有限要素法によるフィルダムの浸潤線の決定について

西山　壮一，佐々木　孝，黒川　義夫*

I　緒　　言

自由水面を有するような止水構造物において自由水面を決定することは，止水能力を論ずる場合に必要であるばかりでなく，構造物そのものの安定性を吟味する場合に重要である。

近年，有限要素法は浸透流へも応用され，複雑な境界条件や非等質，異方性の場合も容易に解析できるようになった。また，自由水面を有する流れにも適用され，フィルダムの浸潤線を解析したものも報告されている。W.D.Finnら[1]は，最初浸潤線を仮定し，その後各点の水頭を求め，仮定された浸潤線上の節点を移動し，これをくりかえして収束させる方法で解析した。川本ら[2]は浸潤線を求め浸透流による応力分布を計算した。Robert L.Taylorら[3]は非等質の場合の浸潤線の求め方についてのべている。しかし，これらの方法は仮定した浸潤線上の節点だけ移動するため解析当初仮定された浸潤線の位置によっては要素が大きくなることがある。従ってこのように浸潤線上の節点だけを移動して求める方法では，Finnらも指摘しているように最初の浸潤線の仮定が重要となってくる。

この論文ではFinnらの方法などにみられた浸潤線上の節点の移動にともなう欠点をなくし，またフィルダムの解析領域が比較的簡単な形状をなしていることに注目し，解析領域の自動分割を行い，より簡単な方法で広範囲にわたって適用しうる浸潤線の決定方法を示したものである。

II　浸透流に対する有限要素法の理論

有限要素法の理論は，すでに多く発表されているので，ここではその概要についてのべる[2,4]，Darcy則に従う二次元流れを支配する基礎方程式は次の式である。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし，H：水頭，k：透水係数，添字はそれぞれ方向を示す。

(1)式は次のEulerの方程式となっている。

$$\chi=\frac{1}{2}\iint\left\{k_x\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy \quad \cdots\cdots(2)$$

従って(2)式を(1)式と同じ境界条件のもとで最小化すれば水頭の分布は明らかとなる。なお，流線についてはポテンシャル線と直交するように求めればよいが，より厳密には，流関数について解くことである。有限要素法のための定式過程は次のようになる。[5]

$$V=\begin{Bmatrix}V_x\\V_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\\-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(3)$$

ただし，V：流速，添字はそれぞれの方向を示す。ψ：流関数

したがって

$$\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial H}{\partial x}\\-\dfrac{\partial H}{\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{k_x}&0\\0&\dfrac{1}{k_y}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}V_x\\V_y\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(4)$$

＊香川県庁

(1), (2), (3), (4)より最小化すべき関数は

$$\chi=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{1}{k_x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{k_y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\}dxdy \qquad (5)$$

従って，ポテンシャル分布の解析と同様の方法で解析できる。

III 有限要素法による浸潤線の解析

(1) 解析領域の分割の自動化について

有限要素法を用いて問題解決にあたる場合の欠点の一つに，解析領域の分割によるデータ量とその準備があるが，これらの作業はできるだけ計算機の内部で自動処理させることが望ましい。自動分割の方法については，O.C.Zienkiewicz[4]がその著書の中で簡単にのべているが，筆者らは次のような方法を用いた。領域を直接分割することは困難なので，まず基本になるパターンをFig.1のようにとる。

