

「算数科研究」の授業と今後の課題

内藤浩忠
(数学教育講座)

760-8522 高松市幸町1-1 香川大学教育学部

Report on the Practical Instruction in "Study of Arithmetic"

NAITO Hirotada

Faculty of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522

要 旨 香川大学教育学部において開講されている「算数科研究(口)」について授業内容を紹介し、今後の課題に言及した。この科目は教員免許法にいう小学校教科専門「算数」に該当するものであり、算数に関する専門的知識の提供を目標としている。本授業では、小学校の算数科で教える内容の背景となる知識を提供することに努めた。

キーワード 算数科 教科研究 小学校教科専門

1 はじめに

香川大学教育学部では小学校免許科目の内、算数科に関する授業科目として「教科に関する科目」に対応する「算数科研究」と「教職に関する科目」に対応する「算数教育法」が開講されている。免許科目の改訂に伴い平成11年度入学生からは中学校免許における専門科目の最低修得単位数が以前の40単位から20単位に減らされた。専門科目から教育法の科目に重点を移した結果である。そのため数学教育講座では、学部の専門科目を担当していた教官と教科教育科目を担当していた教官との担当科目数に不釣り合いが発生した。そこで負担の平等化を図るため、専門科目を担当していた教官も教科教育法の科目や小学校教科専門科目である「算数科研究」を担当することになった。数学を専門としてこれまで研究・教育に携わってきた教官も、教育法や「算数科研究」を担当することにより

教員養成を担う教育学部の教官としての自覚が高められるばかりではなく、研究を継続してきた途上で蓄積してきた数学の専門的知識を活かすという点からも、学部における教育活動に資するところが大きいであろうとの判断からの決定であった。

「算数教育法」は主として授業実践を中心とした科目であり、「算数科研究」は教科に関する専門的知識の提供という位置づけが与えられている。そこで筆者は小学校における算数科の背景となる知識として、半年間という限られた時間でどのような内容を教材として取り上げるかを考えた。そこで本稿では、「算数科研究」の授業で取り上げた内容及びそれに対する受講生の反応を報告し、今後の課題を検討してみたい。「算数科研究」は前期と後期に開講され、それぞれ(イ)と(ロ)で区別し、筆者は後期に(ロ)を担当した。以下では2002年度の講義を中心に報告する。

2 算数科研究の目標

前節で述べたとおり、実際の授業をいかに進めるかということテーマとするのは「算数科研究」にはそぐわない。そこで本授業では、小学校の算数科で扱う内容の理解を深められるような知識や数学における考え方を解説し、それによって算数科の教材を高い視点から見渡す能力を受講生が獲得できることを目標とした。これが深く教材研究を行うだけでなく教材開発を行う実力をつけることにもつながると思うからである。

本学部の数学教育担当教官の報告（未発表）によれば、小学校の教科で教えるのに自信のある教科は何かという問いでは、「算数」が上位になるとのことである。その理由としては、算数は答えが1つしかないから教えやすいとのことである。実際には答えは1つであっても、正解に至る過程には複数の可能性がある。また正解を得られない子どもがつかずいている点を見抜くということが教師には重要であることは当然ではあるが、間違え方は正解に至る過程よりもはるかに多様なため、その誤りを理解し修正することは難しい活動となる。このような「算数を教える難しさ」を感じて欲しいということも筆者の授業に向けた願いの一つである。

受講生の中には数学は難しくてわからなくなってしまったが、算数ぐらいならわかると思っている学生が少なからずいることは、講義後に提出させている授業に対する感想文からも推測される。しかし面積や体積の公式の中には、高校の数学を使わなければ証明できないものもある。だからといって、小学生に説明できないものを教える必要はないなどと筆者は主張するつもりはない。証明ができないことでも納得させる工夫をするべきである。どこまでが小学生に証明できて、どこからが証明できない事柄であるかという境界を知らなければ、十分な教材研究はできないはずである。

