香川大学教育実践総合研究（*Bull. Educ. Res. Teach. Develop. Kagawa Univ.*），28：35－44，2014

面積に関する基礎概念について（２）
―小学校第１～５学年の児童を対象とした調査とその結果―

長谷川　順一　・　吉川　雄基*
（数学教育）　（吉野川市立西麻植小学校）

760－8522　高松市幸町１－１　香川大学教育学部
*776－0020　吉野川市鴨島町西麻植絵馬堂85－２　吉野川市立西麻植小学校

On Fundamental Concepts Related to Area Measure in Elementary School Mathematics: Results of Inquiry about Area Comparison Problems

Junichi Hasegawa and Yuki Yoshikawa*

Faculty of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522
**Nishioe Elementary School, 85-2, Nishioe Emadho, Kamoshima-cho, Yoshinogawa 776-0020*

要　旨　小学校第１～５学年の児童を対象とし，面積を比較する問題を用いて調査を行った。正方形からなる図形の面積の大小判断は第１学年で，面積に関する論理的推論は第２学年でおおよそ達成されていると考えられる。一方，等周長図形の面積比較問題については，第２学年から誤反応が多くみられる。これらの結果をもとに，算数における面積指導のあり方について検討した。

キーワード　面積　任意単位　面積に関する推論　等周長図形の面積　算数

１　はじめに

面積に関する学習は，小学校第１学年で，面積の直接比較，間接比較，任意単位による測定が扱われ，その後，第４学年で面積の単位や正方形，長方形の求積公式が扱われる。第５学年では，平行四辺形や三角形などの図形の求積公式が扱われる。そこで，小学校算数の各学年で扱われる「面積」の学習に先立って実施するための事前調査問題を作成し，国立大学教育学部附属小学校第１，４，５学年の児童を対象として実施した。その結果，いくつかの正方形からなる図形の面積を比較する問題については，第１学年でおおよそ達成されていた。面積に関して論理的な推論を要する問題については，１年生の正答率は４～５割であり，４年生でおおよそ達成されていた（問題は後述する）。一方，等周長図形の面積を比較する問題では，１年生よりも４年生や５年生で誤反応が多くみられた。全体的には，面積判断の様相について，１年生と４，５年生では大きな異なりがみられた（長谷川･吉川，2013）。

この調査は面積単元の事前調査として実施されたため，算数の授業で「面積」に関連する内容が扱われない第２，３学年では調査がなされなかった。そこで，第１～５学年の児童を対象

とした調査を行い，それによって面積の比較を問う問題の学年による正答率の推移を検討することや，面積の指導に対する示唆を得ること，及び面積単元の事前調査問題を作成するための基礎資料を得ることなどを目的として改めて調査を実施した。本稿では，その結果を報告し考察を加える。

2　調査とその結果

本調査の目的は，上に述べた通りである。調査問題は，先に述べたように，面積単元の事前調査として作成したものを，そのまま用いた（ここでは，その調査を「前調査」という）。以下では，調査問題の構成と調査方法を示す。

2．1　調査の方法

短時間で実施できるよう，問題は以下に概要を示す基礎的なものとした。

①　正方形からなる図形の面積を比較する問題（４題）

②　面積に関する推論問題（ひょうたん池の問題；２題）この問題は，Piagetら（1960）が児童の面積判断を発達的観点から検討するために用いた牧草地の面積比較問題を参考に作成したものである。

③　等周長図形の面積を比較する問題（２題）等周長の正方形とひし形，及び等周長の正方形と長方形の面積を比較する問題であり，細谷（1968），西林（1988）によるものである。

詳しい問題文や図は，次の節で示す。

このような問題から問題冊子を作成し，香川県の公立小学校の第１～５学年の児童を対象として，2012年３月中旬に調査を実施した。１年生，４年生，５年生は，それぞれの学年で扱われる「面積」の単元の学習を終えていた。１年生，２年生用の問題冊子では，難しい漢字は用いず，漢字にはルビを振るようにした。また，調査の実施時には，実施者である学級担任の先生に問題文を読み上げてもらい，その後回答する時間を取ってもらった。３～５年生については，学級担任の先生に問題冊子の配布と回収を依頼し，通常の調査やテストと同様の対応をお願いした。以下では，それぞれの問題及び結果を示す。

