

カンガイ用管水路の空気混入流に関する研究 II 基礎方程式の解法

西 山 壮 一

STUDIES ON THE AIR-ENTRAINED FLOW IN AN IRRIGATION PIPE LINE II AN ANALYTICAL METHOD OF THE BASIC EQUATION OF WATERHAMMER INCLUDING THE AIR BUBBLES IN A PRESSURE PIPE

Souichi NISHIYAMA

In the previous paper, the basic equations of waterhammer were derived in the case of air-entrainment flow in a pressure pipe.

In this paper, the method of solution of the basic equation is discussed. And the calculation method of mean velocity in the pipe, mean density, modulus of elasticity and speed of pressure wave is described.

A geophysical model of analysis is given. And the results of the analytical method used is compared with those of the experimental method, they are almost in agreement.

前報においては、管内に混入空気が含まれている場合の水撃作用の基礎方程式の誘導を行った。本論文においては、その基礎方程式の解法を論じた。さらに、管内流水中に混入空気が含まれている場合の管内平均流速、平均密度、弾性係数および圧力波の伝播速度の計算方法を述べた。

また、解析の幾何学的モデルが提示されている。本論文において述べた解析方法による結果と実験結果が比較され、これらはよく適合した。

1. ま え が き

管内流水中に、空気が含まれている場合の水撃作用には、流水中に空気が含まれていない場合のそれに比べ、特異な現象がみられる。管内流水中に空気が混入することによって、流体の物性値が、管内を水のみが流れる場合とは著しく異なることが原因となっている。そこで、ここでは、管内流水中に空気が含まれている場合の水撃作用の解析とそれに必要な物理的諸量について述べることにする。

2. 空気混入流の物理的諸量

① 管内平均流速

水および空気の流量をそれぞれ Q_1 , Q_g とすると、輸送速度（平均流速）は、次式で与えられる。

$$V = \frac{(Q_1 + Q_g)}{A} \quad \text{.....(1)}$$

② 平均密度

空気含有率を α 、水および空気の密度をそれぞれ ρ_1 , ρ_g とすると、平均密度は次のようになる。

$$\rho_m = \rho_1(1 - \alpha) + \rho_g \alpha \quad \text{.....(2)}$$

③ 摩擦損失係数

管内流水中に空気が含まれた場合の摩擦損失係数を理論的に求めることは、多くの困難をともなう。したがって、ここでは実験から得られた次の式を用いることにする。

$$\begin{aligned} p_m &= p_1(1 + n\alpha) \\ (n &= 5 \sim 7) \end{aligned} \quad \text{.....(3)}$$

ただし、 p ; 水・空気混合流の圧力損失, p_i ; 水のみの流れの圧力損失

④ 圧力波の伝バ速度

圧力波の伝バ速度は、管内に空気が含まれているときの水撃作用の解析において、最も重要な物理量である。

小堀ら⁽⁴⁾は、水と空気が管内に同時に存在するとき、その場合の圧力波の伝バ速度が、水と空気がそれぞれ、単体で管内に存在する場合の圧力波の伝バ速度のいずれよりも、減少する場合があることに疑問をもち、それを究明し、その場合の圧力波の伝バ速度を理論的に誘導した。

これが、管内空気混入流の圧力波の伝バ速度に関する最初の研究であり、その後も二～三の研究^(2,3,4)がある。

これらの研究成果によると、管内にわずか数%の空気が含まれている場合、圧力波の伝バ速度は数 10m/sec まで減少する。管内流水中に空気が含まれている場合の水撃作用には、管内空気存在を無視した従来の理論から得られた結果と比べ、特異な現象がみられることはすでに述べたが、この原因は、管内流水中に、混入空気が含まれていることによって、圧力波の伝バ速度が著しく減少し、さらに、圧力波の伝バ速度が場所および時間の関数となるためである。したがって、管内に空気が混入している場合は、それを考慮した解析が必要となる。