小学生にもわかる教材でも、意外と根が深い数学に繋がっていることもある。算数科研究の授業では、そのような教材も取り上げることに

よって数学という学問の深遠さを感じ取らせることも本授業の目標の一つである。

3 算数科研究の授業内容

小学校の算数科の内容は4つの領域からなる。学習指導要領によれば、それらは、1数と計算、2量と測定、3図形、4数量関係、である。そのうち数量関係は小学校第3学年から本格的に扱われるので、本講義の時間数の関係からも解説はしていない。授業最初の時間で指導要領や算数・数学における考え方を述べた後、各領域を3回から4回をかけて講義している。冬休みには簡単なレポート問題を与え、その際に今まで習った算数や数学の中から疑問に思っていることも書いて提出させ、冬休み後の授業で時間的に余裕のある限りその解説を行っている。

以下では順次、講義で解説している内容を報告する。

3.1 数と計算

「数と計算」に関しては、数の四則演算を講義で取り上げている。小学校で習熟してしまえば、機械的に計算することは誰にでもできるものである。積み算による計算がよく使われる方法であるが、足し算やかけ算の時の位の繰り上がりや引き算の時の繰り下がりなどをまちがうものは、本学部の学生の中にはケアレスミスを除けば全くない。計算の原理などを、考えるまでもなく、いわば機械的に答えが出せるのである。確かに計算をする際にはいちいちその方法の原理まで考えて実行する必要はないが、教える立場の間はその原理をしっかりと理解していなければならない。それが曖昧であれば、子どもの質問に適切な対応ができない。慣れてしまった者には当たり前であっても初めて習う子どもにとっては戸惑うことも多い。また、慣れてしまった者が当たり前と思っていることを説明することもまた、難しいのである。

そこで計算にまだ慣れていない状況を設定し、初学者の戸惑いを体験するための手段として、数を3進法で表し、3進法のままで計算すると

いうことに取り組ませている。筆者がこの授業を担当し始めた最初の頃は2進法でやっていたが、その場合は引き算の繰り下がりが単純すぎて面白くないため、3年目に担当したときから3進法に変更した。3進法も普段使っている10進法も記数法の原理も計算の原理も全く同じ考え方である。記数法はいくつかずつ（10進法ならば10個、3進法ならば3個）まとまれば1つ上の位に繰り上げるということである。計算方法の正当性はすべてこの記数法から説明ができる。整数の四則演算から始めて、小数や分数の四則演算までを各自に実行させ、その方法の説明を考えさせながら講義を進めている。これらについては、全員の学生が理解できている。授業で取り上げている演習問題をいくつか挙げてみる。

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 21 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ - 22 \\ \hline \end{array}$$

たし算での繰り上がりはわかりやすいが、右の引き算では戸惑う受講生が多い。10進法の時の計算原理まで戻って考え3進法の時にもその考え方が応用できることをわからせるように心がけている。

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 101 \\ 12 \\ \hline 221 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1.1 \\ \times 2.1 \\ \hline 11 \\ 22 \\ \hline 10.01 \end{array}$$

かけ算の左の問題では、下から2行目をなぜ1つずらすのかということ、右の問題では小数点の位置をなぜそこにするかという理由を説明させている。そうすることにより記数法の原理などを復習させている。わり算の問題は省略するが、商を立てるときの難しさを学生は3進法で計算するときを感じている。

実行してみればわかることだが、分数の足し算・引き算は難しい。それは、通分するとき共通の分母をいくつに取るかがすぐにはわからないのである。3進法で表された2つの分数の分母の最小公倍数がすぐにはわからないからで

ある。10進法の時にすぐに見つかるのは、かけ算の九九が頭に入っているからである。実際、10進法で $1/4 + 1/6$ を計算せる時には誰でも分母を12にするであろうが、この問題を3進法で表した $1/11 + 1/20$ を計算するとき分母を110に合わせることに気づく者は少なく、多くは220にして計算してしまう。その結果、答えを約分し忘れることもある。実は10進法でも分母の素因数に2桁より大きい数が現れてくると難しくなるものである。 $1/91 + 1/143$ の計算で分母を1001にすればよいことがわかるには時間がかかるものである。

