hat{\varphi}\hat{x}, \hat{\psi}(\hat{x}, \hat{y}))$	$((0:1), (0, 0:1):2)$	
$(\varphi).g(\varphi\hat{x}, \hat{x})$	$(0:2)$ etc.	

（しかしこのタイプ表記は非常に複雑になるので余り実用に供さず，ラッセルは普通は階を用いてタイプを語る便宜をとっている)。

ところでこれまで我々は‘$(\varphi).g(\varphi\hat{x}, \hat{x})$’のような関数表記をしてきたが，実はこれには問題なしとしないのである。この関数は個体の関数 $\varphi\hat{x}$ の総体を前提している。ところが個体を独立変項とする関数には，一階の関数 $\varphi\hat{x}$ も，二階の関数として $(\varphi).g(\varphi\hat{x}, \hat{x})$ 自身も，更には三階の $(f)(\varphi).F(f(\varphi\hat{x}), \varphi\hat{x}, \hat{x})$ さえ含まれる。原理的にはどれほど高階の個体の関数も考えられる。従ってそれら一切をひっくるめた総体は，$(\varphi).g(\varphi\hat{x}, \hat{x})$ の前提するものとしては不正当な総体となる。変項 $\varphi\hat{x}$ の変域に $(\varphi).g(\varphi\hat{x}, \hat{x})$ 自身を含ませることは明らかに悪循環を犯している。ここの $\varphi\hat{x}$ の正当な総体をなすのは，すでに明らかなように，一階の個体の関数のみである。これを個体の確定的関数(predicative function of individuals) と呼び，他と区別するために‘$\varphi!\hat{x}$’と！印を付けて表

記することにしよう。これに対して $(\varphi).g(\varphi\hat{x}, \hat{x})$ は個体の非確定的関数である。一階の関数を独立変項として持つ二階の関数（個体変項は含んでいてよい）は，一階の関数の確定的関数であり，$f!$ や $g!$ の関数文字で表わす。これはいかなる階の関数にもあてはまることとする。そうすると，これまで示した様々の階の関数又は命題の中に含まれていた関数変項は，$\varphi!$, $f!$ 等で表わされる確定的関数と解されるべきだったのである。

ここで一つ注意すべきことは，タイプを絶対的な意味にとる必要はないということである。何が絶対的な意味で個体かを決めねばならないとしたら，論理学とは無関係の哲学の論議に巻き込まれてしまう。タイプの区分は，そもそも悪循環の原理に従い，不正当な総体を前提するのを避けるためであり，その観点からは絶対的タイプ区分は不必要である。数論では自然数より階の低いクラス（命題関数）は現れることがなく，又実際に自然数を個体の如くみなす。ラッセルは周知の如く自然数をクラスのクラスとして定義する。だからといって二階の関数から始めなければならないということはない。我々に必要なのはその文脈における相対的なタイプ区分だけなのである。それ故論理学の公理“$(x).\varphi x:\rightarrow.\varphi x$”も普遍性を持つことができる。絶対的タイプに基づけば，x が個体の場合，一階の関数の場合等々と無数の公理を用意しなければならないが，上の公理では x のタイプが何であるか限定されていないため，つまり体系的曖昧さ (systematic ambiguity) を有するため，それらすべての場合にあてはまるものとして主張されるのである。必要なのは，x のタイプが何であれ，$\varphi\hat{x}$ がそれより高階の関数であるという相対的区分のみである。

今までは命題関数ばかりをとり扱ってきた。だがパラドックスはクラスに言及するものが大部分であった。従ってラッセルにおけるクラスのとり扱いを見ておく必要がある。彼も「クラス」という概念を用いないのではないが，無クラス理論でも言われていたように，クラスを独立の存在とは認めないだけである。クラスは命題関数によって‘$\hat{x}(\varphi x)$’と定義される。しかしかく定義されたクラスも文脈を離れては意味を持たない。もしそうなら，それを独立の存在と認めたことになるだろうから。本来はクラスなしに命題関数だけを用いて表現しうる命題を，簡便に表現する手段というだけである。ラッセルは確定記述と

共にクラスを，文脈においてのみ意味を持つ不完全記号とするのである。そこで先ずクラスのメンバー性が，

（1） $x \in \hat{x}(\varphi ! x) . = . \varphi ! x$　　Df.