そこで、このように管内流水中に空気を含んでいる場合における、水と空気の混合流体の弾性係数⁽⁴⁾について述べる。

管内圧力 P における水および空気の占める体積をそれぞれ V_i, V_g とする。また、圧力が Δp だけ増加した場合、水および空気の体積増加をそれぞれ、 $\Delta V_i, \Delta V_g$ とする。体積弾性係数の定義から、 E_i, E_g は、それぞれ次のように与えられる。

$$E_i = - \frac{\Delta p}{(\Delta V_i / V_i)} \quad \dots\dots(4)$$

$$E_g = - \frac{\Delta p}{(\Delta V_g / V_g)} \quad \dots\dots(5)$$

(4)式および(5)式から $\Delta V_i, \Delta V_g$ は、それぞれ次のように与えられる。

$$\Delta V_i = \frac{-V_i \Delta p}{E_i} \quad \dots\dots(6)$$

$$\Delta V_g = \frac{-V_g \Delta p}{E_g} \quad \dots\dots(7)$$

さらに、水と空気の混合流体の弾性係数を E_m とすると、これは弾性係数の定義から次のように与えられる。

$$E_m = - \frac{\Delta p}{(\Delta V_m / V_m)} \quad \dots\dots(8)$$

この式から、

$$\Delta V_m = \frac{-V_m \Delta p}{E_m} = \Delta V_i + \Delta V_g \quad \dots\dots(9)$$

となる。

さらに、

$$V_m = V_g + V_i \quad \dots\dots(10)$$

(4)式～(10)式から、水と空気の混合流体の弾性係数は次のように与えられる。

$$E_m = \frac{E_i}{1 + \frac{V_g \{ (E_i / E_g) - 1 \}}{V_g + V_i}} \quad \dots\dots(11)$$

これが、管内流水中に混入空気を含んでいる場合の“水のみかけの弾性係数”を求める式である。

つぎに、この式中の空気の体積 V_g とその弾性係数 E_g について考える。

⑤ 空気の体積および空気の弾性係数

管内圧力の変動にともなって、空気の体積およびその弾性係数は変化する。ここでは、この計算方法について述べる。

気体の状態方程式は、次式で表わされる。

$$p_a V_g = n R T_a \quad \dots\dots(12)$$

ただし、 p_a ; 圧力 (絶対圧), V_g ; 空気の体積, n ; 気体のモル数, R ; 気体定数, T_a ; 温度 (絶対温度)

また、液体中に気泡が存在する場合には、液体の内部エネルギーが気体のそれに比べ、十分大きいので、空気の体積変化は等温変化と考えるとよい。空気の体積変化を等温変化と考えるので、(12)式中の T_a は一定と考えるとよい。そ

ここで、(12)式から、

$$p_a \nabla_g = \text{一定} \quad \text{.....(13)}$$

また、圧力と密度の関係は、

$$\frac{p_a}{\rho_g} = \text{一定} \quad \text{.....(14)}$$

となるので、圧力が求まれば、空気の体積は次式から求まる。

$$\nabla_g = \frac{p_{a,0} \cdot \nabla_{g,0}}{p_a} \quad \text{.....(15)}$$

ここで、 $\nabla_{g,0}$ は圧力 $p_{a,0}$ における気体の体積を示す。

次に、圧力変動に伴う空気の弾性係数の変化について述べる。空気の体積変化を等温変化と考えるので、次の式が成り立つ。

$$(\nabla_g + d\nabla_g)(\rho_g + d\rho_g) = \nabla_g \rho_g \quad \text{.....(16)}$$

この式から、

$$\frac{d\nabla_g}{\nabla_g} = - \frac{d\rho_g}{\rho_g} \quad \text{.....(17)}$$

(5)式と(13)式~(17)式から

$$E_g = p_a \quad \text{.....(18)}$$

これが、空気の体積変化を等温変化とみなすことができる場合の圧力 p_a (絶対圧)における空気の弾性係数を与える式である。圧力の変動に対して、(15)式および(18)式から、それぞれ、空気の体積および空気の弾性係数が求まり、(11)式から水と空気の混合流体の弾性係数が求まる。