2．2　調査結果

調査に参加した児童数は，１年生137名，２年生146名，３年生150名，４年生153名，５年生145名であった。以下に示す結果について合計人数が異なるところがあるが，それは当該の問題に回答しなかった（回答欄が空欄であった）児童がいたためである。回答に要した時間は，第１学年では30分程，第２学年では15～20分，第３～５学年は10分程度であった。以下で「正答」の語を用いることがあるが，それは正答である選択肢を選択したことを意味する。

（1）正方形からなる図形の面積を比較する問題

この問題では，図形を構成する正方形の個数を数えることによって面積の大小あるいは同等を判断することができる。問題は「同じ大きさのましかく（正方形）をならべて，形を作りました。次の①～④について，それぞれ，左の形と右の形のどちらが広いか，くらべます。『左のほうが広い』『同じ広さ』『右のほうが広い』のどれか１つに，○をつけましょう。」であった。

問題文に続いて４対の図形と選択肢を示し，図形の対ごとに選択回答させた。図１は，図形対の提示例（問題①），及び図形の対（問題②～④；選択肢は略）を示したものである（正方形の１辺の長さは約16㎜であった）。

表１は，それらの問題の正答率を学年別に示したものである。

どの学年も，④の正答率が最も低い。児童の「同じ広さ」以外の回答をみると，前調査と同様，「左の方」よりも「右の方」を選択する児童がやや多くみられる。選択の理由は不明であるが，④の右の図形の横の長さ，縦の長さが左の図形に比べて長いことから，図形の部分への中心化に基づく判断が推測される。

図２は，各問題で正答に１点，誤答に０点を

与えたとき（４点満点），１～４点であったものの割合を学年ごとに表したものである（０点はみられなかった）。帯グラフ内の数値は，それぞれの点数の人数を表す。

どの学年も，４点のものが80％以上みられる。図形を構成する正方形を単位とし，その個数をもとに面積の大小や同等が判断できる問題については，１年生でおおよそ達成されていると考えられる。

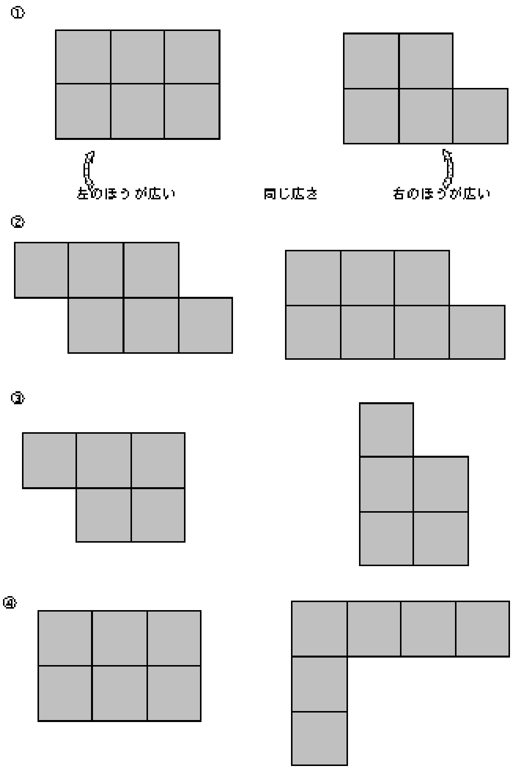

図１　正方形からなる図形の面積比較

（２）面積に関する推論問題（ひょうたん池の問題）

問題は次のようであった。「町の公園には，東池と西池の２つの池があります。①２つの池はひょうたんの形をしていて，その形や大きさはどちらも同じです。２つの池には，形や大きさが同じながしかく（長方形）の島がありますが，島のある場所はちがいます。下の図で，東池と西池の水の入っているところ（黒く色のぬってあるところ）の広さは，どちらが広いでしょうか。それとも，同じ広さでしょうか。図の下の，『東池のほうが広い』『同じ広さ』『西池のほうが広い』のどれか１つに，○をつけましょう。」この問題文の下に，池の図と選択肢が示されていた（図３）。