と定義される。$\hat{x}(\varphi ! x)$ が或る文脈 $f(\cdots)$ に現れる場合には，

（2） $f\{\hat{x}(\varphi ! x)\} . = . (x) . \varphi ! x : f(\varphi ! \hat{x})$　　Df,

と定義される。ここで注意すべきことは，クラスを定義する命題関数は確定的なものであることが必要とされているということである。φ が非確定的なら，不正当な φ や f の総体を含むかもしれないからである。そもそもこのことは，ラッセルのパラドックスなどとの関連で，クラス特定に求められていたことであった。しかし非確定的な関数が一切クラスを特定しないというのも強すぎる制限のように思われる。ラッセルはそれをすべて禁止するということはしない。但しそれらがクラスを特定するためには，あくまで確定的関数を経由しなければならないとする。そのため非確定的関数 $\psi \hat{x}$ に対しては，

（3） $f\{\hat{x}(\psi x)\} . = . (\exists \varphi) :. (x) : \varphi ! x . \equiv . \psi x : f(\varphi ! \hat{x})$　　Df.

という定義を与える。クラス $\hat{x}(\psi x)$ が f であるのは，$\psi \hat{x}$ と外延的に等値な確定的関数 $\varphi ! \hat{x}$ が存在し，$\varphi ! \hat{x}$ が f であるということとする。問題は果たして $\psi \hat{x}$ と等値な $\varphi ! \hat{x}$ が常に存在するかどうかであるが，それには後に見る還元可能性公理（the axiom of reducibility）を待たねばならない。

これだけの用意があれば，無クラス理論では否定されていた，クラスがクラスのメンバーになるという語り方も許されるし（$f\{\hat{x}(\varphi x)\}$ はそれを許す），クラスが量記号の変域になることも許される。α を関数変項 $\psi ! \hat{x}$ によって定義されるクラス変項とするとき，α は $\psi ! \hat{x}$ と等値ないかなる確定的関数 $\varphi ! \hat{x}$ によっても同じように特定されうるものであるから，

（4） $(\alpha) . f \alpha . = . (\varphi) :: (\exists \psi) :. (x) : \varphi ! x . \equiv . \psi ! x :. f(\varphi ! \hat{x})$　　Df.

によってクラスに関して量化してもよいことになる。

関係についてはクラスの場合と全く同様のことがいえる。ここでは（1）（3）に対応する定義だけ挙げておこう。

（5） $x\{\hat{x}\hat{y}(\varphi !(x, y))\} y . = . \varphi !(x, y)$　　Df.

（6） $f(\hat{x}\hat{y}(\psi(x, y))) . = . (\exists \varphi) :. (x)(y) : \psi(x, y) . \equiv . \varphi !(x, y) : . f(\varphi !(\hat{x}, \hat{y}))$ Df.

こうして形成されたタイプ理論においてパラドックスを解決しうることは，容易に見てとれるであろう。煩鎖を避けてここでは，三つのパラドックスの解決を例示しよう。

1) 嘘つきのパラドックス

「私は今嘘をついている」について検討する。これは「今私が主張していて偽であるような命題が存在する」という命題であると解釈できる。タイプ理論では量化される命題変項のタイプが決まっていなければならないから，それを n 階とし‘p_n’で表わすことにしよう。すると先の命題は，

($\exists p_n$)(私は p_n を主張し，かつ p_n は偽である)

となり， この命題は $n+1$ 階である (p_{n+1})。それ故，私が今主張しているのは n 階の命題でないから，p_n の可能な値とならない。かくてパラドックスは排除された(7)。

2) ラッセルの「自分自身のメンバーでないクラスのクラス」のパラドックス

‘$x \notin x$’という命題関数によって与えられるクラスが問題のクラスである。第一にそのようなクラスは特定できない。x はクラスを値とするものだから，それを関数 $\varphi!\hat{x}$ によって特定されたものとし，‘$x \notin x$’の文脈に置いてみよう。すると(1)(2)から，

$$\hat{x}(\varphi!x) \notin \hat{x}(\varphi!x) . \equiv : (x) . \varphi!x : \sim . \varphi!(\varphi!\hat{x})$$