なお、計算に際しての初期値は、定常状態における圧力および流速であり、この圧力から、空気の体積およびその弾性係数が求まる。大気圧において、管内流水中に空気を含んでいる場合、水と空気の混

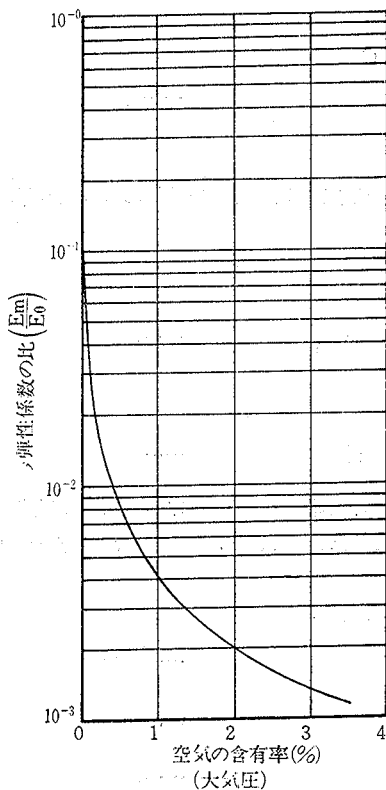


Fig. 1. 空気の含有にともなう水の弾性係数の変化
(E_0 : 空気を含んでいない場合の弾性係数
(E_m : 空気を含んでいる場合の水のみかけの弾性係数)

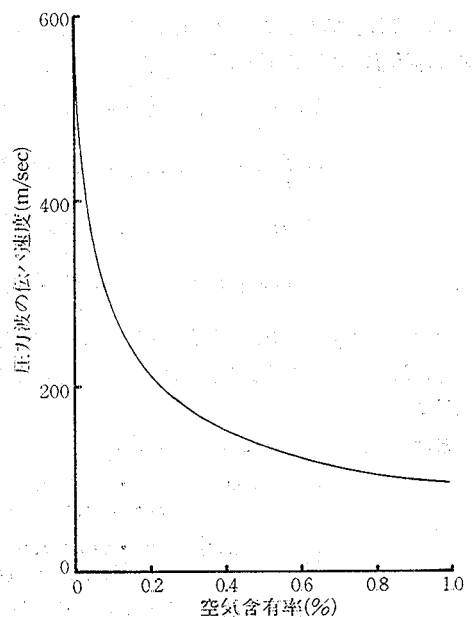


Fig. 2. 空気の含有率と圧力波の伝播速度の関係
(管径; 50mm, 管の厚さ; 5 mm, 管種; 塩化ビニール管, 圧力; 大気圧)

合流体の弾性係数の変化を Fig. 1 に示す。

Fig. 1 から、微量の空気の混入によっても “水のみかけの弾性係数” が大きく減少することが明らかである。

(11)式で与えられる弾性係数 E_m を用いて、水と空気の混合流の圧力波の伝バ速度は、次式から求まる。

$$a = \sqrt{\frac{E_m/\rho_m}{1 + (E_m/E_p)(D/b)C}} \quad \dots\dots(19)$$

なお、(19)式中の ρ_m は(2)式を用いて求める。(19)式を用いて計算した、空気の含有率と圧力波の伝バ速度の関係を Fig. 2 に示す。管内流水中に混入空気を含むと、圧力波の伝バ速度が著しく減少することが明らかである。

3. 基礎方程式の差分化

説明を簡単にするため、断面が一様な管路について考える。まず、解析のためのモデルを示す。

管水路の全区間を $I=1\sim N$ の管路に分割する。さらに、任意の I 番目の管路を $J=1\sim M$ までに等分する。

任意時刻における圧力波の伝バ速度は、任意の I 番目の管路内では一定とする。

すなわち、 $I=1\sim N$ 個に分割された管路のそれぞれでは圧力波の伝バ速度は異なるが、 I 番目の管路内の圧力波の伝バ速度は場所的には同一で、時間によってのみ変化するものとする。 $I=1\sim N$ の各区分において、それぞれ圧力変動の解析を行う。