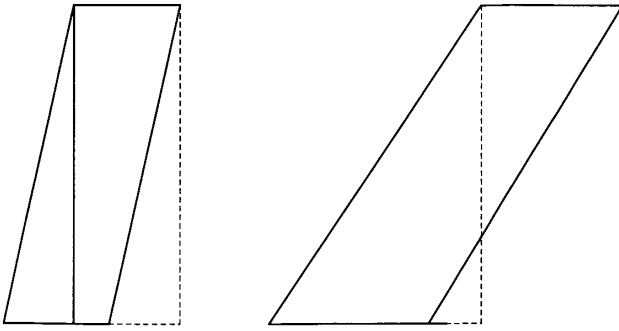
この演習を通して、九九の指導が分数計算でも重要になってくることを実感して欲しいと思っている。

3. 2 量と測定

「量と測定」については、面積や体積の公式を解説している。1辺が1 cmの正方形の面積を 1 cm^2 とすることは約束として決められていることであるので証明する事柄ではないことを注意してから、正方形と長方形の面積の公式を導く。1辺の長さが1 cmの正方形のタイルを何枚使えば正方形や長方形が覆い尽くせるかを考えるわけである。しかしこの方法では辺の長さが整数でなければ説明できないことに言及し、1辺の長さが小数の場合にはどのように説明するかを定期試験に出題する旨を伝えている。この問題は「数と式」の領域との融合的な問題となるので、教材研究を行わせるには良い課題であると言えよう。

次に面積の公式を導く際に使っている基本的な原理は、合同な図形の面積が等しいことと、重なりがないように2つの図形をつなげてできた図形の面積はそれぞれの面積の和に等しいという2点だけであることを確認した後に、平行四辺形、三角形などの面積の公式を導いていく。

次ページ左図の平行四辺形で左の三角形を右の点線の三角形に移動することで説明する。この際に上記の2つの原理が使われていることを確認している。小学校の教科書ではこのような

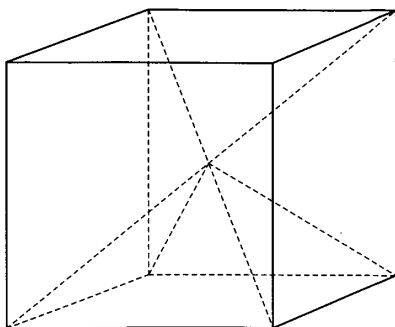


説明をしているが、実は右図のような平行四辺形ではこの操作がうまくできない。右下の点線の部分がはみ出してしまうからである。そこで子供からこのような疑問が提出されたという想定で、解決法を考えさせていくのである。

小学生には明確には教えないが、上の操作でも図形の合同の概念が使われている。このような場面をとらえ、中学校で学習する図形の証明も教師の側は意識していなくてはいけないことを強調している。

次に円の面積の解説をするのだが、円を直径を使って n 等分し、 n を無限大にするという極限操作を施して得られるものが円の面積の公式である。厳密にやろうとすれば高校3年で習う三角関数の極限を使わなくてはいけないので、小学生には証明できるものではない。このようなことにも触れつつ、小学校で円の面積を扱う際の留意点に言及する。

円錐や角錐の体積が底面積に高さを掛けたものを3で割ったものに等しいことも、証明するには積分を使わなくてはいけない。そこで説明の一手段として、立方体をその中心を頂点として各面を底面とするような6個の四角錐に分けることを解説している。そのようにしてできた四角錐の高さが $1/2$ になるので「3で割る」ということが体験できるというわけである。