となるが，$\varphi!(\varphi!\hat{x})$ という命題関数は意味を持たない。第二に，‘$x \notin x$’によって与えられるクラスを α とするとき，

$$x \in \alpha . \equiv . x \notin x$$

が言える。パラドックスは x より高階の α を x の値とすることから生じるのであるが，x に α を代入すると，

$$\alpha \in \alpha . \equiv . \alpha \notin \alpha$$

を生む。つまり代入が正しくなかったのである。こうしてこのパラドックスは二重の意味で排除される。

3) ベリーの命名可能性のパラドックス

「命名可能」という語は名前の総体を前提している。名前には固有名と命題関数によって与えられる名前がある(確定記述)。それ故関数の階に対応して名

前の階を定めることができる。固有名を0階の基礎名とし，一階の関数によって与えられる名前を一階の名前，二階の関数によって与えられる名前を二階の名前，等々とする。パラドックスは，「三十九字以内によって与えられるいかなる名前によっても命名されえぬ最小の正の整数」に関するものであるが，ここで量化の可能的変域をなす，三十九字以内で与えられる名前は特定のタイプの名前，例えばn階（又はn階以下）の名前でなければならないのに，他方「三十九字以内で……最小の正の整数」という名前は，n階（又はn階以下）の名前の総体を前提する$n+1$階の名前である。従って，三十九字以内で与えられるn階の名前の一つであることはできず，三十九字以内であることは矛盾とならない。

以上でタイプ理論がパラドックスを解決しうることを見た。しかしタイプ理論も単にパラドックスを排除するためだけの ad hoc なものであってはならず，論理学の一部をなすものとして，他の部門，例えば数学の基礎づけなどにおいて有効に働くものでなければならない。その観点から見るとタイプ理論の制限は強すぎるのである。第一に，ここでは自己言及は一切否定されている。だが「私が今話しているのは日本語である」や「彼は日本における平均的学生である」などは，自身を一つの値とする束縛変項を含むため循環しているが，それでも有意味と言わねばならない。ところがラッセルのシステムでは無意味とされてしまう。タイプ理論修正の要求はこの点からも出てくるだろう。

第二の問題は，正当な関数の総体性を確定的関数に限るということから生じる不自由である。例えば数学的帰納法は，

〈MI〉 0が持ち，それを持つあらゆる数の後者もそれを持つような性質はいかなるものであれ，すべての自然数が持つ性質である。

とされる。〈MI〉自体は，「いかなる性質」という表現の体系的曖昧さの故に有意味であり，その曖昧さのままに真とみなされている。ところがこれを自然数の定義として，

〈DN〉 自然数とは，0が持ち，それを持つあらゆる数の後者もそれを持つようなあらゆる性質を持つ数である

とするなら，「あらゆる性質」によって体系的曖昧さが失なわれ，総体性を言う

ものとなるため，性質のタイプを決めねばならないことになる。そのタイプの性質を一階の確定的関数とすれば，二階以上の関数はこの総体性の中に含ませることができない。もし含ませると不正当な総体性を前提することになる。だが定義〈DN〉中の「性質」を一階だけに限定することは不都合であろう。高階の対象たる有理数の持つ性質でも，自然数の性質となっていけないとは必ずしも言えないからである。換言すれば，この定義を有効ならしめるには，前記の如き健全な自己言及を復活させる必要がある。

定義〈DN〉はペアノやラッセルは認めるが，ポアンカレは厳しく批判している。〈DN〉自体を認めさえしなければこの不都合も生じないと思われるかもしれない。だが同種の不都合は他の命題にもいくらでも現れる。例えば，「ナポレオンは偉大な将軍の持つあらゆる性質を兼備していた」とか，同一性の定義「xの持つあらゆる性質をyも持つなら，xとyは同一である」($x=y.=.(\varphi):\varphi x.\rightarrow.\varphi y$ Df.) などでも同様であり，数学基礎論ではデデキントの切断など枚挙に暇ないほどである。

そこでラッセルは，いかなる階の関数に対してもそれと外延的に等値な確定的関数が存在する（直ぐ見出しうるとは限らないが）という仮定，即ち還元可能性公理を立てる。

$(\exists\psi)(x):\varphi x.\equiv.\psi!x$

$(\exists\psi)(x)(y):\varphi(x,y).\equiv.\psi!(x,y)$ etc.

