

二重止水壁下における浸透流の解析

西山 壮一, 佐々木 孝, 十河 扶行*, 黒川 義夫**

I ま え が き

浸透場の問題のように物理的な挙動が準調和微分方程式で表わされる場合は汎関数の取りあつかいが比較的簡単であり, 有限要素法の流体力学への応用として注目され, すでにその報告がある。O.C.Zienkiewicz⁽¹⁾らは非等質, 異方性の場合のダムを流れる浸透を解析した。

W.D.Finn⁽²⁾, R.L.Taylor⁽³⁾ら, S.P.Neuman⁽⁴⁾らはフィルダムの浸潤線の決定についてのべ, 従来困難とされていた自由水面を有する浸透の解析を行なった, 国内では川本ら⁽⁵⁾も行なった。

非線型の流れについてもすでに発表されている。J.A.McCorquodale⁽⁶⁾は非線型流れの場合の汎関数のとりあつかいについてのべ, R.E.Volker⁽⁷⁾は井戸の揚水やロックフィルダム内の流れを解析した。筆者ら⁽⁸⁾も集水管のまわりの砂の移動について解析した。有限要素法は複雑な境界や異方性, 非等質の浸透の解析に有利である。

この論文では二重止水壁下の浸透流について, 実験を行ない, 有限要素法により解析し, 実験値, 理論値の比較を行なった。

II 浸透場における有限要素法の理論^{(9), (10), (11)}

Darcy則に従う流れを支配する式は次のように与えられる (二次元の場合)。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

H: 水頭, k : 透水係数, 添字 x, y は方向を示す。
ここで二変数の次のような汎関数について考える⁽¹²⁾。

$$j(H) = \iint_c F(x, y, H, H_x, H_y) dx dy \dots\dots\dots (2)$$

二変数 x, y の関数 $H = H(x, y)$ をとり $H_x = \partial H / \partial x$, $H_y = \partial H / \partial y$ として(2)式を最小にするのを求める。次のような Euler の方程式が導かれる。

$$F_H - \frac{\partial}{\partial x} F_{H_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{H_y} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

(1)式の汎関数は次のようになる。

$$E = \frac{1}{2} \iint \left\{ k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \dots\dots\dots (4)$$

(4)式を境界条件のもとに最小にするような水頭の分布が(1)の解である。

解析領域を Fig.1のように微小三角形に分割しその要素内で水頭は x と y の一次式で表わされると仮定する。

$$H = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \dots\dots\dots (5)$$

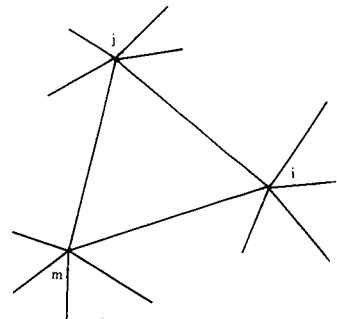


Fig. 1. 要素

* 奥村組 ** 香川県庁

三角形要素の3頂点 i, j, m における水頭を H_i, H_j, H_m としこれらの値を(5)式に代入すれば

$$\begin{bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

これより $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を H_i, H_j, H_m で表わすことができる。

$$H = [N_i \quad N_j \quad N_m] \begin{bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

上式で

$$\left. \begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\ N_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\ N_m &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2\Delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$a_i, a_m, b_i, b_m, c_i, c_m$ は回転順列であることを考えて求められる。 Δ は三角形の面積である。

E の最小化のためある要素で汎関数 E の節点での水頭についての微係数を求める。

$$\frac{\partial E^e}{\partial H_i} = \iint \left\{ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \right\} dx dy \dots\dots\dots (10)$$

この式に(7)式を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^e}{\partial H_i} &= \iint k_x \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right] \{H\}^e \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) dx dy \\ &+ \iint k_y \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right] \{H\}^e \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

a_i, b_i, c_i は x と y の関数ではない。

よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^e}{\partial H_i} &= \frac{1}{4\Delta} k_x [b_i b_i \quad b_j b_i \quad b_m b_i] \{H\}^e \\ &+ \frac{1}{4\Delta} k_y [c_i c_i \quad c_j c_i \quad c_m c_i] \{H\}^e \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

他の節点についても同様である。

全領域については次のように各要素に対する微係数を加えて0とすればよい。

$$\sum \frac{\partial E^{en}}{\partial H_i} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