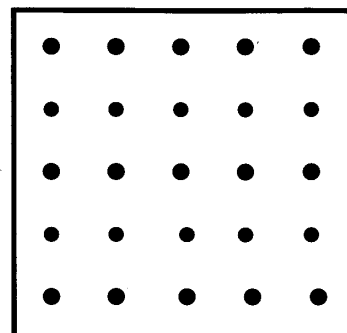
このような四角錐を6個作らせてそれらをつなぎ合わせて立方体を作る作業をやらせている。上図において底面に描いてある四角錐を6個作るわけである。四角錐の側面をいかに作図するかがポイントである。三平方の定理を使って側面の三角形を求めている受講生が多いが、実はこれには小学生に説明できる手段がある。その手段というのは立方体を斜めに半分に切った模型を見せることである。作るべき四角錐の側面の形を見ることができるのである。このような方法を、受講生が四角錐を完成した後に各自に考えさせている。

球の体積の公式も積分を使うので高等学校の数学が必要になる。球の表面積を求めるには、重積分が必要になるので、少なくとも大学初年級の解析学の知識が必要である。ただしこの場合には球の中心を頂点とする小さな円錐が集まって球が近似できるので、円錐と球の体積の公式を使って球の表面積を求める公式を説明できる。

このようにして、算数で扱われている内容と中学校・高校の数学との関連を示すことで、受講生が小学校算数のその後の発展にも気を配り、算数・数学の系統性などを意識させるようにしている。

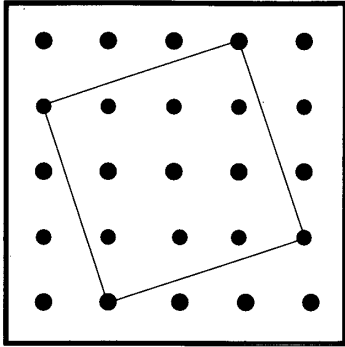
4.2 図形

「図形」については、教具としてはジオボードを活用している。ただし受講生の数に比べてジオボードが少ないので数人ごとに1つずつ渡し、全員にはジオボードの釘の部分に印刷したものを配り、輪ゴムを掛けるかわりに鉛筆で直線を引くことによって作業をさせるようにしている。下の図は 5×5 のジオボードを表したものである。



る。

ジオボードを用いた算数の課題には様々なものが考えられるが、筆者の授業ではこのジオボード上で何種類の正方形が作れるかというものを取り上げている。



ジオボードの枠に平行な正方形が4種類あるのはすぐに分かるが上図のように斜めに置かれたものを4種類見つけるには少し時間がかかる。

次にそれぞれの正方形の面積を求めさせる。その方法はいろいろとあるが、1つの方法は、斜めに置かれた正方形の各頂点が辺に乗っているようなジオボードの枠に平行な正方形を考え、大きい正方形の面積から4つの直角三角形の面積を引き去るものである。これは中学校で学習する三平方の定理の予習となる考え方であることを注意し、小学校で教える内容も上級につながっていることを教唆している。時間に余裕があれば、図形の内部に含まれる釘の数を数えるだけで面積が求まるという「ピックの定理」についても簡単に触れるようにしている。

最後にジオボードが無限に広がっていて釘が格子点上に続いているという状況で、正方形を作りその面積を求めると、出てくる整数と出てこない整数があることを調べさせ、それらの規則性を考えさせる。その上で、講義では、4で割った余りが3になる数が出てこないことと、出てくる数同士の積を計算すると、その数を面積とするような正方形がジオボード上に作られることを説明している。これは複素数を使うことで証明ができるので、ジオボード上で作られる正方形の面積といった一見簡単なようにみえる課題が、高等学校の数学にもつながっているという深さを受講生は体験することになる。実

はジオボード上にできる正方形の面積が作る数の性質は整数論の深い結果の現れである（文献（内藤）参照）。筆者自身の専門とする分野に由来する教材の発見は、教科専門担当教官としての知識が教科教育にも十分貢献できる1つの例になっていると思われる。

