

所与の課題を解決し，そこから探究・発展させる図形学習 －レポート学習の活用を通して－

風間喜美江・杉本紘野*

760-8522 高松市幸町1-1 香川大学教育学部

*760-8522 高松市幸町1-1 香川大学大学院教育学研究科

Geometric learning that students solve given problems, and, explore and develop their ideas through utilizing it － by using “report learning” －

Kimie KAZAMA and Hirono SUGIMOTO*

Faculty of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522, Japan

** Graduate School of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522, Japan*

1. 問題の所在と研究のねらい

中学校数学で，学習の困難性を示す内容として図形，特に証明をあげる生徒は多い。生徒の実態については，様々な指摘がされている。

- ・命題の仮定と結論を分けることができない
- ・証明がかけない
- ・結論を使って証明をしてしまう
- ・命題から具体的な内容がイメージできない
- ・命題に関する図がかけない
- ・証明と聞くだけで，考えようとならない

など，枚挙にいとまがない。

中2で指導する図形の証明は，生徒が持っている論理的思考力を意識させ，その力を養うこと

が指導の大きなねらいであると筆者らは考える。生徒の学習の困難性は、教師の指導の確立に依存するところが大きい。指導に関して次の問題点（風間，2000）があげられる。

ア．図形の性質を発見するのに有効である実験実測の学習方法とのつながりを持たせようとしない教師の姿勢

イ．教科書の「証明せよ」の問いかけに、すぐに入ろうとする記述中心の証明指導

ウ．生徒にとってはまだ具体的な図の段階であるのに、教師は一般的な概念である図形について説明しようとしているという乖離

エ．局所的なできあがりつつある生徒の論理的な思考力を感じ取り、その成長を待つことができずに、「生徒には難しすぎる」と速断してしまう。

この問題点の多くは、学習指導要領に書かれているからとか、教科書にこう記述されているからというレベルでの教師の捉え方からくるものと筆者らは考える。教師は、図形領域で「生徒にどんな力をつけさせることをめざすのか」を考えてみるのが重要である。

本研究では、中学校図形で論理的な思考力の育成をめざし、特にイ、エに着目し、この問題に関する指導の改善を考察することにする。

イに関しては、教科書は学習指導要領に縛られているのと同時により戻しができない本のつくり方であることを、教師は問題視することが重要である。より戻しとは、例えば「証明のしくみ」や「証明のすすめ方」と名付けられる単元以降では、教科書では「証明」という図形の学習方法だけを扱うが、指導ではその方法だけでなく、

- ・「証明せよ」に縛られる授業ではなく、「なぜだろう」「おや」といった疑問や発見から証明に至る課題の解決を通して行う
- ・記述中心の形式的な証明にとらわれずに、生徒自らが考えたこと（その考えが小学校の図形の実験実測の段階であっても）を、まず自分の言葉で表現し、徐々に他者（グループやクラスの人、教師）を意識する

など、生徒の多様な学習段階を鑑み、いきつ戻りつしながら展開する学習活動である。

エに関しては、教師は教科書にあるような証明を書かせることに目がいき、教科書以外の表現や思考の段階を汲み取る意識の不足、さらに教科書の証明表現に関連した思考に集中した指導の偏りが考えられる。生徒の「つぶやき」から多少であっても論理的な思考力を汲み取ること、「説明」の段階を大切にすること、素朴な表現から「説明表現」そして「証明」へと、緩やかな思考段階・表現段階を考え、徐々にそれらを育てることが見落とされがちである。

そこで本研究は、上記イ、エの指導に対する改善を意図し、

生徒自らが考える図形の証明に関する課題を考察し、生徒の視点に応じて課題を探究・発展させる証明を中心とする図形学習について、実証的に検討することをねらいとする。

以下、このねらいについて、研究授業等を踏まえながら実証的に考察を行う。

2. 証明に関する課題を発展的に探究させる図形学習

(1) 先行研究からの示唆

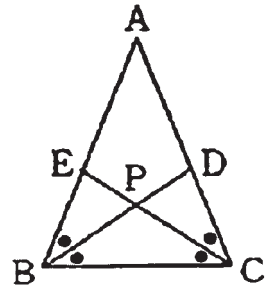
図形の証明を発展的に考察させる指導方法の研究で，小野（小野，2008）は，代表的な次の2つの指導法を取り上げ考察している。

ア. 「問題づくり」を通して発展的に考察させる指導方法

イ. 根拠をもとに発展的に考察させる指導方法

アは，問題を与え，その一部を変えて似た問題をつくることから，問題の構成要素や結論を類似なものや一般的なものに置き換え発展させる指導方法（橋本・坂井，1983）である。イは，書いた証明の中に使われない要素に着目し，それらを変更しても結論に影響がないという条件のもとに，新しい知識を得たり，命題をつくらせる指導方法（杉山，1975）である。小野は，証明の初期の段階で実現できれば，生徒は証明をすることの意義も理解できるとして，後者イの指導方法を取り研究授業を通して実証的に検討・考察している。その指導例として，次の課題を与え，生徒の反応を分析している。

[課題] 二等辺三角形ABCに，右図のように底角の二等分線をひくと $BD = CE$ になる。これ以外に $BD = CE$ となるような線のひき方を考えよう。