N : 要素数

以上はポテンシャルについてであったが流関数についても同様である。最小化するべき汎関数は次のようである。

$$E = \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{1}{k_x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{k_y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \dots\dots\dots (14)$$

ϕ : 流関数

非線型浸透流の場合、Forchheimerの式を使うと

$$-gradH=(a+b|V|)V \dots\dots\dots(15)$$

a, bは係数

(15) 式よりそれぞれの成分の流速を求めると連続の式は⁽¹³⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(-\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{H_s}{b}} \right) \frac{(-H_x)}{|H_s|} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(-\frac{a}{2b} + \sqrt{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{H_s}{b}} \right) \frac{(-H_y)}{|H_s|} \right\} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

これより有限要素法の定式化ができる。

III 実 験

実験装置及びその諸元を Fig. 2 に示す。

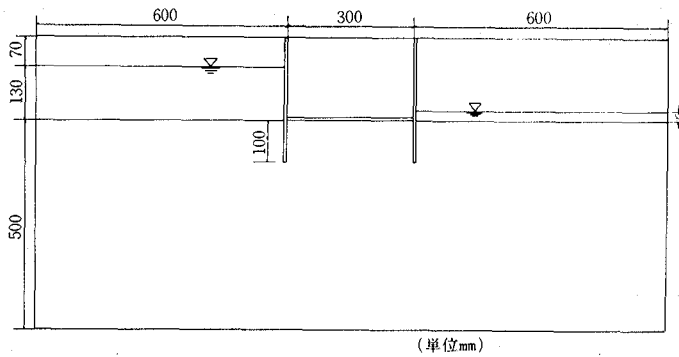


Fig. 2. 実験装置の諸元

水槽の前面は塩化ビニールの透明板を使用した。特に止水壁と前後板の間を水が通らないように注意した。水は上流側より常時給水し、上下流とも定水頭になるように余水吐がついている。上流側は地面より13cm、下流側は2.5cmの定水位とした。砂は標準砂を使った。流線は Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5 に示すように過マンガン酸カリウムで追跡した。

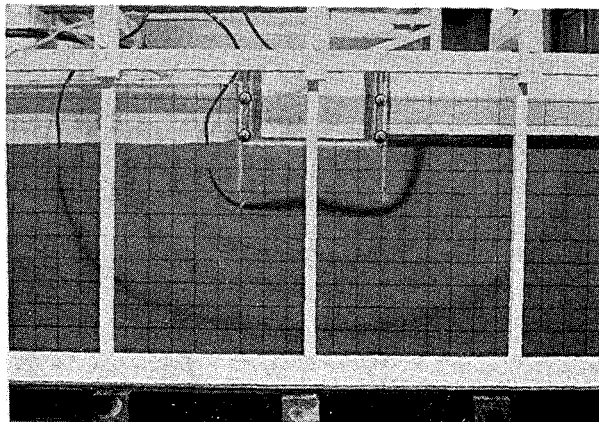


Fig. 3. 流線の追跡 (No. 1)

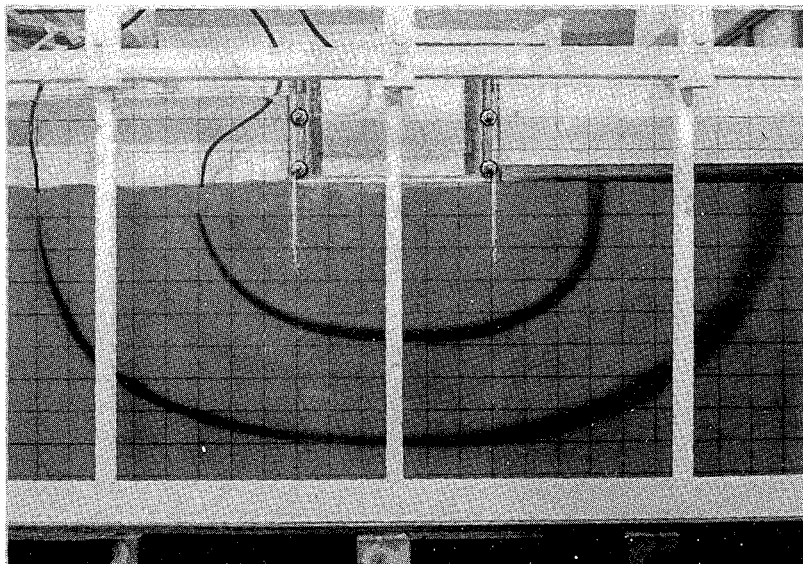


Fig. 4. 流線の追跡 (No. 2)