表１　正方形からなる図形の面積比較正答率

	１年	２年	３年	４年	５年
①	98.5%	99.3%	97.3%	98.0%	99.3%
②	97.1%	97.3%	96.7%	97.4%	99.3%
③	93.3%	100%	98.7%	96.1%	98.6%
④	89.0%	93.2%	86.0%	90.2%	92.4%

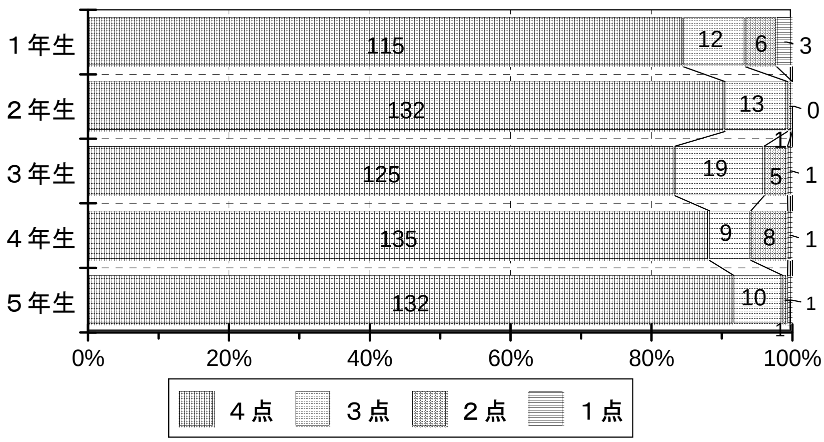

図２　正方形からなる図形の面積比較：点数の分布

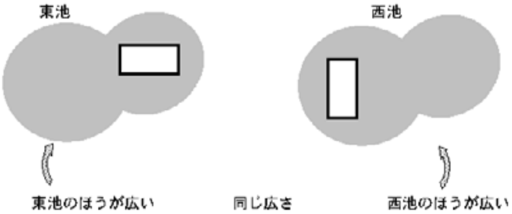

図３　ひょうたん池の問題①

図４　ひょうたん池の問題②

次いで，「②東池と西池に，もう１つ，島をつけたすことになりました。新しくつけたす島の形や大きさは，今までのものと同じですが，場所はちがいます。下の図は，新しく島をつけたしたところを表しています。東池と西池の水の入っているところ（黒く色のぬってあるところ）の広さは，どちらが広いでしょうか。それとも，同じ広さでしょうか。『東池のほうが広い』『同じ広さ』『西池のほうが広い』のどれか１つに，〇をつけましょう。」との問題文，及び島が２つになった場合の池の図と選択肢が示されていた（図４；図では選択肢は省略)。

この問題を，ここでは「ひょうたん池の問題」ということにする。図５は島が１つの場合（問題①)，図６は島が２つになった場合（問題②）の選択回答の分布を表したものである。帯グラフ内の数値は，それぞれを選択回答した人数を表す（以下同じ)。

