論　説

陰関数定理・講義ノート（Ⅱ）

金　子　太　郎

陰関数定理の話を続けよう。

今回はラグランジュ関数 $L(x_1,\ \cdots,\ x_\ell,\ p_1,\ \cdots,\ p_\ell,\ I,\ \lambda)$ の１階の条件の式に陰関数定理を適用して需要関数

$$x_1 = h^1(p_1,\ \cdots,\ p_\ell,\ I)$$
$$\vdots$$
$$x_\ell = h^\ell(p_1,\ \cdots,\ p_\ell,\ I)$$

を導き出すことを目標にしよう。

陰関数定理

$U \subset R^n \times R^m$ を開集合（open set）とし，f を U 上で定義され値を R^m にとるベクトル値関数としよう。この関数 $f: U \to R^m$ と $(\bar{x},\ \bar{y}) \in U$ の点は以下の条件を満たすと仮定する。

① f は連続微分可能

② $f(\bar{x},\ \bar{y}) = 0$

③ $\det\ D_y f(\bar{x},\ \bar{y}) \neq 0$

であるとき，

$f(x,\ y) = 0$ は $(\bar{x},\ \bar{y})$ の近傍において $y = \phi(x)$ と表すことができる。

（$\phi : \Omega(\in R^n) \to R^m$ だから，

$$y_1 = \phi^{(1)}(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = \phi^{(m)}(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

という m 本の実数値関数によって構成されるベクトル値関数が存在する，という意味である。）

つまり，$(\bar{x},\ \bar{y})$ のある近傍 Ω が存在して，

① $(x,\ \phi(x)) \in U$　for $x \in \Omega$　　x が Ω の中を動いている限り，$(x,\ \phi(x))$ は U の中に入る。

② $f(x,\ \phi(x)) = 0$　for $x \in \Omega$　　だから，$f(x,\ \phi(x))$ を計算することができて，その値は 0 。

③ $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$　　ϕ のグラフは $(\bar{x},\ \bar{y})$ を通る。

④ ϕ は連続微分可能

本題に入る前に陰関数定理を使って限界代替率（Marginal Rate of Substitution, MRS）の説明をしておこう。

前稿で $f(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1$ という関数のグラフを高さが 0，$f(x,\ y) = 0$，x-y 平面の高さでヨコに切ったのと同じ様に，$u(x,\ y)$ という効用関数を高さが 0，$u(x,\ y) = 0$，x-y 平面の高さでヨコに切る。

$u : R \times R \to R$（図 1 のような関数をイメージして下さい）

u について以下のことを仮定する。

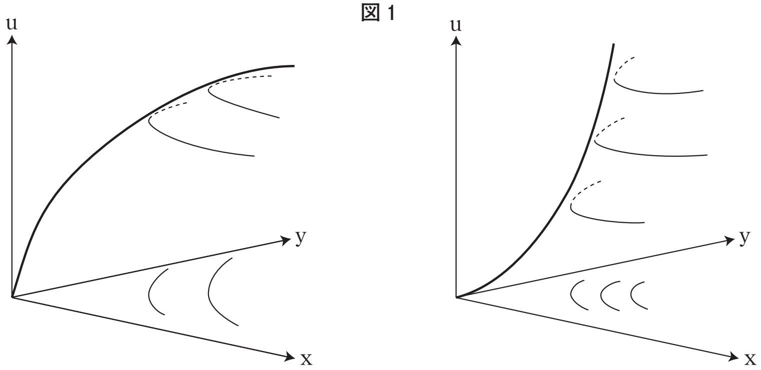
① 連続微分可能，つまり，

$Du(x,\ y) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,\ y),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\ y)\right)$ が存在し，ともに連続関数