これによって任意の関数の階数を確定的関数に至るまで下げることができる。それ故先の「あらゆる性質」は，非確定的関数を含むものとしても，それらと等値な確定的関数が存在することから，正当な総体性とみなすことができるのである。すでに指摘したように，先のクラスの定義(3)においてこの公理が含まれていた。$\varphi\hat{x}$においてφがxよりタイプの高いものでありさえすれば，どんな$\varphi\hat{x}$によってもクラスが確定できるとしたのである。それによって初めて集合論による数学の基礎づけが可能になる。それ故，クラスの存在を認めれば，この公理が導き出せることになる。還元可能性公理は直観的に自明でなくとも，大方の認めるクラス存在の仮定より弱いものであり，仮定する相当の理由があるとラッセルは主張する。

だがこの公理は一度設けた階の区別を後で反古にするような類のものである。いかにも手が込んでいる。タイプ理論のそのような複雑さは本当に必要なものなのか。確定的関数だけを認める単純化は不可能なのか，などという疑問が当然生じてくる。又，公理には相応の自明性が要求される。ラッセルは，(ここではとり上げないが) この公理を擁護する一種の帰納的議論をいろいろ行なっているが，どのような議論をしようとも，論理学の他の公理にはあってこの公理に欠けている自明性は，この公理を疑がわせる相当の理由になる。いずれにせよ，このように疑問の中心となる還元可能性公理が，ラッセルのタイプ理論のアキレス腱であると，つとに思われていたのである。

最後に一つの注意が必要になる。階区分によって達成されたパラドックスの排除は還元可能性公理の影響を受けないか，という疑問が当然生じるだろう。だがそれは大丈夫である。ラッセルのパラドックスは，同一タイプの独立変項を持つ関数間の階の区分によって排除されたのでなく，ある関数の独立変項の値として当の関数をおく($x \in x$ 又は $\varphi(\varphi\hat{x})$) という，還元可能性公理でも救い得ない誤謬を犯している，ということによって排除されたのであった。一方嘘つきのパラドックスについては，階の区分(束縛変項に関する階の区分)だけが問題となる。還元可能性公理を命題にまで拡張すれば影響を受けるだろう。実際 $(\exists p_n)(\cdots)$ という $n+1$ 階の命題は，それと等値な n 階の命題を通して p_n の値となるかもしれないのである。だがここに含まれている命題関数は外延的でない。なぜなら，「私は誤まって p_n を主張する」と「私は誤まって p_{n+1} を主張する」は，仮に p_n と p_{n+1} を外延的に等値なものとしても，p_n と p_{n+1} の表現が異なるため，外延的に等値でない。それ故，後者が前者に還元されることはない。従ってパラドックスの排除はなおも有効である。他のパラドックスについても，このいずれかのし方でパラドックス排除がなされうることは，容易にみてとれるであろう。

c. 前途瞥見——ラムゼイによるタイプ理論の単純化 (Ramsey 1925)

ラッセルのタイプ理論は決してパラドックスの最終的解決ではない。分岐的と言われるようなタイプ区分の錯綜性や還元可能性公理に対する疑念など，欠陥はいろいろ含まれていた。それは真の解決への糸口であるにすぎなかった。

それ故，彼以後もパラドックスを解決せんとするいろいろな理論が打ち出され，現在もなお続いている。しかし，その全体の考察は本稿の域を超えるから，ここでは，ラッセルの弟子で同じく論理主義の立場を採る，ラムゼイによるタイプ理論単純化の試みに簡単に触れ，以って前途瞥見の一助にしたい。

先ずラムゼイは，上記のパラドックスをその性質から二つのグループに分類する。

A　1.　ブラリ・フォルティのパラドックス
　　2.　カントールのパラドックス
　　3.　ラッセルのクラスのパラドックス
　　4.　ラッセルの関係のパラドックス
B　1.　噓つきのパラドックス
　　2.　リシャールのパラドックス
　　3.　ケーニッヒのパラドックス
　　4.　ベリーのパラドックス
　　5.　グレリングのパラドックス