この課題は「証明の中に使わない要素へ変更して課題を発展させる」ものである。この課題を使う指導の前には， $BD = CE$ の証明をし，点D，Eの取り方を扱い，この課題と学習展開に至っている。その成果として，多様な生徒の反応があり，「結論に影響を与えなければ，仮定を変更しても構わない」と生徒が考え，発展的に考察することができたという報告がなされている。

(2) 本研究の教材に対する基本的な考え

(1) のア，イの先行研究の共通点は，核なる課題を与えて，発展的な命題をつくらせていることである。発展の基となる課題は与えるものの，発展の考えはアは命題自身の発展，イは構成要素の関係の発展である。本研究のねらいである，「課題解決を通して証明を考察すること」「生徒の視点に応じた発展をすること」から考えれば，どちらの指導方法にも着目できる。また，どちらも命題の仮定を変えていく発展と捉えることもできる。そこで，次の指導の方針をとることにする。

- 多様な視点や結論がだせる核となる課題を与える。
- 核となる課題の仮定の一部を変えて，生徒の視点に応じて拡げて考えられる。
- 探究・発展を通して，生徒の多様な表現活動ができる工夫をする。

1で述べた教師の指導の問題点

- ・イ. 教科書の「証明せよ」の問いかけに、すぐに入ろうとする記述中心の証明指導,
- ・エ. 局所的なできあがりつつある生徒の論理的な思考力を感じ取り、その成長を待つことができずに、「生徒には難しすぎる」と速断してしまう。

は、「学び」の本質から離れているものである。本来の「学び」というものは、混沌とした創造的な活動の中から、「問い」を発することから始まるのではないだろうか。創造的な思考は、放っておくだけで育つことは難しいであろう。であるが、スモールステップによる過剰な誘導的な指導は「学び」の芽を摘み取ることにもなる。筆者らは、生徒の「学び」の萌芽は、適度な難易度をもった課題の提示、その探究・発展させる指導の仕方が重要であると考え。上記 a, b, cは、高次な「学び」への過程として必要な指導であると考えた。

cについては、香川大学附属坂出中学校との共同研究（風間・大前他3名，2014）での、「数学を学ぶ意味を実感させるための教師のかかわりのあり方」や「レポート学習の活用」の研究を通してその可能性の研究を進めてきた。その考察からレポートを書く活動はcに関して有効であると判断できた。以下では、上記指導方針をもとに、研究授業およびレポートを書く活動（以後これをレポート学習と呼ぶ）を紹介し、その妥当性を述べる。

3. 指導内容と構成、核となる課題と設定

(1) 研究計画

本研究は、中2図形「平行線の性質」「三角形の合同」後の「平行四辺形、いろいろな四角形」の指導研究の一環として行われたものである。そのため、証明初期の指導「平行線の性質」「三角形の合同」ではなく、その後の指導の中で実施する研究とした。「三角形の合同」と「いろいろな四角形」を橋渡しする、つまりその2つの内容の「のりしろ」のような学習の中で、与えられた課題を解決する学習、それを探究・発展させる学習の考察と授業実施・レポート学習を計画するものである。

(2) 指導計画

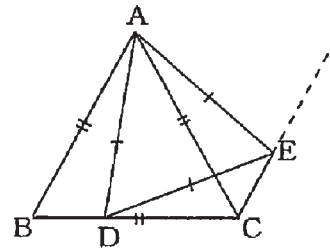
- | | |
|--------------------------------------|-----------------|
| ① 2つの正三角形（復習、条件にあった図、図形を動的に捉える） | 2時間（本時） |
| ② 生徒が①の課題の仮定を変え解決するレポート課題 | （冬休みの課題・レポート学習） |
| ③ 平行四辺形の性質 | 2時間 |
| ④ 平行四辺形の性質の利用 | 1時間 |
| ⑤ 平行四辺形になるための条件（定理とその逆、辺と角の条件を組み合わせ） | 3時間 |
| ⑥ いろいろな四角形（三角形の中に現れる平行四辺形） | 2時間 |
| ⑦ 三角形・四角形の中心（中点連結定理・はと目返し） | 2時間 |
| ⑧ いろいろな四角形の応用の課題レポート | （⑦指導後の課題） |
| | 計 12時間 |

[注] ①は教師だけが、⑥は教師と生徒がタブレット端末を使った授業である。

(3) 本研究の核となる課題とその改題

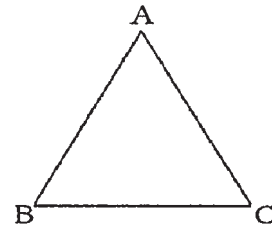
原題（相馬，2013）は，

「右の図のように，正三角形ABCの辺BC上に点Dをとる。点AとDを結び，線分ADを一辺とする正三角形ADEをつくる。∠ACE = 60° となることを証明せよ」である。



これを改題し，次の課題とした。

正三角形ABCの辺BC上に点Dをとる。点AとDを結び，線分ADを一辺とする正三角形ADEをつくる。点Dが，辺BC上をBからCまで動くとき，できる図の中にどのような図形の性質がひそんでいるだろうか。