② $u(\bar{x},\ \bar{y}) = 0$

③ $\dfrac{\partial u}{\partial y}(\bar{x},\ \bar{y}) \neq 0$

図 1



すると，陰関数定理から，$u(x, y)=0$ は $(\bar{x}, \bar{y})$ の近傍 Ω において $y=\phi(x)$ と解くことができる。$y=\phi(x)$ を $u(x, y)=0$ に代入すると，$u(x, \phi(x))=0$ となる。この関数は x だけの関数と見なせるから，これを $h(x)$ とする。

$$h(x)=u(x, \phi(x))=0 \quad \text{for } x\in\Omega$$

$h(x)$ の値は Ω の上ではずっと 0 で変化しないので，微分すると =0 である。

$$h'(x)=0 \qquad (1)$$

一方，h は合成関数である。

$$x\rightarrow\begin{pmatrix}x\\ \phi(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\rightarrow u(x, y)=h(x)$$

合成関数の微分公式（chain rule）から，

$$h(x)=\left[u\cdot\begin{pmatrix}x\\ \phi\end{pmatrix}\right](x)$$

$$h'(\bar{x})=Du(\bar{x}, \bar{y})\cdot D\begin{pmatrix}x\\ \phi\end{pmatrix}(\bar{x})$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x},\ \bar{y}) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\bar{x},\ \bar{y})\right)\begin{pmatrix}1\\ \phi'(\bar{x})\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x},\ \bar{y})+\frac{\partial u}{\partial y}(\bar{x},\ \bar{y})\cdot\phi'(\bar{x})$$

(1)(2)より

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x},\ \bar{y})+\frac{\partial u}{\partial y}(\bar{x},\ \bar{y})\cdot\phi'(\bar{x})=0$$

$$\phi'(\bar{x})=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x},\ \bar{y})}{\frac{\partial u}{\partial y}(\bar{x},\ \bar{y})}=-\frac{u_x(\bar{x},\ \bar{y})}{u_y(\bar{x},\ \bar{y})}$$ と記す。

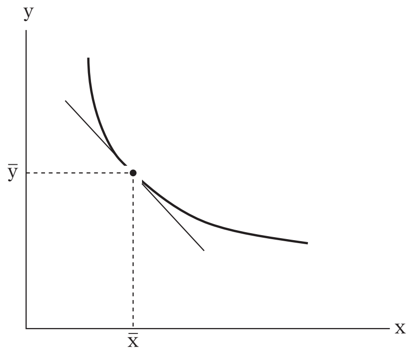
このように点$(\bar{x},\ \bar{y})$における無差別曲線の傾きは限界効用の比にマイナスを付けたものになっている。

無差別曲線の傾きにマイナスの符号を付けたものを限界代替率（MRS）という。限界代替率は限界効用の比に等しい。

$$-\frac{dy}{dx}=MRS_{xy}=\frac{u_x}{u_y}$$

$MRS_{xy}(\bar{x},\ \bar{y})$は$(\bar{x},\ \bar{y})$という消費点から x 財を限界的に 1 単位減少させ

図 2



る場合，効用を一定に保つにはどれだけの量の y 財の量が必要か（どれだけの量の y 財で代替できるか）を表している。x 財の価値を y 財の量で測っているのである。

需要関数は予算制約という条件式の下で効用関数を最大化することから導かれるのだが，予算制約式は線形の関数なので，説明をより一般的にするために，以下のような非線形の関数の制約条件下における最大化問題を考えてみよう。

U を平面 R^2 上の開集合とし，$f: U \to R$，$g: U \to R$ をともに十分なめらかな関数であるとし，

$$\begin{aligned}&\text{Max } f(x,\ y)\\&\quad \text{subject to } g(x,\ y)=0\end{aligned}$$

という問題を考えよう。

図 3 では，$g(x,\ y)=0$ という制約条件式を満たす $(x,\ y)$ の中で $(x^*,\ y^*)$ が $f(x^*,\ y^*)=20$ という最も高い値を達成している。その $(x^*,\ y^*)$ において f の等高線と g の等高線は接している。接しているということは共通接線を持っているということである。