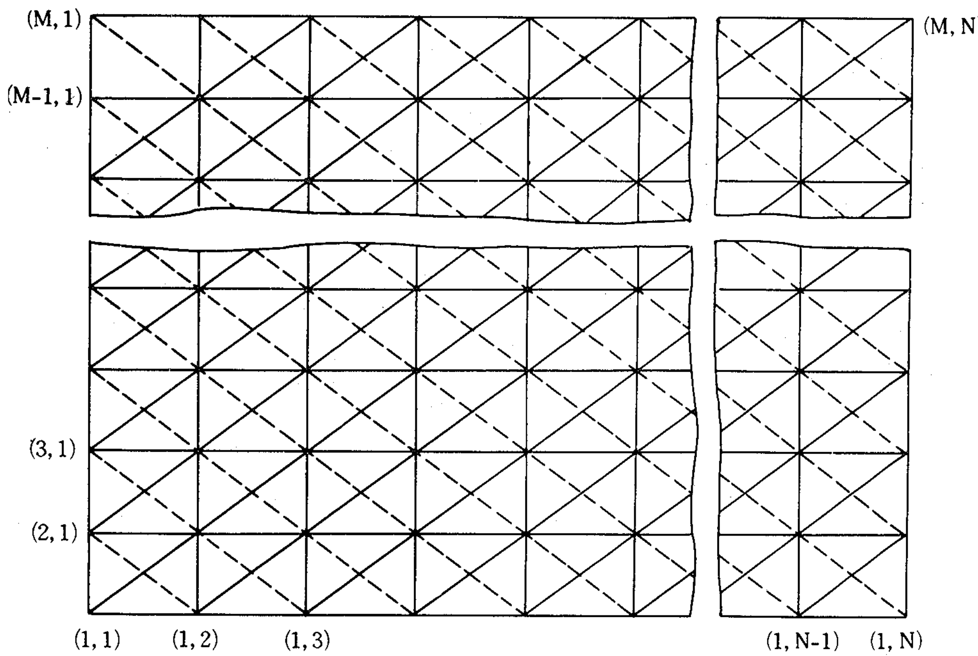


Fig.1. BASIC PATTERN OF FINITE ELEMENT MESH FOR SIMPLE CONNECTED REGION

このようにすれば，節点番号のつけ方も規則正しくなり，プログラムも比較的簡単となる。実際の計算では，上図のパターンを電子計算機の中にプログラムの形で記憶させておき，あとはMとNを入力すればFig.1のようなパターンで長方形が三角形要素に分割され，各要素の節点番号をつけることができる。しかし，解析領域がFig.1のような場合はほとんどないから，解析領域に適合させるためいくつかの点に座標を与える。これには，領域がn角形であればFig.1の節点のうちn個を指定してやればよい(Fig.2)。この場合，Fig.1の縦，横の間隔は解析領域について適当に変化させる必要があ

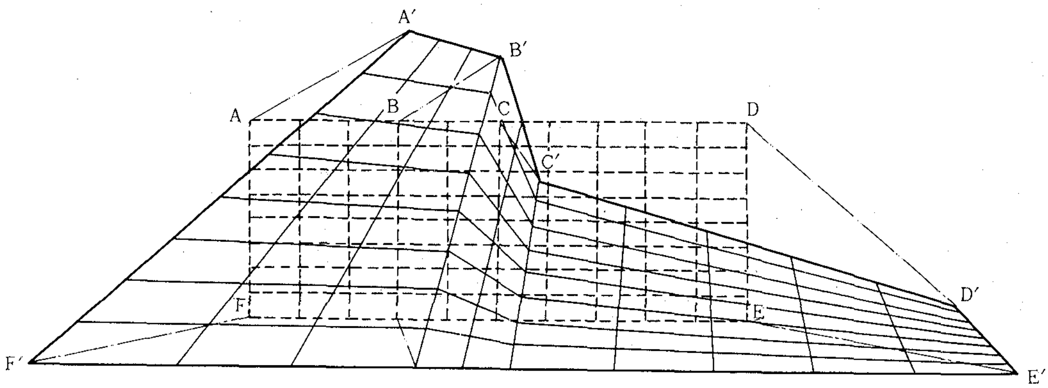


Fig. 2. MAPPING OF BASIC FINITE ELEMENT MESH TO SIMPLE CONNECTED ANALYTICAL REGION

る。

(2) フィルダムの浸潤線の決定方法について

筆者らは，以下のような反復法を用い有用な結果を得ることができた。この手順について，前述の自動分割を行なったFig 3をもとに説明する。分割のとき用いたダム頂部とダム基礎部とを結ぶ何本かの線は，計算においてその上を節点が動く修正線とする。まず自由水面としてＡＢＣＤを仮定する。この場合，仮定自由水面はできるだけ真の浸潤線に近い方が計算時間の点からみて好ましいが，自由水面の位置が全く不明の場合は，Ａ点と法尻の少し上の点を結ぶ線でもよい。こうして仮定された領域Ａ～Ｈ内を自動分割し，有限要素法で各節点の水頭値を求めることができる。次に，計算された水頭値を用いて自由水面上の節点のｙ座標を，その節点の水頭値に等しい点に修正線にそって移動する(Fig.4)。