改題のねらいは，次の通りである。

- ・文章を読み取りをその条件を意識させ，それを表すことで理解させる。また，条件にあてはまる図は無数にあることを気づかせる。
- ・点Dは辺BC上の任意の点であることを意識させる。
- ・生徒の視点から変数的な図形の要素と定数的な図形の要素を見出させ，生徒の視点で結論を見出させる。

このことから，教科書に出てくる図は添え図であったり，命題の文章だけに束縛され限定された図であったりすることを意識させる学習の機会を与える工夫をしている。教科書やその指導書には，図形の図は添え図である場合，条件の一部である場合などの記述はなく，その取り扱いによって繊細な問題を含んでいることまで記述されているとはいえない（風間，2012）。例えば，

「右の図で，平行四辺形ABCDの対角線BDに頂点A，Cからひいた垂線をそれぞれAE，CFとする。四角形AECFが平行四辺形であることを証明せよ」

と書かれていれば，右の図に限定された証明課題であるが，「右の図」という表現がなければ，右下がりの形をした平行四辺形ABCDも想定している。また，右上がりの形をした平行四辺形ABCDであっても，いろいろな辺の長さの平行四辺形ABCDが存在し，点E，Fの位置は逆になり，点Eは頂点Dに，点Fは頂点Bに近い位置となる場合も存在するのである。図1が命題の添え図であれば，図1を使った証明の内容が，他の同じ仮定の図（例えば右下がりの形をした平行四辺形ABCD）にも成り立つことまでいえないければ，それは一般的な証明とはいえない。生徒は，そのことが理解できたとき，命題と証明の関係が理解できたといえるのである。その意味からすれば，改題し

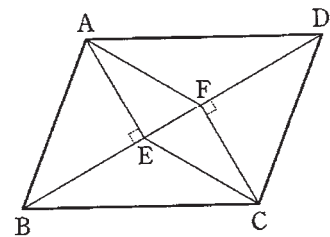


図1 命題の図

た課題からは、同じ仮定であっても無数の図がかけること、その証明に関しても、課題から見つけた図形の諸性質が、どの図にもあてはまるかどうかを考えることを通して、証明の理解に繋がるのである。

4. 授業の実際

(1) 授業実施・対象

- ① 指導計画実施時期：平成25年12月中旬～平成26年2月上旬
- ② 指導計画第1, 2時の指導時期：平成25年12月中旬
- ③ 指導対象：国立大学附属中学校第2学年3クラス（3の調査対象と同じクラス）
- ④ 指導者：風間喜美江（筆者）

(2) 指導計画第1, 2時の授業の実際

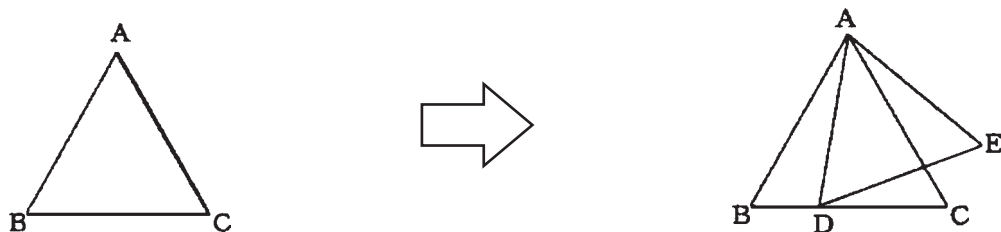
○ねらい

- ・三角形の1辺上の任意の点を動かし、その点をもとにしてできる図形の中にある共通の特性、関係性を見いだすことができる。
- ・図形の特性や関係性から合同な三角形を見だし、調べたいことを証明することができる。

○授業の実際

以下、ア、イ・・・は生徒の反応。※は指導の留意点。

- 1) 課題（p.65参照）を提示し、条件にあう図をかく。



※△ADEはコンパス・定規を使って作図させる。作図させることで仮定をつかませる。図に、3辺が等しいという意味の記号を入れさせた。

※点Eが1)の右の図のようにC側にある場合と、B側にある場合の両方ある。今回はC側にある場合を扱うことにすることを伝えた。

- 2) 図に潜んでいる図形の性質を予想する（個人・クラス）。

- ア $\angle ABD = 60^\circ$
- イ $AB = BC = CA$
- ウ $\angle BAD = \angle CAE$
- エ $\angle EDC = \angle BAD$

所与の課題を解決し、そこから探究・発展させる図形学習

オ $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$

カ $BD = CE$

キ 正三角形ADEの面積がだんだん小さくなり、点DがBCの中点を過ぎたら、また大きくなっていく。

3) 図を動かして、潜んでいる図形の性質を発見する(グループ)。

タブレット端末を活用し、図を動かす。

ア~キ 2)と同じ

ク 点Eが直線上を動いている。

ケ $\angle ACE = 60^\circ$

コ $\angle BCE = 120^\circ$

サ $AB \parallel EC$

シ 辺BCの延長上に点Fをとると、いつも $\angle ECF$ は60度となるように、点Eは動いている。

4) 3)で発見したことについて、正しいかどうかを吟味する。

正しいと判断できれば○, 正しいとはいえないと判断すれば×を書き込む。

5) 「点Dが辺BCのどこにあっても、いつでも① $\angle BAD = \angle CAE$ ② $AB \parallel EC$ になる」といえるだろうか、について考える。