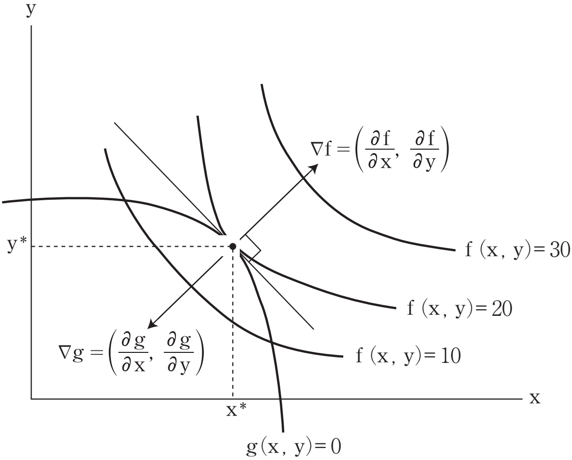
その共通接線に直交する

$$(x^*,\ y^*) \text{ における } f \text{ の導関数は } \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,\ y^*),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,\ y^*)\right)=Df(x^*,\ y^*)$$

$$g \text{ の導関数は } \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x^*,\ y^*),\ \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,\ y^*)\right)=Dg(x^*,\ y^*)$$

これは f，g が最も急に上昇する方向を示しており，勾配ベクトル（∇f，∇g，∇ の読み方は「ナブラ」）とも言うが，この場合，f，g の $(x^*,\ y^*)$ における勾配ベクトルは一直線上にあることになる。つまり，

図 3



$$Df(x^*,\ y^*) = \alpha \cdot Dg(x^*,\ y^*)$$

という実数 α が存在する，ということである。$Df(x^*,\ y^*)$ と $Dg(x^*,\ y^*)$ が反対の方向を向いていたら α は負で，$Df(x^*,\ y^*)$ と $Dg(x^*,\ y^*)$ が同じ方向を向いていたら α は正である。図 3 では前者の場合を描いている。

$$Df(x^*,\ y^*) - \alpha \cdot Dg(x^*,\ y^*) = 0$$

$-\alpha = \lambda^*$ と置くと，

$$Df(x^*,\ y^*) + \lambda^* Dg(x^*,\ y^*) = 0$$

つまり，$(x^*,\ y^*)$ が $g(x,\ y) = 0$ という制約条件を満たしつつ $f(x,\ y)$ の最大値を達成している点ならば，λ^* が存在して，上式の関係が成り立っているということである。

このことを正確に述べると，

定理

U を平面 R^2 上の開集合とし，

$f: U \to R$ を微分可能な関数

$g: U \to R$ を連続微分可能な関数とし（仮定１）

Max $f(x, y)$

subject to $g(x, y) = 0$

という問題を考える。

仮定２　$Dg(x^*, y^*) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*), \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)\right) \neq 0$

$Dg(x^*, y^*)$ はベクトルとして 0 ではないものとする。

以下では，一般性を失うことなく $\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$ とする。

仮定３　(x^*, y^*) がこの問題の局所解であるとする。局所解とは局所的な最大点のことだが，$g(x^*, y^*) = 0$ という条件を満たしつつ，(x^*, y^*) の近傍にあるすべての (x, y) について，

$f(x^*, y^*) \geqq f(x, y)$

が成り立っている点のことである。

そのとき，次の条件を満たす λ^* が存在する。

$$Df(x^*, y^*) + \lambda^* Dg(x^*, y^*) = 0$$

証明

$g(x, y) = 0$ の等高線を描く（図３の $g(x, y) = 0$ だけが描かれている図をイメージして下さい)。

g は連続微分可能で

$g(x^*, y^*) = 0$ で

$\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$

だから，陰関数定理が適用できて，$g(x, y) = 0$ という関数は (x^*, y^*) の近傍で $y = \phi(x)$ と解くことができる。

x が x^* の近傍 Ω を動く限り，制約条件 $g(x, y)=0$ を満たす (x, y) の軌道は x だけで決まり，$(x, \phi(x))$ と動く。そのとき目的関数 $f(x, y)$ の値はどうなるだろうか。