両者を区別するのは，Aグループのパラドックスが，数やクラス，又はメンバー性の演算‘∈’など，数学的対象のみを含むものであるのに対し，Bグループのパラドックスではそれらは中心的な位置を占めず，むしろ，「真」，「偽」，「定義可能性」，「命名可能性」のような意味論的概念が中心をなすからである。前者を数学的（又は集合論的）パラドックスと呼び，後者を意味論的パラドックスと呼ぶことができよう。

数学的パラドックスを解決するには，同一タイプの独立変項を有する関数間の階区分は不要である。あらゆるクラスのクラスが自分自身のメンバーであることや，自分自身のメンバーでないクラスがクラスをなすことなどを禁ずるためには，独立変項とその関数のタイプを区別するだけで十分である。それ故単純化は，同一タイプの独立変項を有する関数間の階区分を廃止するところから始められるだろう。

先ず命題はその表現と明確に区別される。命題はその真理値の可能性に関する同意不同意を表わすもので，“$p . \rightarrow . q$”と“$\sim p . \vee . q$”とは真理値に関して同じ

答を与えるから同一の命題を表示するものとされる。ところが両者の命題表現は異なる。このことは命題関数にもあてはまり，“$\varphi x . \rightarrow . \psi x$” と “$\sim\varphi x . \mathrm{v} . \psi x$” に関しても，「$x$ は人間である」と「x は羽のない二本足の動物である」に関しても同様のことが言える。更にラムゼイは，1927年のラッセルも採用していた，「関数はその値を通じてしか関数中に現れない」という原理を採る。関数 $\varphi\hat{x}$ は命題又は関数中に純粋な関数 $\varphi\hat{x}$ 単独で現れることはなく，常に φx の形を通して現れる。φx はその確定値 $\varphi a, \varphi b, \cdots$ を寄せ集める働きをする。 それ故，$f(\varphi\hat{x}, x)$ における $\varphi\hat{x}$ の現れは，究極的には $\varphi a, \varphi b, \cdots$ を通したものでなければならない。そのような関数の関数は真理関数的なもの以外ではありえない。従ってここでの関数は全て外延的でなければならず，内包的関数は除外されることになる。

これを基にして，先ず個体の関数について考えてみよう。$\varphi a, \varphi b, \cdots$ の如くそれ以上真理関数的に分解しえない命題を原子的 (atomic) 命題といい，それに対応する $\varphi\hat{x}$ や $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ などを原子的関数という。個体の束縛変項を含む個体の関数 $(x) . \varphi(x, \hat{y})$ は，（1927年のラッセルでは確定的関数とはなされていないが）1908年，1910年のラッセルと同じく確定的とする。だが「確定的関数」(predicative function) の意味は変え，個体の確定的関数とは，その独立変項がすべて，有限であれ無限であれ，個体の原子的関数と命題であるような真理関数である，と定義する。そうすると $\varphi\hat{x}$ や $\psi(\hat{x}, \hat{y}) . \mathrm{v} . p$ などが確定的なのは直ぐ分かる。だが $(x) . \psi(x, \hat{y})$ は真理関数になっているだろうか。然りとラムゼイは言う。

$$(x) . \varphi(x, y) : \equiv . \varphi(a, y) . \varphi(b, y) . \varphi(c, y) . \cdots$$

が言いうることは一般に認められている。しかし右辺を左辺の代行とすることはできないとも考えられている。右辺は無限の連言であるから全部書き尽すことはできず，又，無限個体全部に $a, b, c, \cdots$ 等の名前を与えうるとも考えられないからである。しかしそれは表現に関する問題である。右辺を完全に表現できないのは偶然であって，両辺の指す意味，即ち関数はまさに同一だという。それ故論理的対象として扱う限り，$(x) . \varphi(x, y)$ は $\varphi(a, y), \varphi(b, y) \cdots$ の真理関数とみなしてよい，従って確定的関数なのである。そして，確定的関数を以前