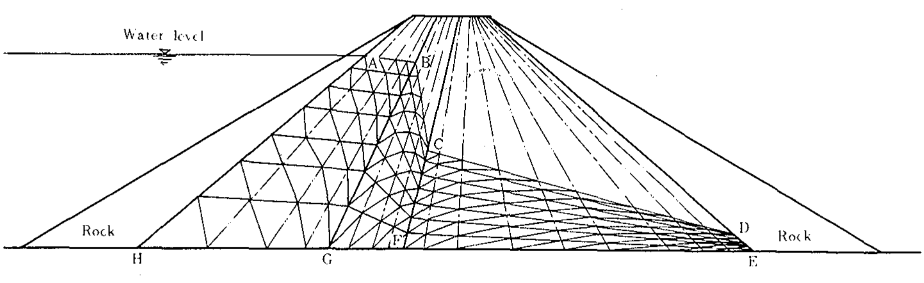
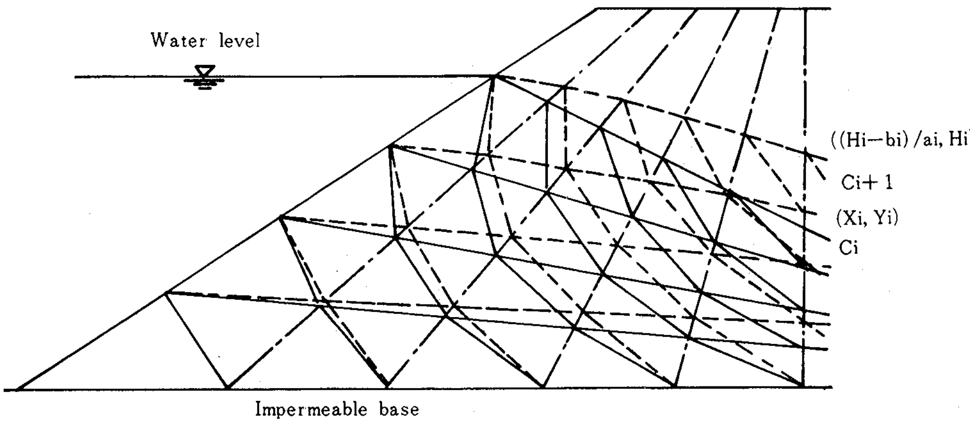


Fig. 3. INITIAL FINITE ELEMENT MESH (NONHOMOGENEOUS REGION)



CORRECTION OF DIRECTIONS Y=ai×X+bi

FIG. 4. ADJUSTMENT OF TOP FLOW LINE

このようにして，新しく自由水面が仮定されるから，A′ D′ E内を分割しなおす。これが終れば前回と同様各節点の水頭を計算する。あとは何回かこの操作をくりかえし，仮定した自由水面上の節点のYi座標とその点の計算水頭値Hiの差をすべての自由水面について計算し，あらかじめ仮定した微小な値をEpsとして，自由水面のすべての節点で $|H_i-y_i|<Eps$ なる条件が満たされるとき計算を終わる。以上のすべてを通じて，境界条件は $\overline{AH}$ 上の節点およびD点を除く $\overline{DE}$ 上の節点について与える。したがって $\overline{DE}$ 上の節点の境界値は各段階ごとに異なる。さて，こうして必要な精度内に収束すれば，D点を浸出点，曲線ＡＢＣＤを浸潤線として，$\overline{ABCD}$ 上の節点と $\overline{EFGH}$ 上の点に流関数の値を与えると，各節点の流関数の値は計算でき流線が求まる。