$f(x, \phi(x))$ は x だけの関数だから，

$$h(x)=f(x, \phi(x))$$

と書くことができる。

$h: \Omega \to R$ という 1 変数関数で，ϕ は連続微分可能で，f は微分可能だから，h は微分可能で，h は $x=x^*$ において極大値をとる，つまり，x^* の近傍を考える限り，$h(x^*)=f(x^*, \phi(x^*))$ を超える点は存在しない。ということは $h(x)$ を x^* において微分すると，

$$h'(x^*)=0 \qquad (1)$$

とならなければならない。

一方，$h(\cdot)$ は $x \to (x, \phi(x))=(x, y) \to f(x, y)$ という合成関数だから，h を x で微分すると，合成関数の微分公式（chain rule）から，

$$\begin{aligned} h'(x^*) &= Df(x^*, y^*) \cdot D\begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}(x^*) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \phi'(x^*) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \cdot \phi'(x^*) \end{aligned}$$

$\phi'(x^*)=-\dfrac{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)}$ ということはわかっているから, これを代入すると

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \times \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)}$$

ここで $\lambda^*=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)}$ と定義し，これを代入すると

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,\ y^*) + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,\ y^*) \quad (2)$$

(1)(2)より

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,\ y^*) + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,\ y^*) = 0$$

λ^* の定義式を変形すると

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^*,\ y^*) + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,\ y^*) = 0$$

上の２つの式をいっしょにすると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,\ y^*) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,\ y^*) \end{pmatrix} + \lambda^* \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,\ y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,\ y^*) \end{pmatrix} = 0$$

$$Df(x^*,\ y^*) + \lambda^* Dg(x^*,\ y^*) = 0$$

（証了）

ここで以下の２つの最大化問題を考えてみよう。

問題Ⅰ　Max $f(x,\ y)$　subject to $g(x,\ y) = 0$

上で示したように，$(x^*,\ y^*)$ がこの問題の局所解であるためには

$$Df(x^*,\ y^*) + \lambda^* Dg(x^*,\ y^*) = 0$$

が成り立っていなければならない。これを別々に書けば，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,\ y^*) + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,\ y^*) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^*,\ y^*) + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,\ y^*) = 0$$

そして，当然

$$g(x^*,\ y^*) = 0$$

が成り立っていなければならない。

問題Ⅱ　Max $L(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda g(x, y)$

関数 L が (x^*, y^*, λ^*) において極大値をとるとする。

つまり，(x^*, y^*, λ^*) が問題Ⅱの解だとすると，

$$DL((x^*, y^*, \lambda^*))=0$$

となっていなければならない。

これは

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, y^*, \lambda^*)=\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)+\lambda^*\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x^*, y^*, \lambda^*)=\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)+\lambda^*\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, y^*, \lambda^*)=g(x^*, y^*)=0$$

ということである。

すると，問題Ⅰ，問題Ⅱの必要条件は同じになる。だから，極値を与える候補の点を求めるときは，問題Ⅰを問題Ⅱのように変形して解いてよいことになる。このように制約条件付き極値問題は制約条件のない極値問題に変換して解くことができるのである。この解き方をラグランジュ乗数法といい，$L(x, y, \lambda)$ をラグランジュ関数，λ をラグランジュ乗数という。

関数の変数の数を (x, y) の 2 個から一般の ℓ（エル）個，ℓ（エル）次元ベクトル $x=(x_1, \cdots, x_\ell)$ とし，以下の制約条件付き最大化問題を考えよう。

Max $f(x)$

subject to $g(x)=0$

この場合も以下のことが成り立つ。先ほどと同様に f は微分可能，g は連続微分可能な関数とする。

定理　ある点 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ が，この制約条件付き最大化問題の局所解であるとき，

$$Df(x^*) + \lambda^* Dg(x^*) = 0$$

となる λ^* が存在する。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) + \lambda^* \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x^*) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) + \lambda^* \dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x^*) = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_\ell}(x^*) + \lambda^* \dfrac{\partial g}{\partial x_\ell}(x^*) = 0 \\ g(x^*) = 0 \end{cases}$$