5 受講生の反応

筆者が行っている授業を概観してきた。以下では、1コマの授業の終了後に書かせている感想文や、定期試験の時の感想などから受講生の反応を報告するとともに筆者の反省点を述べたい。

5.1 数と式

感想1 ずっと10進法ばかり使っていたので3進法で位が変わるときに抵抗を感じた。小学1年生にとって10進法で位が変わるときと同じように感じると思うのでそういうところを注意して指導できるようにしたい。

感想2 （3進法による）たし算や引き算はけっこう簡単に、スムーズに計算することができたが、かけ算やわり算は何となく分かりにくかった。小数は、整数のときと、それほど違わないし、10進法とも同じようだったので、分かった。分数の計算では、約分できることや、最小公倍数を見つけることがむずかしく感じた。まだ、頭の中に10進法のやり方があるせいか抵抗も感じた。

感想3 10進法で今まで習ってきた私にとって、3進法は初めはすごく分かりにくかった。10進法があたり前で、それ以外で計算するのは難しいものがあつた。今までずっと10進法しかしていないので“慣れ”はすごいと思った。3進法の考え方がどうにも受け入れられないところがあつた。でも、毎週しているうちにちゃんと理解できるようになったし、計算もできるようになった。これだと、3進法以外でもできるかとも思う。今までとは全く違う感覚で、新鮮さが

あって楽しかった。でも、やはり基本的な数の感覚は10進法で、3進法をするときはかなり切り換えが必要である。また、ここまで理解できたのは1問1問ゆっくりと考える時間が十分にあったからだと思う。小学生に教えるときに1人1人の子どもにしっかり目を向けてみんなが理解できるように進めていかないといけないことも分かった。

感想4 小数のかけ算で、小数点の位置は学校で教えられたまま覚えていてその意味などは今まで考えたことがなかった。きょうのは3進法だったかもしれないが、よく考えてみるとちゃんと納得のできる理由があつてすっきりした。初めはさっぱり意味のわからなかった3進法も、最近の問題が出てもすぐに解けるようになり、ちょっと楽しいです。

以上の感想を見る限りは筆者の意図が伝わっていると判断できる。10進法の時でもやり方だけは知っているが、その方法が正しい理由まで考えたことがない受講生が多いので、それを反省する機会になってくれたことは、ねらいが達成されていることを示していると考えられる。

5. 2 量と測定

平行四辺形や円の面積の公式の説明は、受講生にとっては易しすぎるしよく知られているものであろうと筆者は思っていた。しかし定期試験の際の次の感想（その部分だけを抜粋）を目にしたとき、やはりきちんと説明をしなければならぬ事項であることがわかった。今後も続けていくつもりである。

感想5 この授業を受講するまでは、算数は公式を暗記する授業だと思っていましたが、そうではなく、公式は説明することができるし、1つ1つの公式には奥深い世界があることが分かりました。

次の2つの感想は、四角錐の体積を取り上げた授業後の感想である。

感想6 三平方の定理を使うのは便利だけれど使い方を間違えると逆に難しかった。三平方の定理を使わずに小学生に教えるためにはコンパスと定規だけを使った教え方があることを知った。立方体を中心から6つの四角すいを作ったのは初めてだったが、意外に難しかったが、6つあわさって1つの立方体ができたのは感動的だったので小学生にもぜひ作らせてあげたい。

感想7 難しかった。小学生に説明できるのだろうかと疑問だった。ルートが出てくるから、無理ではないかと思った。立方体を分解していったら、だんだん分かってきた。奥深いなあ〜と思った。

中には三平方の定理を忘れてしまっている学生もいることから、高校までの数学の知識を前提として授業を進めることは妥当ではない。適宜復習をさせることが重要であるが、小学校算数の内容に関連づけながらしなければ受講生の興味を引くことはできないと思う。一方、本授業を担当して、本学部の学生は実際に作業をさせることが好きであるという印象を持った。小学校で算数を教える際には、作業的な活動を取り入れることが重要である。それゆえ本授業のような大学の授業であっても、受講生に作業的な活動の楽しさを体験できる場を提供することには意義があるが、時間がかかるという難点もある。小学生が興味を引くような活動を考案する実力を養うための教材も開発しなくてはいけないと思う。