任意時刻における I 番目の管路における圧力波の伝バ速度を a_i とする。前報⁽⁵⁾における(9)式および(27)式から差分方程式⁽⁶⁾は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} V_P(i, j) - V_R + \frac{g}{a_i} \{H_P(i, j) - H_R\} + \frac{g}{a_i} \times \\ V_R \sin \theta (t_P - t_R) + \frac{f_m}{2D} V_R |V_R| (t_P - t_R) = 0 \\ x_P - x_R = (V_R + a_i)(t_P - t_R) \end{aligned} \right\} C^+ \quad \dots\dots(20)$$

$$\left. \begin{aligned} V_P(i, j) - V_S - \frac{g}{a_i} \{H_P(i, j) - H_S\} - \frac{g}{a_i} \times \\ V_S \sin \theta (t_P - t_S) + \frac{f_m}{2D} V_S |V_S| (t_P - t_S) = 0 \\ x_P - x_S = (V_S - a_i)(t_P - t_S) \end{aligned} \right\} C^- \quad \dots\dots(21)$$

(20)式および(21)式を H_P および V_P について解けば、任意の I 区分内の管路の $J=1\sim M$ の再分割番号における $H_P(i, j)$ および $V_P(i, j)$ の値は、次のように計算できる。

$$V_P(i, j) = 0.5 \left\{ V_R + V_S + \frac{g}{a_i} (H_R - H_S) - \frac{g}{a_i} D_T \sin \theta (V_R - V_S - \frac{f_m D_T}{2D} \times (V_R |V_R| + V_S |V_S|)) \right\} \quad \dots\dots(22)$$

$$H_P(i, j) = 0.5 \left\{ H_R + V_S + \frac{a_i}{g} (V_R - V_S) - D_T \sin \theta (V_R + V_S) - \frac{a_i}{g} \frac{f_m D_T}{2D} \times (V_R |V_R| - V_S |V_S|) \right\} \quad \dots\dots(23)$$

なお、これらの式中の (i, j) のうち、 i は管水路において、圧力波の伝バ速度を同一とみなして取扱う管路の区分番号、 j は、その区分の管路において、圧力変動を計算するための分割点を示している。なお、分割の方法を Fig. 3 に示す。

また、(20)式～(23)式中の V_R, V_S, H_R および H_S は、次のように与える。

$$V_R = \frac{V(i, j) - T_{Hi} \cdot a_i \{V(i, j) - V(i, j-1)\}}{1 + T_{Hi} \cdot \{V(i, j) - V(i, j-1)\}} \quad \dots\dots(24)$$

$$V_S = \frac{V(i, j) - T_{Hi} \cdot a_i \{V(i, j) - V(i, j+1)\}}{1 - T_{Hi} \cdot \{V(i, j) - V(i, j+1)\}} \quad \dots\dots(25)$$

$$H_R = H(i, j) - T_{Hi} (V_R + a_i) \times \{H(i, j) - H(i, j-1)\} \quad \dots\dots(26)$$

$$H_S = H(i, j) + T_{Hi} (V_S - a_i) \times \{H(i, j) - H(i, j+1)\} \quad \dots\dots(27)$$