これを条件付き極値の 1 階の条件という。これは必要条件である。

ラグランジュ乗数法によって極大値を達成する点（極大点）の候補になる点 $(x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ は求められる。それでは，どういう仮定が満たされているとき，$g(x^*) = 0$ という制約を満たしつつ，x^* という点は $f(x)$ という関数の極大値を与えているのだろうか。その仮定はどういうことを意味しているのだろうか。以下で十分条件について話を進めよう。

以下では，f，g は 2 階連続微分可能とする。これは 2 階のすべての偏導関数が存在し，それが連続関数になる，ということである。

$D_{ij}f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{ij}$ と記す。以下のような行列をつくる。これを縁つきヘッセ行列という。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \cdots\cdots & f_{1\ell} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots\cdots & f_{2\ell} & g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{\ell 1} & f_{\ell 2} & \cdots\cdots & f_{\ell\ell} & g_\ell \\ \hline g_1 & g_2 & \cdots\cdots & g_\ell & 0 \end{array}\right)$$

この行列の小行列式を考える。つまり，

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & g_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

これを $(\ell+1)\times(\ell+1)$ までつくる。

x^* における最初の小行列式の符号が正で，以下，負，正，…と交互に符号が変わる場合，x^* は極大値を与える点，極大点である。これらの小行列式の符号がすべて負である場合，x^* は極小値を与える点，極小点である。

これを条件付き極大値（または極小値）の 2 階の条件という。

x^* が極大点である場合，最後の $(\ell+1)\times(\ell+1)$ 行列の行列式は

$$(-1)^{\ell} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots\cdots & f_{1\ell} & g_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots\cdots & f_{2\ell} & g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_{\ell 1} & f_{\ell 2} & \cdots\cdots & f_{\ell\ell} & g_\ell \\ g_1 & g_2 & \cdots\cdots & g_\ell & 0 \end{vmatrix} > 0$$

と書く。これは

ℓ が偶数なら $(-1)^{\ell}=1$，行列式の部分は正，

ℓ が奇数なら $(-1)^{\ell}=-1$，行列式の部分は負

だからである。

これらのことを踏まえて，消費者の予算制約式の下での効用最大化から，どういう仮定の下でどのように需要関数が導かれるかを見てみよう。消費者が解く問題とは

Max $u(x)$

subject to $p_1x_1+\ \cdots\ +p_\ell x_\ell=I$

$x=(x_1,\ \cdots,\ x_\ell)$ は ℓ 次元ベクトル

$u(\cdot)$ は消費可能集合上で２階連続微分可能で，偏導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=u_i$

２階の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=u_{ij}$ と記す

（この仮定の下では $u_{ij}=u_{ji}$ となる（Young の定理））

また，以下の条件を満たすものとする（意味は後で説明する）

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$$\vdots$$

$$(-1)^{\ell}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1\ell} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots & u_{2\ell} & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{\ell 1} & u_{\ell 2} & \cdots\cdots & u_{\ell\ell} & u_{\ell} \\ u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_{\ell} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

また，以下では内点解を仮定する。

まず，ラグランジュ関数をつくる。

$$L(x,\ \lambda) = u(x) + \lambda(I - p_1x_1\ \cdots\ - p_{\ell}x_{\ell})$$

ラグランジュ関数を各 x_i と λ で偏微分して，＝0 とする。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = u_i - \lambda p_i = 0 \quad \text{for all i}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1x_1 \cdots - p_{\ell}x_{\ell} = 0$$