・同じ条件のいろいろな図で確認する。

・教師のタブレット端末を使って確認する。

・図2を示し説明する。

①は 60° どうしたから $\angle BAD = \angle CAE$, ②四角形ABCEは平行四边形だから, $AB \parallel EC$ 。

・図3を示し説明する。

① $\triangle ABC, \triangle ADE$ は正三角形だから $\angle BAC = \angle DAE = 60^\circ$

$\angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$ だから $\angle BAD = \angle CAE$

②点DがCと重なるときを考える。 $\angle BAC = \angle ACE = 60^\circ$ で錯角が等しいから $AB \parallel EC$ 。

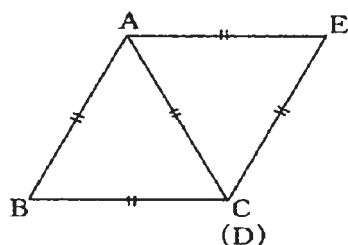


図2 平行四辺形ABCE

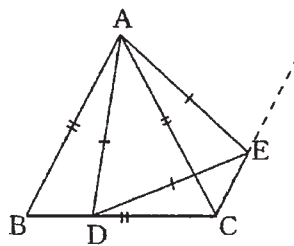


図3 図2以外の場合

6) 点Dは辺BC上にあったが、その条件を変えたら①, ②は成り立つか、を考える。

- ・例えば、点Dが辺AC上にあった場合について考える。
- ・例えば、点Dが辺ACの延長上にあった場合について考える。

(3) 授業の考察

① 生徒はどのように核となる課題を捉えようとしたか。

- ・課題の条件を読み取るとは生徒にとって容易ではない。(2)の1)の段階で条件にあった図がかけた生徒は3分の2であり、授業の導入時に条件を読み取ることができたかどうかの把握は指導に有効であった。文章から図をつくることは、命題への意識の第一歩であると判断できた。
- ・授業の導入では、図をかかせることと同時にタブレット端末を使い、課題の条件と図を動的に捉える工夫〔註〕をした。タブレット端末から教室内の大モニターを通して現れる図の一部が、生徒自らがかけた図と一致し、さらに動的に課題を把握することができた。また、この動的な把握の時点で、数名の生徒は点Dが辺BC上以外の所にある場合も予想していた。
- ・課題はオープンな問いかけである。そこから図形の性質を把握するには時間がかかった。しかし、後の展開、つまり、(2)の5)のことを考えること、説明することに繋がる重要な活動であると判断できた。

② 生徒はどのように考えて、所与の課題を説明しようとしたのか。

- ・(2)の5)「点Dが辺BCのどこにあっても、いつでも① $\angle BAD = \angle CAE$ ② $AB \parallel EC$ になる」ことの説明は、授業の初めから与えた課題ではない。筆者らは「証明せよ」と「説明せよ」は同じ意味で使うことにする。この授業と、「証明せよ」で始まる授業とは導入、展開の仕方が大きく異なると判断できる。(2)の1)～4)の活動があるから、生徒は自然にこの課題を受け止めて考えた。図に現れる見た目の判断で「① $\angle BAD = \angle CAE$ ② $AB \parallel EC$ であること」に留まることでは満足せず、「どうしてだろう」と自らが問いを發し、納得のいく理由を説明による方法で行う、高次の判断や学習を生徒自らが選ぶことも中学生の特徴といえよう。
- ・説明は特殊(図2参照)から考える生徒が多かった。図を通して説明すること、既習事項の活用を意識させるような支援を行った。早めに説明できた生徒が、座席が近い生徒へ説明するという風景も見られ、図3に関する説明とその理解に至ったと判断できた。

この所与の課題は一般的には難しいといわれており、原題(p.65参照)では $\angle ACE = 60^\circ$ となることだけを証明させている。本授業では、角度ではない幾何的な性質「① $\angle BAD = \angle CAE$ ② $AB \parallel EC$ 」を取り上げており、一見、より難しくなったと思われるだろう。であるが、生徒が予想した①が②のヒントにもなるような取り上げ方をし、生徒はその課題を理解し取り組んでいた。1で述べた教師の考え方『エ. 局所的なできあがりつつある生徒の論理的な思考力を感じ取り、その成長を待つことができずに、「生徒には難しすぎる」と速断してしまう。』ことに対する改善として、本授業は指導の仕方、課題の開発の具体的な提案となると考えた。

5. レポート学習の実際

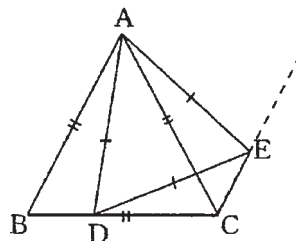
(1) レポート学習の実施

4の授業直後、次のように課題を提示しレポート学習を行った。冬休み中に取り組む課題として示した。

[点Dの探検レポート]

授業で次の問題について考え、①、②が成り立つことを説明することができました。

[問題] 正三角形ABCの辺BC上に点Dをとる。点AとDを結び、線分ADを一辺とする正三角形ADEをつくる。点Dが、辺BC上のどこにあっても①、②がいつでも成り立つことを説明しよう。
① $\angle BAD = \angle CAE$ ② $AB \parallel EC$