と同じく $\varphi!$ や $f!$ などと表記することにしよう。今度は個体及び個体の関数の関数についてみてみよう(外延性公理のため,変項が関数のみであるような関数はない)。それは,$\varphi(x, y, \cdots, a, b, \cdots)$ の如く(個体の独立変項は多くてもよいが)関数の独立変項(φ)がただ一つである場合,原子的といわれる。確定的関数は,その独立変項のすべてが命題であるか,個体の原子的関数であるか,個体の関数の原子的関数であるような真理関数とされる。それは一般的には $f!(\hat{\varphi}\hat{x}, p, x)$ などと表わされるが,その例は,φ を変項とする $\hat{\varphi}a, \hat{\varphi}a . \rightarrow . \hat{\varphi}x : \mathrm{v} . p$, 等である。これは個体の関数の関数の関数等についても同様に進められる。ところで話を個体の関数に戻すと,二階の関数 $(\varphi) . f!(\varphi!\hat{x}, x)$ は確定的か非確定的か,いずれであろうか。$f!$ は確定的故,$\varphi!x$ や φa, φb, …の真理関数であり,$\varphi!$ も確定的故,各 $\varphi_i!\hat{x}$(定項)は x の原子的関数の真理関数であり,結局,$f!(\varphi!\hat{x}, x)$ も x の原子的関数及び命題の真理関数である。$(\varphi) . f!(\varphi!\hat{x}, x)$ はそれらの論理的積であるから,同じく x の原子的関数と命題の真理関数であり,従って x の確定的関数である。かくて,独立変項を除いて,そこに現れる関数が確定的でありさえすれば,ラッセルの意味でいかに高階の関数も確定的関数となる。その結果,例えば $(\varphi) . f!(\varphi!\hat{x}, x)$ において,$(\varphi) . f!(\varphi!\hat{x}, x)$ 自身が $\varphi!\hat{x}$ の一つの値になることが許され,上述の健全な自己言及も完全に認められることになる。それ故,還元可能性公理はもはや不要となったのである。ここで必要なのは,個体(タイプ0),個体の関数(タイプ1),個体の関数の関数(タイプ2)…という単純化されたタイプ区分だけであり,数学には非外延的関数は現れないから,パラドックスの排除はそれで十分なされうるのである。

だが論理・言語一般では,「真」「定義可能性」等の意味論的概念が現れる。つまり,非外延的な関数が現れるから,上のタイプ区分だけでは不十分である。例としてグレリングのパラドックスを見てみる。変項 x は表現(形容詞)を指すものとし,「x は heterological である」を 'Hx' で表わすなら,それは次の如く定義されるだろう。

$$Hx . = . (\exists\varphi) . xR(\varphi!\hat{x}) . \sim\varphi!x \quad \mathrm{Df.}$$

('xRy' は「表現 x は y を意味する」を意味する)

パラドックスは，$H\hat{x}$ を $\varphi!\hat{x}$ の一つの値とみなし，x に表現 ‘H’ を代入した結果，

$H(‘H’).\equiv.\sim H(‘H’)$

から生じる。ラムゼイは，H も確定的関数であるから，それを $\varphi!\hat{x}$ の一つとみなす点に誤まりはないと言う(8)。問題は“‘H’$R(H\hat{x})$”にあると言う。「表現 x は $\varphi\hat{x}$ を意味する」はまさに表現に係わるものである。例えば「理性的動物」と「羽のない二本足の動物」は指示対象が一致しても，内包的意味は異なる。外延的処理はできない。だが意味のし方は同じと見てよい。つまり同じタイプの「意味する$_n$」(R_n) である。さて，「長い」は長さを意味し$_1$ (R_1)，「赤い」は赤さを意味する$_1$とする。‘heterological’ 即ち ‘H’ は，同じ形容詞であっても，「長い」「赤い」等の形容詞の意味する性質の総体性を含む表現であるから，それらとは全く別のし方で性質を意味する。それ故，「意味する$_2$」(R_2) のように区別しなければならない。「長い」が長さを意味する$_1$ようには，‘heterological’ は heterogicality を意味し$_1$ない。即ち，$xR_1(\varphi!\hat{x})$ の x と $\varphi!x$ に ‘H’ と $H\hat{x}$ を代入して ‘H’$R(H\hat{x})$ と言うことはできないのである。

このことは他の意味論的パラドックスにも同様にあてはまる。従って我々は，意味論的パラドックスに備えるため，論理的対象に関係した先のタイプとは異なる，表現に関係する階の区分を行わねばならない。独立変項，つまりタイプと関係なく，束縛変項を全く含まない関数を0階の関数とし，個体の束縛変項のみを含む関数を一階，そして高々 $n-1$ タイプの変項を束縛変項として含む関数を n 階と呼ぶことにする。ラッセルの場合と異なり，タイプと階ははっきり異なる序列を表わすものとなり，数学の領域ではタイプのみによって数学的対象を区分し，意味論の領域では階を用いて表現の階層区分をする。この意味でラムゼイはタイプ理論の整理・単純化をなしたのである。