これを変形すると

$$u_i = \lambda p_i$$
$$\frac{u_i}{p_i} = \lambda \quad \text{for all i}$$

（最適な消費点では 1 円当たりの限界効用が等しくなる）

また，

$$\frac{u_i}{u_j} = \frac{p_i}{p_j} \quad \text{for all i, j}$$

（最適な消費点では限界効用の比（＝限界代替率）は価格の比に等しくなる）

$(x_1^*,\ \cdots,\ x_{\ell}^*)$ が消費者の予算制約を満たしつつ効用を最大化している各

財の消費量であるとするならば，これらの条件が成立していなければならないということである。これらは必要要件である。

いま，これらの計算から $(x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ という点が求まったとする。これらは予算制約を満たしつつ消費者の効用を最大化している各財の消費量になりうる点・消費ベクトルである。謂わば極大点になるための第１次選考を通った候補の点・消費ベクトルである。

この点・消費ベクトルが予算制約を満たしつつ消費者の効用を最大化している消費量である十分条件とはどのようなものだろうか。先に説明したように，縁付きヘッセ行列をつくる。

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots\cdots & u_{1\ell} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots\cdots & u_{2\ell} & -p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{\ell 1} & u_{\ell 2} & \cdots\cdots\cdots & u_{\ell\ell} & -p_\ell \\ -p_1 & -p_2 & \cdots\cdots\cdots & -p_\ell & 0 \end{pmatrix}$$

この小行列式

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & -p_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

これを $(\ell+1)\times(\ell+1)$ までつくり，点 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ において，最初の小行列式の符号が正，次が負，正，…となった場合，x^* は消費者の予算制約を満たしつつ効用を最大化している消費ベクトルである。これが十分条件である。

x^* が極大点である場合，最後の $(\ell+1)\times(\ell+1)$ 行列の行列式は

$$(-1)^\ell \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots\cdots & u_{1\ell} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots\cdots & u_{2\ell} & -p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{\ell 1} & u_{\ell 2} & \cdots\cdots\cdots & u_{\ell\ell} & -p_\ell \\ -p_1 & -p_2 & \cdots\cdots\cdots & -p_\ell & 0 \end{vmatrix} > 0$$

と書く。これは前に書いたように

ℓ が偶数なら $(-1)^\ell = 1$，行列式の部分は正，

ℓ が奇数なら $(-1)^\ell = -1$，行列式の部分は負

だからである。

ここで $u(\cdot)$ に課した行列式の仮定がどういう意味であるのか，を説明しよう。2 財の場合，$x = (x_1, x_2)$ に戻って説明しよう。

限界代替率（MRS）が限界効用の比になることはすでに説明した。

$$MRS_{12} = \frac{u_1}{u_2}$$

そして，限界代替率とは無差別曲線の傾きの絶対値である。

$$\frac{u_1(x_1, x_2)}{u_2(x_1, x_2)}$$

$$= \frac{u_1(x_1, \phi(x_1))}{u_2(x_1, \phi(x_1))} \qquad \leftarrow \text{陰関数定理}$$

この無差別曲線の傾きの絶対値の大きさが x_1 が大きくなるにつれてど

う変化していくかを見てみよう。

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_1(x_1,\ \phi(x_1))}{u_2(x_1,\ \phi(x_1))}\right)$$

$$=\frac{u_1' u_2-u_1 u_2'}{u_2^2} \qquad \leftarrow \text{分数関数の微分公式}$$

$$=\frac{(u_{11}+u_{12}\phi'(x_1))u_2-(u_{21}+u_{22}\phi'(x_1))u_1}{u_2^2}$$

$$\leftarrow \phi'(x_1)=-\frac{u_1}{u_2}\ \text{を代入して}$$

$$=\frac{(u_{11}-u_{12}\frac{u_1}{u_2})u_2-(u_{21}-u_{22}\frac{u_1}{u_2})u_1}{u_2^2}$$