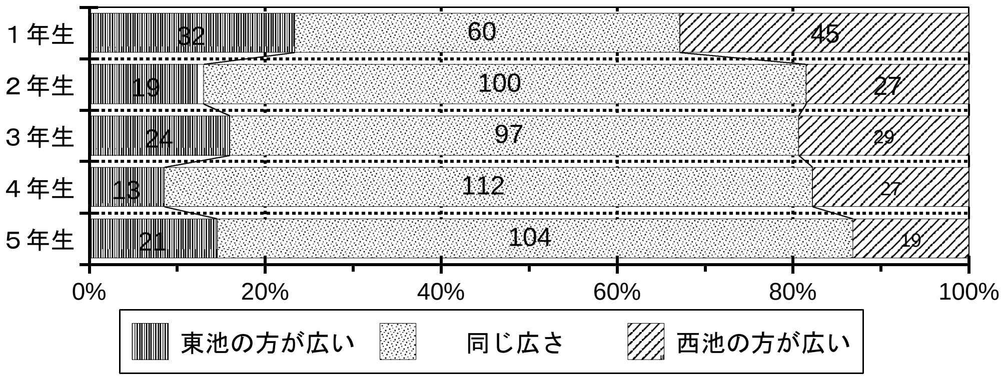

図５　ひょうたん池の問題①

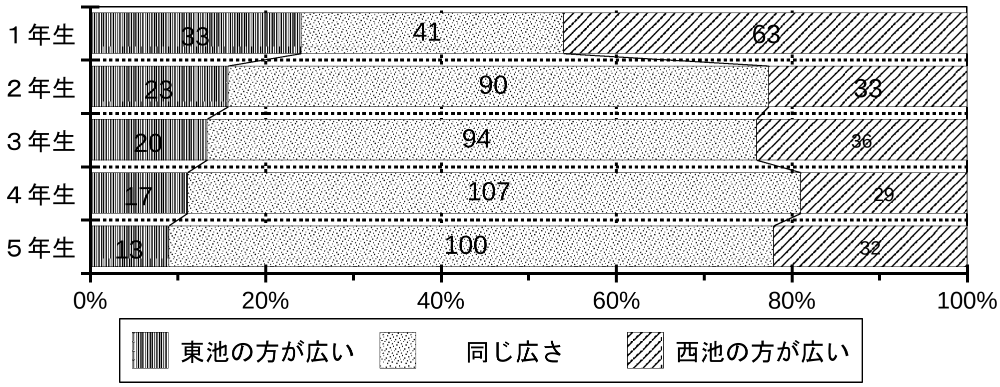

図６　ひょうたん池の問題②

「ひょうたん池の問題①」(図５）について，学年（１～５年生）×３選択肢（東，同じ，西）の人数分布を表す５×３の分割表に対してカイ２乗検定を行ったところ，有意差がみられた（$\chi^2(8)=38.91$，$p<.01$）。残差分析の結果は，次のようであった。１年生では「東」「西」の選択回答が有意に多く（$p<.01$），「同じ」が有意に少ない（$p<.01$）。４年生では「東」の選択回答が有意に少なく（$p<.05$），「同じ」が有意に多い（$p<.01$）。また，５年生では「西」の選択回答が有意に少なく（$p<.05$），「同じ」が有意に多かった（$p<.05$）。高学年になると，「同じ」を選択するものが多くなっている。

同様に，島が２つになった「ひょうたん池の問題②」(図６）についても，学年（１～５年生）×３選択肢（東，同じ，西）の人数分布を表す５×３の分割表についてカイ２乗検定を行ったところ，有意差がみられた（$\chi^2(8)=64.17$，$p<.01$）。残差分析の結果は，次のようであった。１年生では「東」「西」の選択回答が有意に多く（$p<.01$），「同じ」が有意に少ない（$p<.01$）。４年生では「西」の選択回答が有意に少なく（$p<.05$），「同じ」が有意に多い（$p<.01$）。また，５年生では「東」の選択回答が有意に少なく（$p<.05$），「同じ」が有意に多かった（$p<.01$）。問題①と同様に，高学年になると「同じ」を選択するものが多くなっている。

島が１個の場合（問題①）と２個の場合（問題②）について，１年生の結果を取り出してできる２（島が１個の場合と２個の場合）×３（選択肢）の人数を表す分割表に対してカイ２乗検定を行うと有意差がみられ（$\chi^2(2)=6.59$，$p<.05$），残差分析の結果，島の数が１個の場合は「同じ」が多く「西」が少ないが，島が２個の場合は「同じ」が少なく「西」が多かった（全て$p<.05$）。２年生以上については，有意な差はみられなかった。