ラムゼイによって，パラドックスに二つのタイプのあること，そして各々の解決に異なるアプローチのあることが示された上は，たとえ彼の理論にいろいろな観点から疑問が投げかけられたとしても，それ以後のパラドックスへの取り組みに明確な方向付けがなされたと言ってよい。そのため，数学的パラドッ

クスに関しては，時代は逆になるが，大きすぎるクラスを生じさせないような集合論の公理体系を構築しようとする，集合論だけに限ったツェルメロやフォン・ノイマンの試みも正当化されることになり，又ラムゼイと同じく，タイプ理論を単純化してしかも公理化しようとするチャーチなどの試みも，相対的な階層化原理の導入で済まそうとするクワインの試みも正当化されることになった。他方意味論的パラドックスに関しては，ラッセルですでに示唆され，ラムゼイが明示化した意味論的概念の階層化が，タルスキーによって多くの人の受け入れるようになるまで明確化され，理由も示された。真の解決の模索はそれらに安住せず，いろいろの角度から検討がなされたし，今もなされている。それらはパラドックスの現象をより明確に説明しようとする仮説の群である。それらは説明の優美さや力強さの評価を受け，新しいものに乗り超えられていく。論理学の分野における仮説一験証の好個のモデルとみることもできよう。

＜註＞

(1) 本稿ではRussellにならって，連言及び式区分のため括点を用いる。括点の使用法については Russell 1910 を参照されたい。(但し，量記号に関する括点は省略することもある)。

(2) 直後に見られるように，Zermelo による任意のクラスの整列可能性の証明と関連しているため，Zermelo-König のパラドックスと呼ばれることが多い。

(3) Nameability という概念は，名前の概念の曖昧さに応じて曖昧である。Russell は "the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables" を 111, 777 (その名前は18音節) としているが，これは "the least integer……" 以外のもっと少ない音節の名前によって命名することもできそうである。例えば今治市の人口が 111,777人だと仮定すると，"the number of the population of Imabari" は 111,777 の別名となる。"the least integer…" を用いずとも19音節未満で命名されていたのである。名前と音節数，又本文のように名前と字数の関係は非常に曖昧である。しかし，「『一般教育研究』第17号にその名前（どんな名前であってもよい）が現れない最小の数」という名前を用いれば，Berry のものと同タイプの，しかしより明確なパラドックスの生じることを，容易に確かめうるであろう。

(4) なおこのパラドックスは誤まって「Weyl のパラドックス」と呼ばれることもある。

(5) 上記のものを中心としたパラドックスの枚挙は，Russell 1908, Russell 1910, Beth 1959, Kneale 1962, Kleene 1952, Mackie 1962, Quine 1961 などに見られる。

(6) Russell は 1927年には $\varphi\hat{x}$ 等を elementary function, $(x).\psi(x, y)$ 等を first-order function と呼び区別しているが，その区別はパラドックスに関する彼の議論に本質的な影響は及ぼさない。

(7) Russell は「真」「偽」の階区分による解決も示している（Russell 1910, p. 62)。「偽」は命題に帰せられる性質であるが，その命題の階に応じて「偽」の階も異なる。それ故，パラドックス命題中で言及されている命題が n 階であるなら，それは n 階の偽であると主張されているのである。当の命題は $n+1$ 階であるから n 階の「偽」が帰せられることはない，と言う。しかし「真」「偽」の階層化は Russell では未だ十分に分析されているとは言い難く，後の Tarski を待たねばならない。

(8) 筆者は 'Hx' を predicative とする Ramsey の見解には疑問を禁じ得ない。問題は $xR(\varphi\hat{x})$ にある。先の説明に従えば，Hx が predicative であるためには，atomic function $\varphi\hat{x}$ は，各 $\varphi_i x(\varphi a, \varphi b, \cdots)$ の値を通して真理関数の独立変項をなすものでなければならないはずである。しかし R が非外延的であるため，それは妨げられる。もっとも，φ に値を代入した $xR(\varphi\hat{x})$，例えば「x は短かさを意味する」を原子的とみなすなら別であるが，それは不自然な解釈のように思われる。筆者には，$xR(\varphi\hat{x})$ の現れる文脈を opaque であるとし，代入不可能性を言う方が正しいと思われる。