これは「点Dは辺BCにあり、しかも点EはADの右側にある場合」のみの説明でした。

点Dや点Eについてこの条件から一歩踏み出す、つまり

- ・正三角形ABC
- ・点AとDを結び、線分ADを一辺とする正三角形ADE

という条件は変えないで、

例えば「点DはAC上にあり、点EはADの左側」のような、「点Dのいる位置の条件を変えること」

や

「点EはADの左側か右側かを選ぶこと」

によって、問題の①、②が成り立つかどうかを判断し、その理由を説明しましょう。

説明には次のことをポイントとしましょう。

ア) 図を使って表すことを大切にしましょう。

イ) 本格的な証明の形式ではなく、クラスの人たちにわかるような言葉を使い説明をする。

ウ) 上記 [問題] ①②の説明の内容と同じか違うかどうかという視点も入れる。

エ) 点Dはいろいろな所に出掛けていき、そのとき周囲の状況が変わっていきと考えてください。その状況が変化したとき「① $\angle BAD = \angle CAE$ ② $AB \parallel EC$ 」が成り立つかどうかの説明をしてください。

この説明は、言ってみれば点Dがいろいろな所に行く「点Dの探検レポート」です。あなたが点Dになったつもりで、その探検レポートを作成してください。

(2) 生徒のレポート例

- A生徒 -

点Dは辺BCにあり、点EはADの左側にありある場合

点Dは辺BCを直線とし、Bの方向延長上にあり、しかも点Eは辺ADの左側にありある場合を考えてみる

① $\angle BAD = \angle CAE$ について \rightarrow 成り立たない

理由、 $\left. \begin{matrix} \triangle ABC \\ \triangle AED \end{matrix} \right\}$ は正三角形なので、1つの角が 60° である、

$$\angle BAD = 60^\circ - \angle EAB \quad \angle CAE = 60^\circ + \angle EAB$$

$\triangle AED$ $\triangle ABC$

よって $\angle BAD$ と $\angle CAE$ は $\angle EAB$ 2個分の角の大きさの差がある

よって $\angle BAD$ と $\angle CAE$ の角の大きさの差は $\angle EAB$ 2個分というわけがわかった

② $AB \parallel EC$ について \rightarrow 成り立たない

理由、図に表してみると辺ABと辺ECは交わっているのだから、平行とはいえない。

① $\angle BAD$ と $\angle CAE$ の角の大きさの差は $\angle EAB$ 2個分、成り立たない

② 辺ABと辺ECは交わるのだから、平行に成り立たない、成り立たない

コード
氏名 XXXXXXXXXX

- B生徒 -

点Dが辺BCの延長線上にあるとき、① $\angle BAD = \angle CAE$ ② $AB \parallel EC$ は成り立つのか？

↑ 点Dは辺BCを直線としその延長上であり、点EはADの右側の位置にある場合

D→Bの側
E→右側

① $\angle BAD = \angle CAE$
 $\angle BAD = 60^\circ - \angle DAE - \angle BAE$
 $\angle CAE = 60^\circ - \angle CAE - \angle BAE$
 $\therefore \angle BAD = \angle CAE$
 ↓
 成り立つ

② $AB \parallel EC$
 平行線と横断線の交角は等しい
 $\therefore \angle BAE = \angle CAD$
 $\angle BAE = 60^\circ - \angle EAC$
 $\angle CAD = 60^\circ - \angle EAC$
 $\therefore \angle BAE = \angle CAD$
 ↓
 成り立つ

③ $AB \parallel EC$
 $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ は全等
 仮定の $AB = AC$
 $AD = AE$
 ①より $\angle BAD = \angle CAE$
 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$
 $\triangle ABC$ は正三角形だから $\angle ABD = \angle ACE = 60^\circ$
 ①より $\angle BAC = \angle ACE = 60^\circ \Rightarrow$ 成り立つ
 全角が等しいから $AB \parallel EC$

D→Bの側
E→右側

① $\angle BAD = \angle CAE$
 $\angle BAD = 60^\circ - \angle CAE - \angle CAD$
 $\angle CAE = 60^\circ - \angle DAE - \angle CAD$
 $\therefore \angle BAD = \angle CAE$
 ↓
 成り立つ

② $AB \parallel EC$
 平行線と横断線の交角は等しい
 $\therefore \angle BAE = \angle CAD$
 $\angle BAE = 60^\circ - \angle EAC$
 $\angle CAD = 60^\circ - \angle EAC$
 $\therefore \angle BAE = \angle CAD$
 ↓
 成り立つ

③ $AB \parallel EC$
 $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ は全等
 仮定の $AB = AC$
 $AD = AE$
 ①より $\angle BAD = \angle CAE$
 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから
 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$
 対応する角が等しいから
 $\angle ABD = \angle ACE = 60^\circ$
 $\triangle ABC$ は正三角形だから $\angle ABC = \angle BAC = 60^\circ$
 ①より $\angle BAC = \angle ACE = 60^\circ$
 全角が等しいから $AB \parallel EC$

点Dが辺BCの延長線上にある場合、① $\angle BAD = \angle CAE$ 、② $AB \parallel EC$ は成り立つのは、点EがADの右側にあるとき！
 点EがADの左側にあるときは①、②どちらも成り立たない。