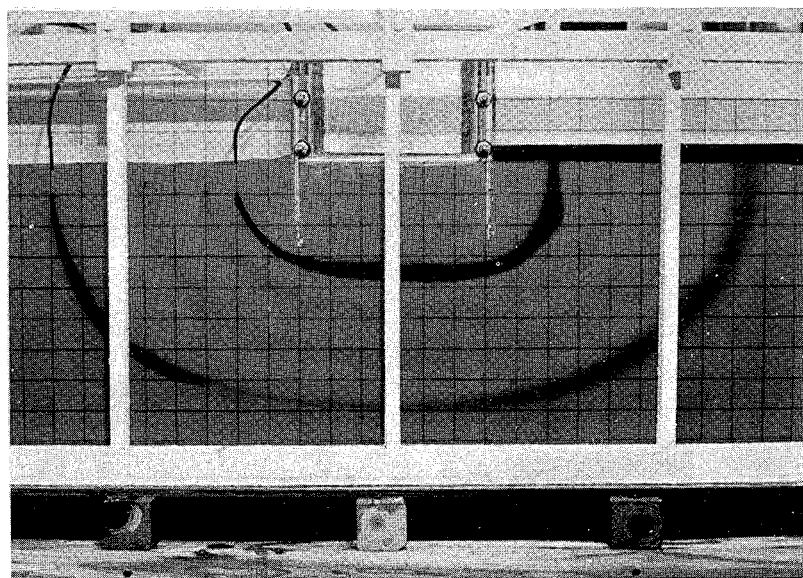


Fig. 5. 流線の追跡 (No. 3)

砂をつめるときはあらかじめ水を水槽に入れ、その後砂を沈殿させ、均一になるように努めた。

IV 解析および考察

流れはDarcy則に従うとして有限要素法により解析した。Fig. 6 に流線の実験値および理論値の比較を示す。

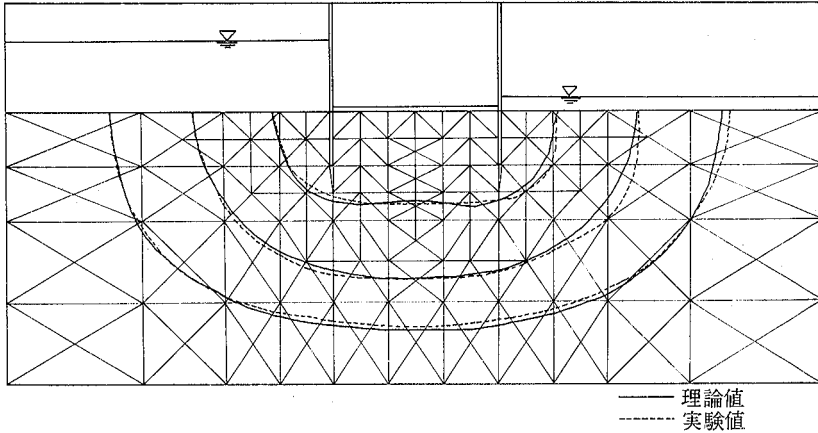


Fig. 6. 理論値と実験値の比較

実験値と理論値はだいたい一致している。わずかにずれている所もあるがこの原因として砂のつまり具合の不均一性が考えられる。なお実験で流線追跡中時間がかかり過マンガン酸カリウムが拡散するが中心を実験の流線とした。Fig. 7 に等ポテンシャル線および流線を示す。