(3) 解 析 例

均一型のフィルダムについて，初期分割と計算された浸潤線をFig.5に示す。均一型の場合については，従来から用いられているCasagrande 法による浸潤線と比較を行なったがほぼ一致している。また Kx/Ky =10の場合についても計算を行なった。

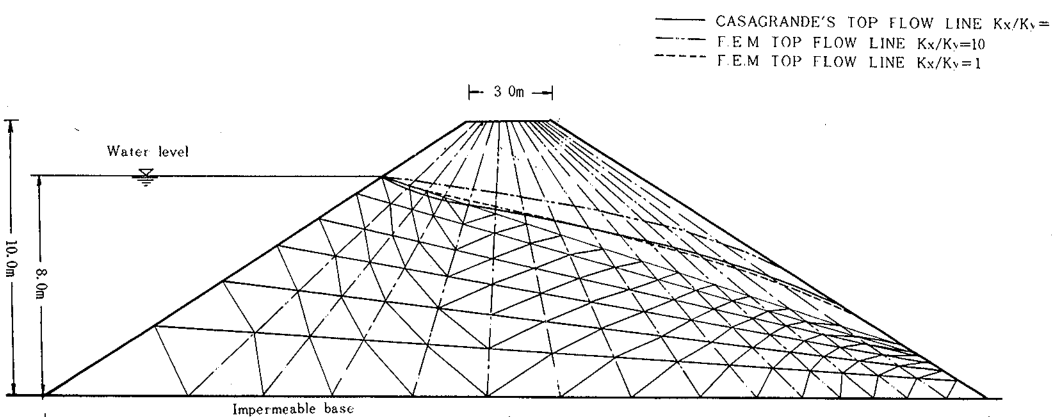


Fig. 5. CALCULATION OF TOP FLOW LINE THROUGH A HOMOGENEOUS FILL DAM INITIAL FINITE ELEMENT MESH AND TERMINAL TOP FLOW LINE

Ⅳ 結　　語

フィルダムが比較的簡単な幾何学的形状をなしていることに注目し，要素の自動分割をとり入れ，Finn 等の節点移動にともなう要素拡大の恐れをなくしたこと，およびデータ作成を容易にしたことにより，広範囲に適用できる浸潤線の決定方法を示した。本論文で示した自動分割の方法は，単連結な解析領域を有する他のものに対しても充分適用できる。計算は香川大学計算センターで行なった。職員の方々に謝意を表する。

参考文献

(1) Finn, W.D.: Finite-element analysis of seepage through dams, *Proc. A.S.C.E.*, SM6, 41−48(1967).

(2) 川本朓万ら：堤体および基礎における浸透流の解析について，土と基礎，18−12，19−26(1970).

(3) Taylor, R.L., Brown, C.B: Darcy flow solution with free surface, *Proc. A.S.C.E.*, HY2, 25−33 (1967).

(4) O.C.ツィエンキーヴィッツ，Y.K.チューン著，吉識雅夫監訳：マトリックス有限要素法，培風館(1970).

(5) Zienkiewicz, O.C., Mayer, P., Cheung, Y.K.: Solution of anisotropic seepage by finite elements, *Proc. A.S.C.E.*, EM1, 111−120(1966).

STUDIES ON THE DETERMINATION OF SEEPAGE-LINE OF FILL DAM BY THE METHOD OF FINITE ELEMENT

Souichi NISHIYAMA, Takashi SASAKI and Yoshio KUROKAWA

Summary

Recently the method of finite element has been applied to the analysis of seepage problem.

When boundary condition is complex and flow is anisotropic and nonhomogeneous, this method of solution is especially useful. By mean of the finite element method, W.D.Finn, L.Taylor, T.Kawamoto and a number of other investigators analyzed the seepage-line of fill dam.

In this paper, we used the automatical division of the region and analyzed the seepage-line of fill dam.

This method is more aplicable to the wide range of fill dam.

(1974年5月31日受理)