ここで、 $T_{Hi} = \frac{D_T}{Dx_i} \quad \dots\dots(28)$

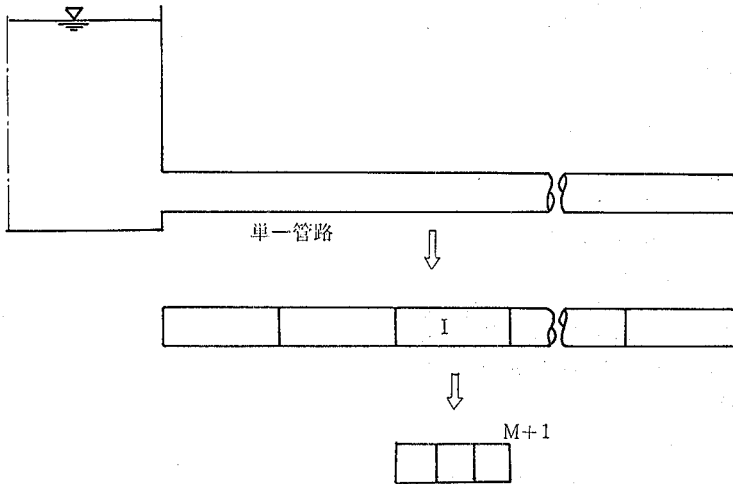


Fig. 3. 数值計算のための管路区間の分割

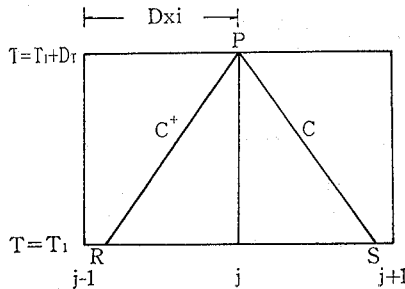


Fig. 4. 波速に関する特性曲線

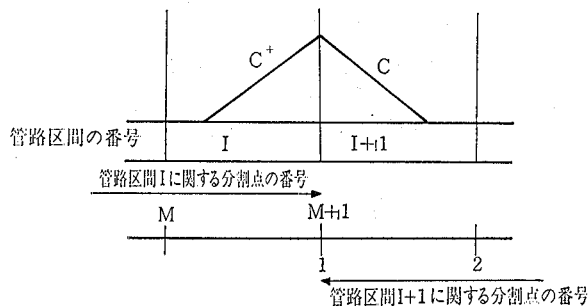


Fig. 5. 直列管路の境界における波速の特性曲線

ただし、 D_{xi} ; 圧力波の伝バ速度を同一とみなして取扱う I 番目の管路における分割された長さ、 D_T ; 計算の時間のステップ

なお、波速に関する特性曲線を Fig. 4 に示す。また、(20)式～(27)式中の添字 P, R, S は、Fig. 4 におけるそれぞれ P, R, S 点を示している。

また、(20)式～(27)式中の a_i は、次のように計算する。

圧力 $p(i, j)$ に対応して、圧力波の伝バ速度 $A(i, j)$ が求まる。すなわち、圧力が求まれば、空気の体積とその弾性係数が求まり、圧力波の伝バ速度は、(19)式から求まる。

さらに、

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^{M+1} A(i, j)}{M+1} \dots\dots(29)$$

とする。すなわち、このことは、I番目の管路区間における各断面の圧力波の伝バ速度の平均値を時刻 T におけるI番目の管路区間の圧力波の伝バ速度とすることを意味する。なお、計算における時間ステップ DT については、次の式を満足するように定めた。

$$D_{xi} > (a_i + V_{max}) \times DT \quad \dots\dots(30)$$

ここで、 V_{max} ; 管路区間Iにおける最大管内平均流速
 管路区間の境界における計算

(Fig. 5 参照) における $H_{P(i,m+1)}$ および $V_{P(i,m+1)}$ の値は次のように計算する。

I番目の管路区間と I+1 番目の管路区間

$$H_{P(i,m+1)} = \frac{(-C_5 \cdot A_{Ri+1} + C_3 \cdot A_{Ri})}{(C_6 \cdot A_{Ri+1} + C_4 \cdot A_{Ri})} \quad \dots\dots(31)$$

$$V_{P(i,m+1)} = C_3 - C_4 \cdot H_{P(i,m+1)} \quad \dots\dots(32)$$

ただし、 A_R ; 管の断面積
 また、

$$C_3 = V_R + \frac{g}{a_i} \times H_R \frac{f_m D_T V_R |V_R|}{2D_i} \quad \dots\dots(33)$$

$$C_4 = g/a_i \quad \dots\dots(34)$$

$$C_5 = V_S - \frac{g}{a_{i+1}} \times H_S - \frac{f_m D_T V_S |V_S|}{2D_i} \quad \dots\dots(35)$$

$$C_6 = \frac{g}{a_{i+1}} \quad \dots\dots(36)$$

$$H_S = H_{(i+1,1)} + T_{H_{i+1}}(V_S - a_{i+1}) \{H_{(i+1,1)} - H_{(i+1,2)}\} \quad \dots\dots(37)$$