「ひょうたん池の問題」では，面積の判断について，$A=B$，$a=b$のとき，$A-a=B-b$であると推論できることが重要である。１年生の結果をみると，問題①については43.8%の児童が「同じ広さ」を選択している。しかし，問題②で「同じ広さ」としたものは29.9%，「西池の方が広い」を選択したものは46.0%であり，間隙が大きいように見える「西池」がやや多く選択されたものと思われる。また，問題①と②の両方に「同じ広さ」としたものは，１年生では16.1%であった。２年生以上の回答分布は１年生の結果と大きく異なっており，「同じ広さ」とするものが増加している。それは特に４，５年生で顕著である。

本問題は他に比べ問題文自体やや複雑であり，問題文の意味を十分に把握できなかった児童もいることが推測される。また，文章の理解に加え，示された図に対して視覚的に判断するのではなく論理的推論によって判断しなければならない。

なお，Piagetらの牧草地の面積についての実験（1960）では，ひょうたん池の問題にそくしていえば，島の数をさらに増やした際の水面の面積の大小も問うている。その結果，島の数が少ない場合は「面積同じ」としていても，島がさらに増加すると「同じ」と判断しない児童がみられたという。ここで報告したひょうたん池の問題に対する反応からも，島の数を増加させると水面の面積が異なっているとの判断が増加することが推測される（但し，実際にそのような問を置こうとすれば，ひょうたん池の図の水面部分をより大きくする，あるいは島をより小さくするなどの図示の工夫を要する）。

（３）等周長図形の面積を比較する問題

等周長図形の面積を比較する問題は，①等周長の正方形とひし形の面積を比較する問題と，②等周長の正方形と長方形の面積を比較する問題の２つから構成されていた。これらの問題は，細谷（1968），Russell（1976），西林（1988）による。

①等周長の正方形とひし形の面積比較（棒の問題）

問題は「同じ長さのぼうを使い，はしとはしとが重ならないように合わせて，２つの四角形

あ，いを，作りました。あといの，ぼうでかこんでできる四角形の広さをくらべると，どちらのほうが広いでしょうか。それとも，同じ広さでしょうか。『あのほうが広い』『同じ広さ』『いのほうが広い』の，どれか１つに○をつけましょう。」であり，正方形とひし形の図が示されていた（図７）。その下には，「あのほうが広い　同じ広さ　いのほうが広い」の３つの選択肢が示されていた（以下では，選択肢の「あ」「い」を，それぞれ「正方形」「ひし形」という）。