コード _____ 氏名 _____

- 71 -

(3) レポート学習の生徒の反応－仮定をどのように変更し考察したか－

生徒のレポートから、主に次の4通りの考え方が見られた。以下の場合にはそれぞれの点Dのとり方に対して、点Eを線分ADの右側、左側にとる2通りの場合を含むものとする。以下、①は $\angle BAD = \angle CAE$ 、②は $AB \parallel EC$ を指すとす。

1) 線分BC上に点Dをとる。

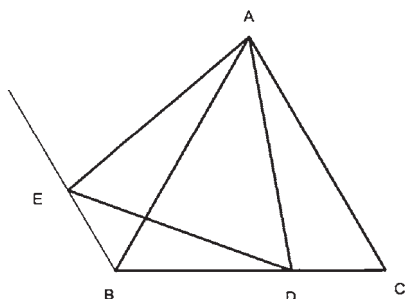


図4 例1) - 1

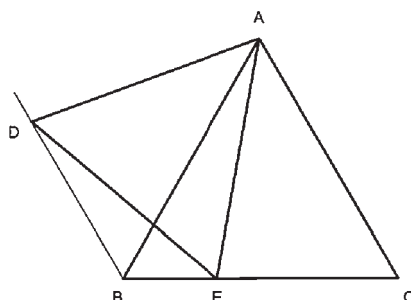


図5 例1) - 2

これは、授業で扱った線分BC上に点Dをとるという仮定をそのままにし、点Eを線分ADの左側にとる場合である。約2割の生徒がこの場合を考えていた。

①については、図から明らかに成り立たないとしている生徒がほとんどであった。角を他の角度の加法、減法で表し、 60° よりも大きいのか小さいかで判断している生徒も見られた。

②については、線分ABと線分ECは必ず交わるので成り立たないとした生徒がほとんどであった。一方で、①と②は成り立たないが、 $\angle CAD = \angle BAE$ 、 $AC \parallel EB$ が成り立つことを同様に証明した生徒や、点Dと点Eを入れ替えれば(図5)、①が成り立つことを証明した生徒もいた。

2) 線分BCのB側またはC側を延長し、その上に点Dをとる。

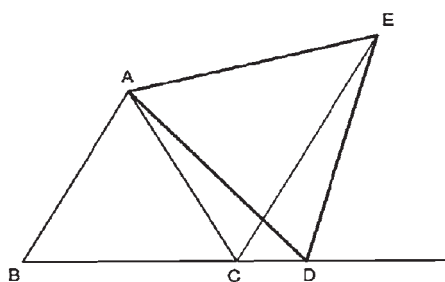


図6 例2) - 1

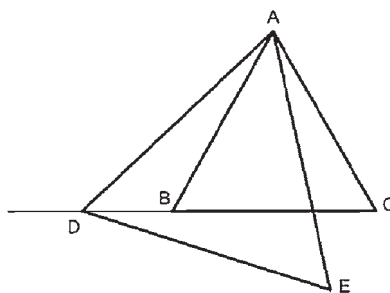


図7 例2) - 2

所与の課題を解決し，そこから探究・発展させる図形学習

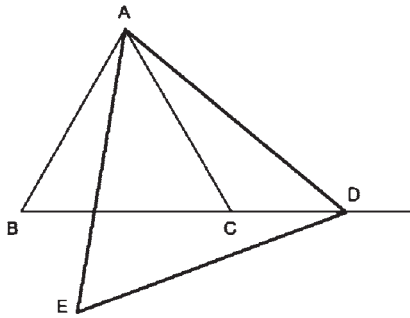


図8 例2) - 3

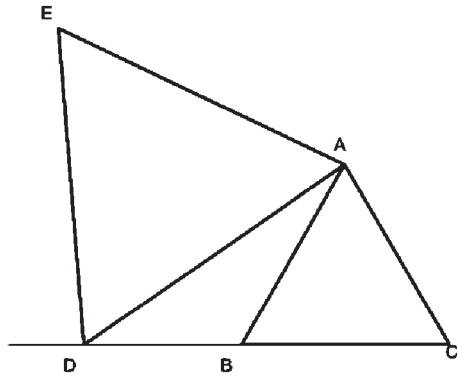


図9 例2) - 4

この場合を考えた生徒が最も多く，約5割の生徒が考察していた。図6と図8は線分BCをC側に延長した上に点Dをとり，点Eを線分ADの左右にとったものであり，図7と図9は線分BCをB側に延長した上に点Dをとり，点Eを線分ADの左にとったものである。

図6，図7の①については， $\angle BAD$ と $\angle CAE$ を 60° に同じ角をたしたもの，ひいたもので表すことで等しいことを説明していた。②については， $\triangle ABD$ と $\triangle ACE$ の合同を用いて，錯角，同位角が等しいことを示し， $AB \parallel EC$ を導いていた。