Bibliography

Beth (E. W.) 1959　*The Foundations of Mathematics* (North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1968)

Burali-Forti (C.) 1897　"A Question on Transfinite Numbers and On Well-Ordered Classes", *From Frege to Gödel*, ed. by J. van Heijenoort (Harvard U. P., Cambridge, Massachusetts, 1967)

Cantor (G.) 1899　"Letter to Dedekind", *From Frege to Gödel*, op. cit.

Carnap (R.) 1937　*The Logical Syntax of Language* (Routledge and Kegan Paul, London, 1956)

Church (A.) 1940　"A Formulation of the Simplified Theory of Types", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 5 (1940), pp. 56–68

1951　*Introduction to Mathematical Logic I* (Oxford U. P., London, 1956)

Frege (G.) 1893　*Grundgesetze der Arithmetik Bd. I* (Olms, Heidescheim, 1966)

1903　*Grundgesetze der Arithmetik Bd. II* (Olms, Heidescheim, 1966)

Greillng (K.) and Nelson 1908
"Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti", *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, 2 (1907–1908), pp. 300–334 (未見)

Kleene (S. C.) 1952　*Introduction to Metamathematics* (North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, 1967)

Kneale (W. & M.) 1962　*The Development of Logic* (Clarenton Pr., Oxford, 1962)

König (J.) 1905 "On the Foundation of Logic and Arithmetic", *From Frege to Gödel*, op. cit.

Mackie (J.L.) 1973 *Truth, Probability and Paradox* (Oxford U. P., Oxford, 1973)

Poincaré (H.) 1905 "Les Mathematiques et la Logique", *Revue de Metaphysique et de Morale*, 1905, pp. 815-33

1906 "Les Mathematiques et la Logique, *ibid*, 1906, pp. 18-34, pp. 294-314 (吉田洋一訳「科学と方法」岩波文庫. 1967, 所載)

Prior (A.N.) 1962 "Some Problems of Self-Reference in John Buridan", *Studies in Philosophy*, ed. by J. N. Findlay (Oxford U.P., London, 1966)

Quine (W.V.) 1937 "New Foundations for Mathematical Logic", *From a Logical Point of View* (Harper & Row, New York, 1963)

1951 *Mathematical Logic*, *r.e.* (Harvard U. P., Cambridge, 1965)

1961 "The Way of Paradox", *The Way of Paradox and Other Essays*, (A Random House, New York, 1966)

1963 *Set Theory and Its Logic* (Harvard U. P., Cambridge, 1969) (大出晁・藤村龍雄訳「集合論とその論理」岩波, 1968)

Ramsey (F.P.) 1925 "The Foundation of Mathematics", *The Foundation of Mathematics and Other Logical Essays* (Routledge and Kegan Paul, London, 1965)

Richard (J.) 1905 "The Principles of Mathematics and the Problem of Sets", *From Frege to Gödel*, op. cit.

Russell (B.) 1902 "Letter to Frege",*From Frege to Gödel*, op. cit.

1903 *The Principles of Mathematics* (George Allen & Unwin, London, 1964)

1905 "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", *Proceedings of the London Mathematical Society, 2nd series*, 4(1907), pp. 29-53

1908 "Mathematical Logic as based on the Theory of Types", *From Frege to Gödel*, op .cit.

Russell and A. Whitehead 1910

"Introduction", *Principia Mathematica, lst.ed.*

1927 *Principia Mathematica, 2nd.ed.* (Cambridge U.P., London, 1968)

Tarski (A.) 1933 "The Concept of Truth in Formalized Languages", *Logic, Semantics, Metamathematics* (Clarenton Pr. Oxford, 1969)

von Neumann (J.) 1925 "An Axiomatization of Set Theory", *From Frege to Gödel*, op. cit.

Zermelo (E.) 1904 "Proof that every set can be well-ordered", *ibid.*

1908 "A new Proof of the Possibility of a Well-Ordering", *ibid.*

1908a "Investigations in the Foundations of Set-Theory", *ibid.*