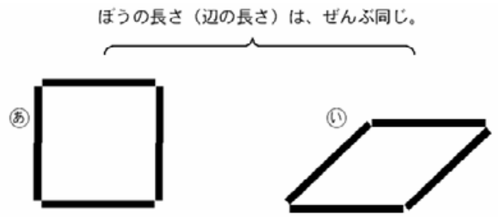

図７　等周長の正方形とひし形の面積比較

この問題を，ここでは「棒の問題」ということにする。図８は，本問題に対する回答の分布を表したものである。

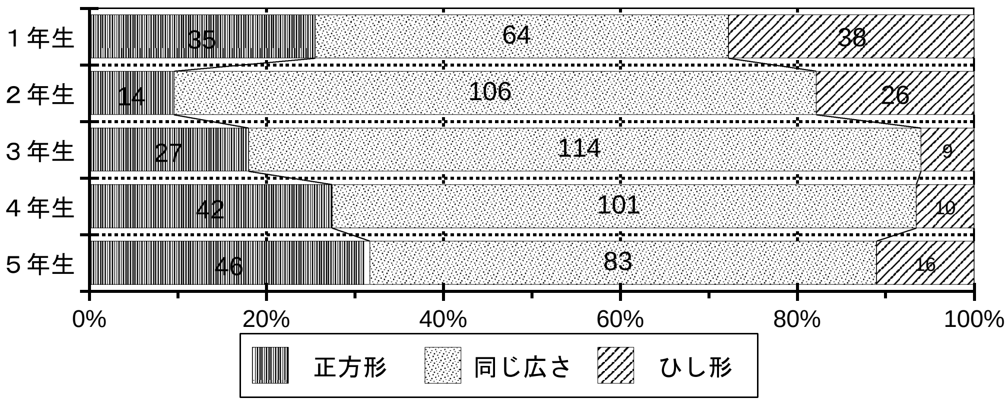

図８　等周長の正方形とひし形の面積比較

等周長の正方形とひし形の面積比較の結果について，学年（１～５年生）×３選択肢（正方形，同じ，ひし形）の人数分布を表す５×３の分割表に対してカイ２乗検定を行ったところ有意差がみられた（$\chi^2(8)=67.39$，$p<.01$）。残差分析の結果は，次のようであった。１年生では「ひし形」の選択回答が有意に多く（$p<.01$），「同じ」が有意に少ない（$p<.01$）。２年生では「正方形」の選択回答が有意に少なく（$p<.01$），「同じ」が有意に多い（$p<.05$）。３年生では「ひし形」の選択回答が有意に少なく（$p<.01$），「同じ」が有意に多い（$p<.01$）。４年生では「ひし形」の選択回答が有意に少ない（$p<.01$）。また，５年生では「正方形」の選択回答が有意に多かった（$p<.01$）。１年生と２年生以降で選択回答の方法に差異のあることが示唆される。５年生では「正方形」を選択するのが若干多いが，それには平行四辺形の求積公式の学習の影響が推測される。そうであっても，６割弱の児童が「同じ」と回答していることには，留意する必要がある。

②等周長の正方形と長方形の面積比較（ひもの問題）

問題文は，次のようであった。「同じ長さのひもが２本，あります。（その下に２本のまっすぐに伸ばしたひもの図が示されていた（ここでは省略する）。）１本でましかく（正方形）を，もう１本でながしかく（長方形）を作りました。（続いて正方形と長方形の図（図９）が示されていた。）左のましかく（正方形）と右の　ながしかく（長方形）の広さをくらべると，どちらのほうが広いでしょうか。それとも，同じ広さでしょうか。『ましかくのほうが広い』『同じ

広さ』『ながしかくのほうが広い』の，どれか１つに○をつけましょう。」

図９　等周長の正方形と長方形の面積比較

この問題を「ひもの問題」ということにする。この問題文の下に「ましかくのほうが広い　同じ広さ　ながしかくのほうが広い」の選択肢が示されていた（以下では，「ましかく」「ながしかく」を，それぞれ「正方形」「長方形」という）。図10は，本問題に対する回答の分布を表したものである。