次に定期試験に予告出題した、1辺の長さが小数になる場合の長方形の面積の公式の説明についての解答に触れたい。ほとんどの受講生は具体的な数字をあげて、その場合について説明をしていた。担当した最初の年にはその場合だけの説明をしている解答ばかりであり、そこから一般の場合でも正しいことを示唆するような説明は全くなかった。最近は少数ではあるが出てくるようになったが、具体的な場面をもとに説明するだけでなく、それを一般化して理解することの大切さや必要性についても、今後の

授業の中で折に触れて強調することも必要であろう。

5. 3 図形

本稿で紹介した課題では、時間をかければ全ての正方形を見つけ出すことはできるが、これで全てであるということを説明できる受講生は少ない。「もう見つからないからこれで全部である。」という考え方では理解したとは言えないので、これを改めるようにすることは大切である。

感想8 複素数とか高校の時以来で、とてもなつかしく思った。正方形の面積を導き出すための法則みたいなのが分かった。また、私は数Ⅱ・Bまでしかとっていないため、レベルが上がるとちんぷんかんぷんだ。数学(算数)は奥が深いなあをつくづく感じた。

感想9 ジオボードでは小学生にとって親しみやすいすごく学びやすいおもしろい教材だと感じた。これを使い、中学への三平方の定理にスムーズにつなげていくこともできる。今までの授業を受けて、考えたことのないことやあたりまえのこととして受けとめていたことについてもう一度考えたりする機会ができてすごく勉強になった。

6. 今後の検討課題

本稿で報告したように、算数の4領域の内の3領域については「算数科研究」の授業の素材を開発し授業を通してその妥当性などを検討することができた。しかし「数量関係」に関する素材は開発できていない。そこで「数量関係」の教材を早急に開発していきたいと考えている。しかし半期15回という講義回数を考えると現行の内容以上のものは盛り込めないのが実状である。比や比例は「数量関係」の領域で扱われる内容であり、この考え方は中学校高等学校の数学ばかりではなく、理科においても活かされる内容なので解説する必要性が高い。初年度には塩水の濃度に関する問題を解かせてみたが、1

回の講義時間しか取れずに中途半端なものになってしまった。このことも念頭に置きつつ、今後どのような素材がもっとも適切かを検討していく必要がある。

「数と計算」、「量と測定」や「図形」の中でも教材をさらに充実させなくてはいけない。

感想5にあるように、算数・数学を暗記科目のようにとらえている学生が多いことが残念である。「考える科目」であることを今後とも強調していきたいと思う。数学を専攻していない学生に対しては、算数・数学のおもしろさを伝えるにはこの講義が最後の機会になるかもしれないので責任を感じる。平成11年度の免許法の改定に伴い、本学部では小学校教科専門算数に該当する「算数科研究」は必修ではなくなった。この科目は前期は他の教官が担当しており、後期に開講されている筆者の科目の受講生を合わせても例年70名程度である。「算数科研究」を受講していない学生の方が数学に苦手意識を持っていることが推測される。しかしそのような学生に対してこそ算数の楽しさやおもしろさ、奥の深さを講義をすることが重要であろう。算数に限らず全ての小学校教科専門科目を履修するように奨励することが望まれる。

文献

内藤浩忠(2000)「正方形の面積に潜む整数論」数学研究(香川県高等学校教育研究会数学部会誌)44巻5-8

付記 本稿は2002年度の香川大学教育学部研究開発プロジェクト経費による研究「教員養成学部における数学教育の新カリキュラムの開発研究」の一環として執筆された。執筆に際して貴重な御助言をいただいた長谷川順一氏に感謝いたします。