$$=\frac{u_{11}u_2-u_{12}u_1-u_{21}u_1+u_{22}\frac{u_1^2}{u_2}}{u_2^2}$$

$$\leftarrow \text{分子と分母に}\ u_2\ \text{を掛けて}$$

$$=\frac{1}{u_2^3}[u_{11}u_2^2-u_{12}u_1u_2-u_{21}u_1u_2+u_{22}u_1^2]$$

$$\leftarrow u_{12}=u_{21}$$

$$=\frac{1}{u_2^3}[u_{11}u_2^2+u_{22}u_1^2-2u_1u_2u_{12}] \qquad <0$$

x_1 が大きくなっていくと，無差別曲線の傾きの絶対値は小さくなっていくとすると，この式は負になる。

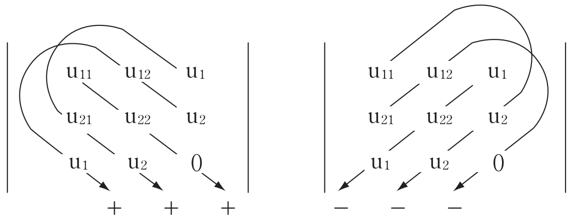
この式の値が負であることと縁付きヘッセ行列

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}$$

が正となることは同値である。

この行列は 3×3 なので，サラスの法則を使って計算できる。

サラスの法則とは



と計算してよい，ということである。だから，

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}$$

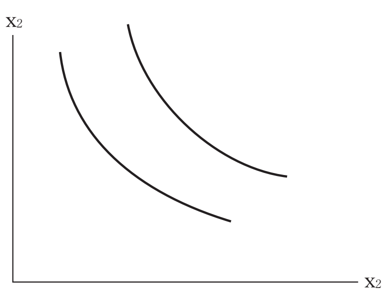
$$= u_1 u_2 u_{12} + u_1 u_2 u_{21} - u_{22} u_1^2 - u_{11} u_2^2$$
$$= -u_{11} u_2^2 - u_{22} u_1^2 + 2u_1 u_2 u_{12} > 0$$

このことを限界代替率逓減と言うが，このことは x_1 が大きくなるにつれて無差別曲線の傾きが常に緩くなっていくことを意味している。「常に」というのは「x_1 が大きくなっていくどの範囲においても」ということである。これは「無差別曲線が原点に対して強く凸」ということである。

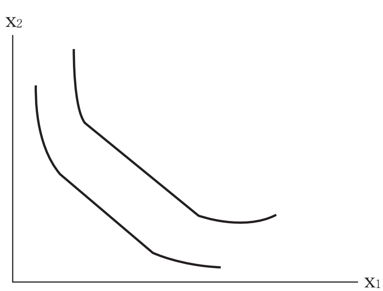
無差別曲線の上側の集合が凸集合になる関数を準凹関数（quasi-concave function）と言うが，ここでは効用関数がそれよりも強い条件である強い準凹関数（strictly quasi-concave　function）であることを仮定しているのである。ただの準凹関数ならば，無差別曲線がどこかで直線になることもあり得るが，強い準凹関数は x_1 が大きくなるにつれて無差別曲線は常にその傾きが緩くなっていかなくてはならない。

効用関数 $u(\cdot)$ が上記の条件を満たすという仮定は，$u : R \times R \to R$ の場

図 4



強い準凹関数



準凹関数

合，つまり，２次限平面に無差別曲線が描ける場合，無差別曲線がこのような強い意味で原点に対して凸，それ以上の次限の場合は無差別曲面，無差別超曲面が原点に対して強い意味で凸といったことを意味しているのである。

p. 3の図１に戻ってコメントしておくと，f が凹関数ならば準凹関数であるが，逆は真ではない（右図がその例）。

ラグランジュ関数のところに話を戻す。

$$L(x,\ \lambda)=u(x)+\lambda(I-p_1x_1\ \cdots\ -p_\ell x_\ell)$$

ラグランジュ関数を各 x_i と λ で偏微分する。極大点 x^* においては以下の条件（１階の条件）が成り立っている。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=u_i(x^*)-\lambda^* p_i=0 \qquad \text{for} \qquad i=1,\ \cdots,\ \ell$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=I-p_1x_1^*\ \cdots\ -p_\ell x_\ell^*=0$$