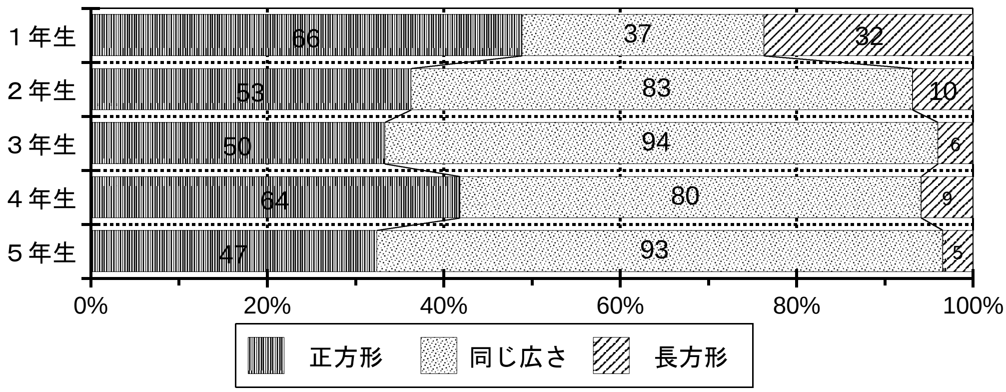

図10　等周長の正方形と長方形の面積比較

等周長の正方形と長方形の面積比較の結果について　学年（１～５年生）×３選択肢（正方形，同じ，長方形）の人数分布を表す５×３の分割表についてカイ２乗検定を行ったところ，有意差がみられた（$\chi^2(8)=76.28$，$p<.01$）。残差分析の結果は，次のようであった。１年生では「正方形」，「長方形」の選択回答が有意に多く（$p<.01$），「同じ」が有意に少ない（$p<.01$）。３年生では「長方形」の選択回答が有意に少なく（$p<.05$），「同じ」が有意に多い（$p<.01$）。また，５年生では「長方形」の選択回答が有意に少なく（$p<.05$），「同じ」が有意に多かった（$p<.01$）。この問題でも，第１学年の結果は他の学年とは異なる傾向を示している。

「棒の問題」について，１年生では全体の３割弱のものが「ひし形」を選択しているが，そのような児童は，示されたひし形の右側の出っ張りや横の広がりに中心化して判断したことが推測される。「ひもの問題」については，１年生の半数弱のものが「正方形」を選択しており，「同じ」の選択は比較的少ない。また１年生では「長方形」を選択したものが1/4弱みられるが，そのような児童は横方向の広がりに中心化して判断したのかもしれない。そうすると「正方形」を選択したものも，縦方向の辺長に着目して判断したとも考えられる。

第４学年では面積単元の導入時に等周長の正方形と長方形の面積比較の場面が扱われるが，本調査で扱った問題には「同じ」とするものが多くみられる。

図11は，ひょうたん池の問題の①と②の２題ともに「同じ」（正答）と回答した児童の割合と，２題の等周長図形の面積を比較する問題にともに「正方形」を選択しなかった（誤答）児童の割合を学年別にプロットしたものである。この図からも，第１学年の児童の判断と第２学年以上の児童の判断とは大きく異なっていることが分かる。

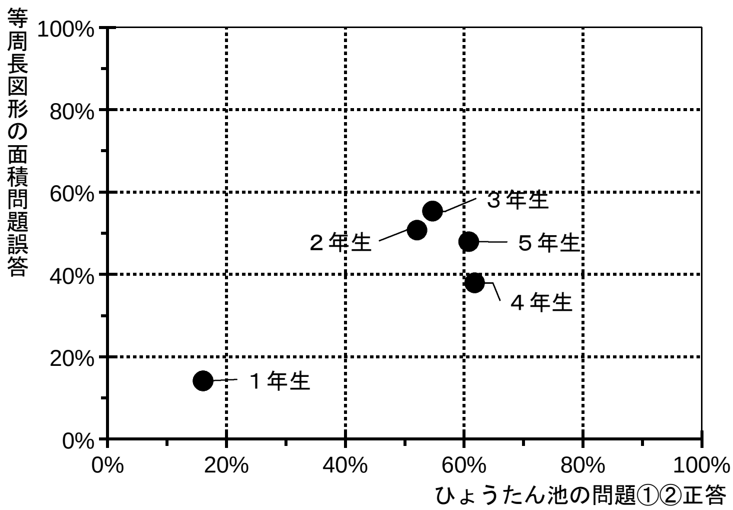

図11　ひょうたん池の問題正答と等周長図形の面積比較問題誤答

３　考察

本調査では，大きくは次の３つの問題について検討した。

①正方形からなる図形の面積を比較する問題

②面積に関する推論問題（ひょうたん池の問題）

③等周長図形の面積を比較する問題（棒の問題・ひもの問題）

第１学年では任意単位による面積の測定が授業で扱われていることもあって，①の正方形からなる図形の面積を比較する問題については第１学年から高い達成率がみられたのであろう。そのような判断方法は，数概念の形成にも依存するものであろう。実際，調査実施校は異なるが，第１学年の児童を対象として９月に同一問題で実施された正方形の個数による面積比較問題の調査結果をみると（長谷川･吉川，2013），学年末に実施された本調査の結果の方が１割程度，正答率が高い。数を数える方法の精緻化と習熟に伴って，正方形を単位とする面積判断の方法も精錬されていくことが推測される。