$$V_S = \frac{V_{(i+1,1)} - T_{H_{i+1}}(a_{i+1}) \{V_{(i+1,1)} - V_{(i+1,2)}\}}{1 - T_{H_{i+1}} \{V_{(i+1,1)} - V_{(i+1,2)}\}} \quad \dots\dots(38)$$

$$V_R = \frac{V_{(i,m)} - T_{H_i} a_i \{V_{(i,m+1)} - V_{(i,m)}\}}{1 + T_{H_i} \{V_{(i,m+1)} - V_{(i,m)}\}} \quad \dots\dots(39)$$

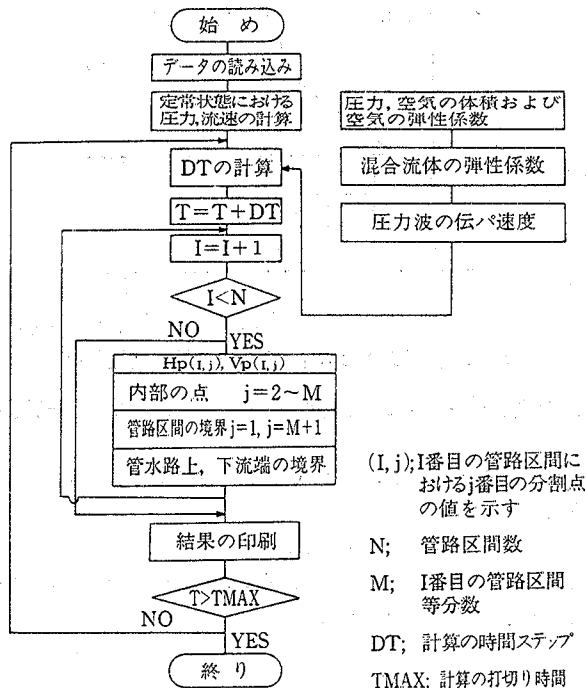


Fig. 6. 計算手順

$$H_R = H_{(i,m)} - T_{Hi} (a_i + V_R) \{H_{(i,m+1)} - H_{(i,m)}\} \quad \dots\dots(40)$$

なお、摩擦損失係数については、まず管内平均流速に対応する摩擦損失係数 f を求め、ついで、(3)式を用いて、空気が混入している場合の摩擦損失係数 f_m を求めた。

なお、解析手順の概要を Fig. 6 に示す。

4. 解 析 例

実験に使用した装置の諸元を Fig. 7 に示す。

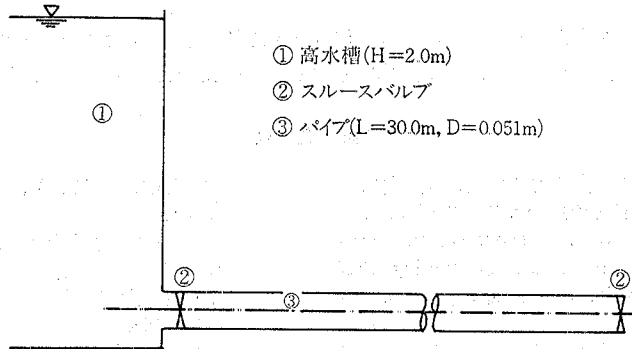


Fig. 7. 実験装置の概要

Fig. 7 における上流端のバルブを送水中に閉鎖した場合および下流端のバルブを閉鎖した場合、それぞれの圧力変動の測定を行った。圧力の測定場所は、それぞれ操作するバルブ位置であった。なお、空気については、コンプレッサーを使用して、さらに定圧に保ち、上流端から管内に送った。その流量は通気計によった。