図8，図9については①，②は成り立たず4つの場合を調べた生徒で，「①と②が成り立つのは点Eが線分ADの右側にあるとき」と結論づけている生徒もいた。

3) 線分AC，AB上に点Dをとる。

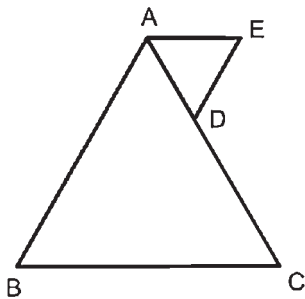


図10 例3) - 1

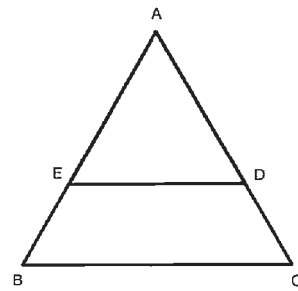


図11 例3) - 2

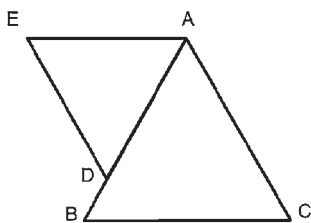


図12 例3) - 3

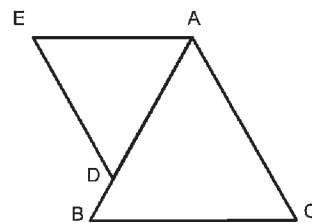


図13 例3) - 4

線分AC上に点をとった生徒が約3割，線分AB上に点をとった生徒が約1割であった。

①について， $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ が正三角形であることから，ほとんどの生徒が説明できていた。図11，図13にあたっては，角度が 0° だから成り立つとした生徒と，角度が存在しないので成り立たないとした生徒が見られた。

②については，作図をした図の見た目から明らかに成り立たないとする生徒と，錯角が一致しないことを示していた生徒が見られた。

4) 任意の位置に点Dをとる。

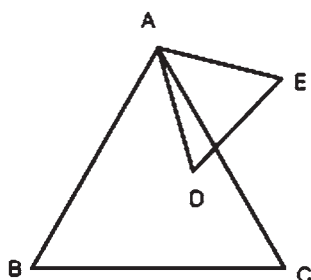


図14 例4) - 1

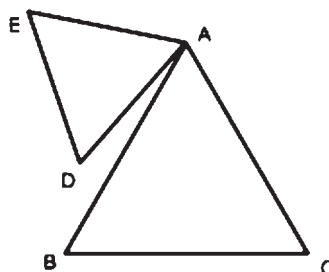


図15 例4) - 2

数人の生徒がこの場合をあげ，考察していた。点Dの位置を三角形ABCの内部，外部に場合分けし，さらに点Eの位置が線分ADの右側，左側で計4つの場合分けを行っていた。①②それぞれの説明は，授業で行った証明を応用して行っていた。各場合の説明の後，「①は点EがADの右側にある場合しか成り立たない」とまとめていた。

また，ほとんどの生徒が仮定を変えたときに①②が成り立つかを調べていた一方で，②が成り立つような点Eの条件を考えている生徒も見られた。この生徒は任意の位置にある点Dを調べる中で，『ABに平行な線を点Cを通るようにひく。その線の上に点(E)がくれば，ABと平行になる』という考察に至っていた。

(4) レポート学習の考察

生徒のレポートから，次の①～③について考察することができる。

① 具体的ななかかれた図を考察の対象として，他の図でもその考察が成り立つかどうかを考えられたか。

ほとんどのレポートにおいて図と説明が合わせてかかれており，図に色を付けるなどしてわかりやすい工夫を凝らしたものになっていた。

また，1つの場合から他の場合を類推している生徒が見られた。例えば(3)の3)の場合，AC上に点Dをとった場合を考えた上で，AB上に点Dをとる場合は図が左右逆になるので同じ結果になると，対称性から類推していた。「(点の位置が)逆なだけなので成り立つ」「対称性がかえる」「対称移動しても角度や長さは変わらない」「右側ができたなら左側も成り立つ」といった生徒の感想や考察から，自分が調べた図での考察が他の図でも成り立つと考えられていることが

わかる。

また，説明の中にも，

「授業の証明で使った三角形の合同を使って説明しようと思う」

など，今までの学習を活かして考えようという取り組みが見られた。

図16のように，1つの作図にとどまらず，連続的に点Dを動かしている作図を示した生徒もいた。この生徒は調べた結果

「 $AB \parallel EC$ になるときは， $\angle BAD = 90^\circ$ のときだけだと結論づけられる」としていた。このように，たくさんの具体例から一般的に成り立つことを推測する一般化を行う中で，特殊なもの，例外を見つけることができた生徒も見受けられた。

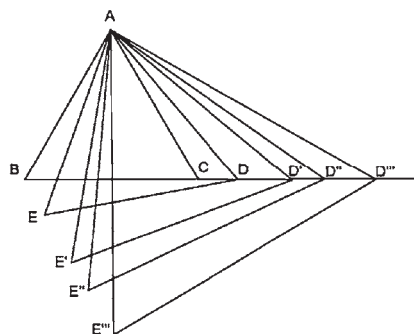


図16 連続的な図

② 疑問や発見をうながす課題解決から，それを探究・発展させることができたか。

レポート学習で，次のような感想をかく生徒もいた。

- ・今回は時間がなくこれだけしか探究ができなかったが，自由研究などで他も調べたい。
- ・成り立たない理由を書くのが難しいなと思いました。点Dの位置を変えると新しい発見がありました。こんなふうに自分で見つけるのは楽しいなと思いました。
- ・難しかったし，これで正解なのかは分からないけれど，自分なりに成り立つか成り立たないか，その理由が考えられたと思う。
- ・また機会があれば，辺AC上に点Eがある時はどうなるのか調べたい。
- ・点Dや点Eの位置を動かすと，前の図形では証明できていたことができなくなることがわかった。別の図形でもこのようなものがあるのか探してみたい。