$(p_1,\ \cdots,\ p_\ell)$ と I は消費者が決める変数ではなく，外から与えられる変数（外生変数，パラメーター）だが，これらも変数に加えると，これらの $(\ell+1)$ 本の方程式は以下のようにとらえることができる。

$F(x_1,\ \cdots,\ x_\ell,\ p_1,\ \cdots,\ p_\ell,\ I,\ \lambda)=0$　　$2\ell+2$ 個の変数，値は $\ell+1$ 次元

① F は連続微分可能（← u は２階連続微分可能だったので）

② $F(x^*,\ p,\ I,\ \lambda^*)=0$

③ $\det\ D_{(x,\ \lambda)}F(x^*,\ \lambda^*,\ p,\ I)\neq 0$

この③が成り立つことは縁付きヘッセ行列の仮定と以下の計算によって確認できる。

$$\det D_{(x,\ \lambda)}F(x^*,\ \lambda^*,\ p,\ I)$$

$$=(-1)^{\ell}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots\cdots & u_{1\ell} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots\cdots & u_{2\ell} & -p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{\ell 1} & u_{\ell 2} & \cdots\cdots\cdots & u_{\ell\ell} & -p_{\ell} \\ -p_1 & -p_2 & \cdots\cdots\cdots & -p_{\ell} & 0 \end{vmatrix}$$

$u_i=\lambda p_i$ が成り立っているのだから，$-p_i=-\dfrac{u_i}{\lambda}$ を代入して

$$=(-1)^{\ell}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots\cdots & u_{1\ell} & -\dfrac{u_1}{\lambda} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots\cdots & u_{2\ell} & -\dfrac{u_2}{\lambda} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{\ell 1} & u_{\ell 2} & \cdots\cdots\cdots & u_{\ell\ell} & -\dfrac{u_{\ell}}{\lambda} \\ -\dfrac{u_1}{\lambda} & -\dfrac{u_2}{\lambda} & \cdots\cdots\cdots & -\dfrac{u_{\ell}}{\lambda} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\ell}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots\cdots & u_{1\ell} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots\cdots & u_{2\ell} & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{\ell 1} & u_{\ell 2} & \cdots\cdots\cdots & u_{\ell\ell} & u_{\ell} \\ u_1 & u_2 & \cdots\cdots\cdots & u_{\ell} & 0 \end{vmatrix}>0 \quad \leftarrow u(\cdot)\text{ の仮定より}$$

このように $\det D_{(x,\ \lambda)}F(x^*,\ \lambda^*,\ p,\ I)\neq 0$ となっている。

よって，陰関数定理が適用できて，かつ，条件付き極大値の２階の条

件は満たされているから，$x^* = (x_1^*, \cdots, x_\ell^*)$ は予算制約式を満たす $x = (x_1, \cdots, x_\ell)$ の中で効用を極大にしているものとして，需要関数

$$\begin{aligned} x_1^* &= h^1(p_1, \cdots, p_\ell, I) \\ &\vdots \\ x_\ell^* &= h^\ell(p_1, \cdots, p_\ell, I) \end{aligned}$$

が求まる訳である。

$$\lambda^* = h^{\ell+1}(p_1, \cdots, p_\ell, I)$$

も求まり，これらはすべて連続微分可能な関数となるのである。

参　考　文　献

Hicks, J. R.　*Value and Capital*, Oxford : Clarendon Press　1939 年

Mas-Colell. A., M. D. Whinston and J. R. Green　*Microeconomic Theory*, Oxford Universty Press　1995 年

Samuelson, P. A　*Foundations of Economic Analysis*, Cambridge Mass : Harvard University Press　1947 年

岡田章『経済学・経営学のための数学』（東洋経済新報社　2001 年）

小山昭雄『経済数学教室 5　微分積分の基礎　上』（岩波書店　1995 年）

高木貞二『解析概論（改定第三版）』（岩波書店　1961 年）

福岡正夫『一般均衡理論』（創文社　1978 年）

（かねこ・たろう　法学部教授）