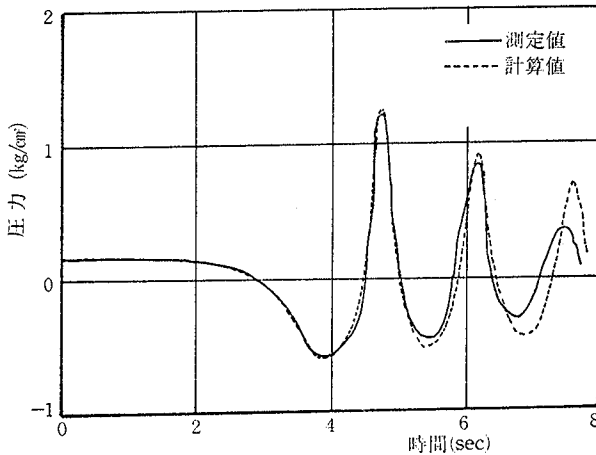


Fig. 8. バルブ閉鎖にともなう圧力の変化
(上流端バルブを閉鎖し、バルブ位置における圧力変動、バルブ閉鎖時間；3.8秒
空気含有率；1.3%)

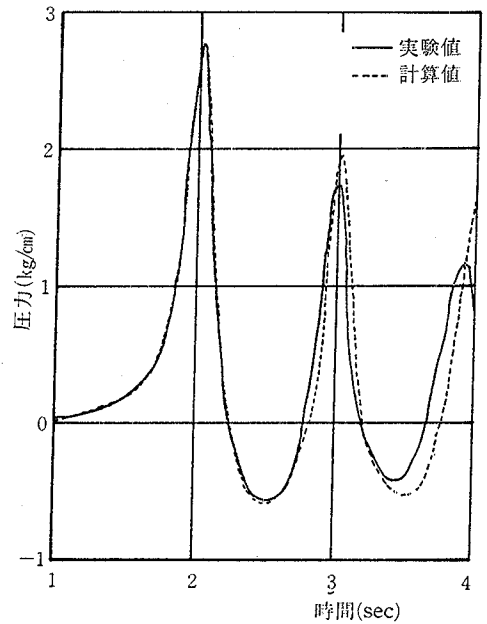


Fig. 9. バルブ閉鎖にともなう圧力の変化
(下流端のバルブを閉鎖し、バルブ位置における圧力変動、バルブ閉鎖時間；2秒、空気含有率；0.8%)

一方、第3章において述べた方法を用いて、解析を行った。これらの結果の比較を Fig. 8 および Fig. 9 に示す。Fig. 8, Fig. 9 から明らかのように、解析結果と実験結果はほとんど一致している。このことは、本論文において述べた方法により、水撃圧の推定が可能であることを示すものである。

5. ま と め

本論文において述べたことを、まとめると次のようになる。

(1) 管内流水中に空気が含まれている場合の水撃解析に必要な物理的諸量、すなわち、管内平均流速、平均密度、摩擦損失係数、圧力波の伝播速度および圧力変動にともなう空気の体積変化およびその弾性係数の計算方法について論じた。

(2) 管内流水中に空気が含まれている場合の水撃作用の基礎方程式を解くための、解析の幾何学的モデルを示し、それを用いた解析法を論じた。また、その解析の妥当性を実験結果と比較することから明らかにした。

参 考 文 献

- | | |
|--|---|
| (1) 小堀 巖ほか：導水管内圧力波の伝わり速度について、日立評論, 37 (10), pp. 33-37 (1955). | あわ膜流), 日機論集, 42 (355), pp. 877-884 (1975). |
| (2) Hsieh, D. Y. and M. S. Plesset: On the Propagation of Sound in Liquid Containing Gas Bubbles, <i>The Physics of Fluid</i> , 4 (8), pp. 910-975 (1961). | (5) 西山壯一：水撃作用の基礎方程式と異常圧力上昇, カンガイ用管水路の空気混入流に関する研究 (I) 香川大学農学部学術報告, 34 (1), pp. 107~114 (1982). |
| (3) 森 康夫ほか：二相流中の圧力波の伝播, 日機論集, 37 (317), pp. 305-312 (1973). | (6) Streeter, V. L. and C. Lai: Waterhammer Analysis Including Fluid Friction, <i>Proc. A. S. C. E. HY.</i> 3, pp. 79-112 (1962). |
| (4) 森 康夫ほか：二相流中の圧力波の伝播 (第2報, | |

(1982年5月31日受理)