これらの感想から，自ら意欲的に探究でき，さらなる疑問を持つことができたと考えられる。

また，様々な場合で①②が成り立つのかを考える中で，(3)の1)にもあげたように別の角が等しくなる，他の辺が平行になることに気づき，説明していた生徒が見られた。①②の課題だけにとらわれず，多様な見方・考え方をし考察できたと判断できる。

また，辺の上の特殊な点だけでなく，任意の点について調べる等，数学の大切な考え方である一般化についての考察も見られ，数学的な探究の精神が身につけていることが見受けられた。

また別の発展として，この幾何的な課題の中から角度という代数的な数値を取りだし，角についての考察をしていた生徒も見受けられた(レポート例-A生徒-)。幾何的な考え方だけではなく，自由な発想で，生徒自らが数学の世界を拓けられたということも，発展として着目できる。

③ 記述中心の形式的な証明にとらわれずに，生徒自らが考えたことを自分の言葉で表現できたか。また，他者を意識した説明をすることができたか。

レポートの中には，記述の証明だけでなく，角度を実際に測るといった実験・実測を用いた説

明や、たくさんの種類の作図をして、どれも平行ではないと見た目から判断したものもあった。また、証明の記述でも、等式を使いすっきり書いているものから、図や絵を用いたものまで多様な表現と様々な学習段階の説明が見られた。これらのことや、「難しかったし、これで正解なのかは分からないけれど、自分なりに成り立つか成り立たないか、その理由が考えられたと思う」という感想からもわかるように、生徒たちは形式的な記述の証明にとらわれず、自分の学習段階から表現を選び、自分なりに表現できたと考える。

また、「…わかりにくいので、色をつけると…」という説明の中の言葉や「作図などを用いて、自分がわかっていることもみんながわかるような説明を考えられたと思う」という感想から、生徒が他者に伝えるための説明を意識して取り組めたと考える。

さらに、レポートのタイトルについても「私と点D」「点Dの旅の記録」など、他者の興味をひきつける個性豊かなタイトルが付けられていた。

6. まとめと今後の課題

本研究のねらいは、「生徒自らが考える図形の証明に関する課題を考察し、生徒の視点に応じて課題を探究・発展させる証明を中心とする図形学習について、実証的に検討すること」であった。

そのために核となる課題とその探究・発展としてのレポート学習を実施し、そこから考察を行った。適切な核となる課題と指導の工夫によって、生徒の反応（授業・レポート学習）から、生徒の学習段階に応じて、いきつ戻りつしながらも幾何的な課題から証明への意識づけができたこと、探究・発展をすることができ、研究提案の妥当性があると判断できた。

しかしながら、生徒が行ったレポート学習での考えを交流させることは時間の関係で行うことができなかった。生徒が考えた発展は、発表、協議によってより一般的な表現、高次の証明内容になっていくことが想定できる。今後の課題としては、その時間も入れ、それぞれの生徒の初期の表現や学習段階から、指導による生徒の変容と変容後の表現や学習段階を把握することがあげられる。

また、今後も生徒に証明の必要感や図形の証明の感覚を豊かにする課題の開発と指導の仕方についての継続的な研究を課題としたい。

【註】

愛知教育大学飯島泰之氏の協力を得て、飯島研究室の Web 上で動かすソフトを活用した。

<http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/ijijima/ijijima.htm>

【引用・参考文献】

風間喜美江 (2000), 内的な数学的思考を中心として, 数学教育, 明治図書, pp.62-67.

小野雄祐 (2008), 証明を振り返り活用する活動を通して, 発展的に考察させる指導, 日本数学教育学会誌数学教育, 第90巻第11号, pp.2-10.

橋本吉彦・坂井裕 (1983), 数学の問題の発展的な扱いによる指導についての研究, 日本数学教育学会誌数学教育, 第65巻第11号, pp.9-11.

所与の課題を解決し，そこから探究・発展させる図形学習

杉山吉茂（1975），証明の意味－demonstrationとproof－，日本数学教育学会誌数学教育，第57巻第5号，pp.23-27.

風間喜美江・大前和弘・大西光宏・中西健三・蔵本愛里（2014），「数学を学ぶ意味」を実感させるための教師のかかわりのあり方－レポート学習や振り返りカードの活用を通して－，第14回学部・附属学校園教員合同研究集会発表冊子.

風間喜美江（2012），図形命題の仮定を図で思考する証明活動，第45回数学教育論文発表会論文集，pp.845-850.

相馬一彦（2013），「予想」で変わる数学の授業，明治図書，pp.9.

飯島泰之・川崎市中学校数学科研究会（1999），図形が動く授業が変わる，明治図書

【付記】

この研究は平成24～26年度科学研究費補助金（課題番号24653279）を受けている。