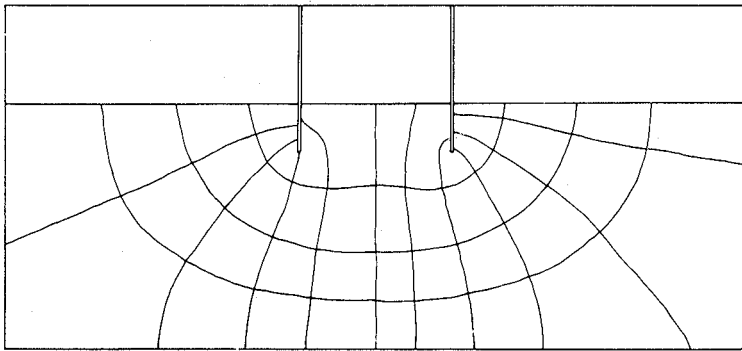


Fig. 7. 等ポテンシャル線および流線

Fig. 8 に流速の分布を示す。

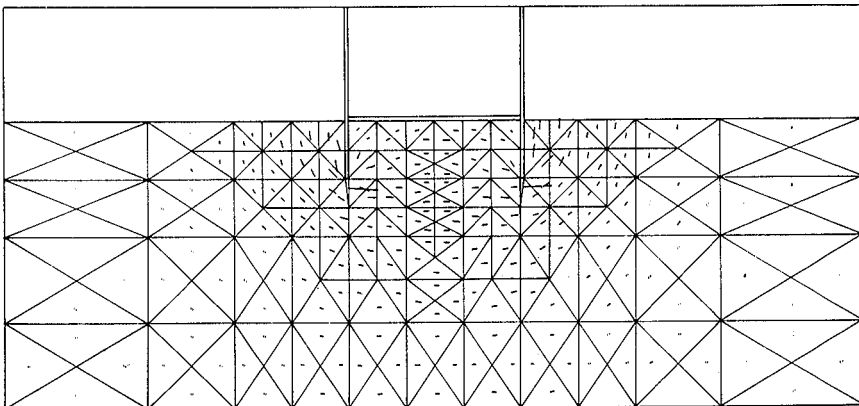


Fig. 8. 速度分布

流速は止水壁下で最大である。二重止水壁のような複雑な境界でも容易に解析でき、またこのような止水構造物の止水能力や安全を吟味する上に有用であるばかりでなく、土と水の複合的問題も解析可能で今後ますます発展するものと思われる。

計算は香川大学計算センターで行なった。職員の方々に誌上を借りて謝意を表したい。

参 考 文 献

- | | |
|--|--|
| <p>(1) ZIENKIEWICZ, O. C., MAYER, D. and CHUNG, Y. K.: Solution of anisotropic seepage by finite elements, <i>Proc. A.S.C.E.</i>, EM1, 111-120 (1960).</p> <p>(2) FINN, W. D.: Finite-elements analysis of seepage through dams, <i>Proc. A.S.C.E.</i>, SM6, 41-49 (1967).</p> <p>(3) TAYLOR, R. L. and BROWN, C. B.: Darcy flow solution with a free surface, <i>Proc. A.S.C.E.</i>, HY2, 25-33 (1967).</p> <p>(4) NEUMANN, S. P. and WITHERSPOON, P. A.: Finite element method of analyzing steady seepage with a free surface, <i>Water Resources Research</i>, 6, No.3, 889-892 (1970).</p> <p>(5) 川本脩万, 駒田広也, 宮田友延: 堤体および基礎における浸透流の有限要素解析について, 土と基礎, No. 18-12, 19-26 (1970).</p> | <p>(6) McCORQUODALE, J. A.: Variational approach to non darcy flow, <i>Proc. A.S.C.E.</i>, HY11, 2265-2277 (1970).</p> <p>(7) VOLKER, R. E.: Nonlinear flow in porous media by finite elements, <i>Proc. A.S.C.E.</i>, HY6, 2093-2114 (1969).</p> <p>(8) 西山壮一ほか: 集水管のまわりの土粒子の移動について, 農業土木学会応用水理研究部会 (1973).</p> <p>(9) O. C. ツィエンキーヴィッツ, Y. K. チューン著, 吉識雅夫監訳: マトリックス有限要素法, 培風館 (1970).</p> <p>(10) 前出1).</p> <p>(11) 前出5).</p> <p>(12) 寺沢寛一編: 自然科学者のための数学概論(応用編), 岩波書店 (1960).</p> <p>(13) 前出7).</p> |
|--|--|

ON THE ANALYSIS OF THE SEEPAGE FLOW
IN THE DOUBLE COFFER DAMS

Souichi NISHIYAMA, Takashi SASAKI, Yoshiyuki SOGOO and Yoshio KUROKAWA

Summary

Recently the seepage problems were solved by many investigators by the method of the finite elements. This method is especially useful in the case of a complex, boundary condition. In this paper, we theoretically analyzed the seepage flow in the double coffer dams and experimentally made the other studies as shown in Fig. 3, 4 and 5. And we compared with experimental and theoretical results.

(1974年5月31日受理)