但し，この調査結果から，第１学年で単位を用いた測定の考え方が形成･獲得されているとは必ずしもいえない。Piagetら（1960）の実験では，単位正方形のみから比較対象となる図形を構成するだけではなく，単位正方形を対角線で２等分した直角二等辺三角形も用いて比較の対象となる図形を構成するなどして，単位の概念が形成されているかを検討している。今後は，そのような観点を含めた調査問題の開発も必要である。

②の論理的推論を要するひょうたん池の問題については，第１学年よりも高学年の児童の方が正答率が高く，第１学年では島の個数によっても判断が異なっていた。本問題によって，問題理解も含め，児童の論理的推論の発達の様相を見取ることができるのではないかと思われる。

等周長図形の面積を比較する問題③では，第２学年あるいは第３学年以降で「同じ」とする判断が多くみられた。ひょうたん池の問題では視覚的判断ではなく論理的な判断が求められるが，等周長図形の面積比較問題では，「正方形をつぶしていって，ひし形にしたから」といった図形の連続的変形や，「ひもの長さ，つまり周りの長さは同じだから面積は同じ」といった推論による判断は誤判断となる。

図形が等周長であれば面積も等しいとする判断が高学年で増加することについては，保存概念の獲得に伴って生じる「成長によるエラー」（西林，1988），面積への導入部での算数教育の

問題（工藤・白井，1991），面積に関する知的操作水準や公式の定性的理解（工藤，2005;佐藤，2008）など様々な観点から検討されているが，十分に解明されているとはいえない。その要因についてはさらなる検討を要するが，算数教育の観点からみれば，そのような誤判断への対応を検討すること，とりわけ誤判断を惹起している素材の教材化が課題となろう。

例えば，長谷川（2008），長谷川・吉川（2013）は，第４学年の児童を対象として，等周長図形の面積比較の問題を授業の素材として取り上げ検討している。但し，それらの授業事例では，本稿で取り上げた等周長図形の面積比較の問題を直接的な素材としたものではない。それでは，そのような問題を直接的な素材として授業を行ったらどうだろうか。第４学年であれば，輪にしたひもを用いて形を作り，その面積について考えるなどの授業も構想される。輪にしたひもで正方形や長方形を作る，長方形の１つの辺長を短くし全体が１本のひものように見える図形を作るなどの活動や，正方形や長方形に対しては求積公式を適用して面積を求める活動など，質的判断と量的判断の両面から問題にアプローチするなどが考えられる。第５学年で扱われる平行四辺形の面積についても，同様の活動が構想される（長谷川・横山・植松，1988；長谷川・岩田，1996）。

但し，これまでに実施された授業事例をみると，等周長図形の面積比較問題を授業で扱ったとしても，図形の周長と面積とは無関係であることは，すぐには定着してはいなかった。そのような授業を実施したとしても，その後，長方形や平行四辺形の求積公式を適用して面積を求める問題の中に，図形の周長と面積の関係を考えさせる問題を配置するなど，授業内容の定着と一般化を図る機会を設定することが必要である。また，そのような一連の練習問題の開発も求められる。授業の実施や練習問題の開発などの検討も含め，第４学年から第５学年にかけての面積指導の系統を総合的に検討する必要がある。

謝辞

調査に参加してくださった児童の皆さん，調査を実施してくださいました先生方に，この場をお借りしてお礼を申します。

文　献

長谷川順一（2008）「事例研究：『面積』と『周長』との分離を目標とした算数の授業－ジオボードを用いた図形の構成をもとに－」日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」33，25－56

長谷川順一・岩田貴宏（1996）「等周長の正方形と平行四辺形に対する小学生の面積判断」日本数学教育学会誌　78（４），60－65

長谷川順一・横山昇司・植松茂（1988）「平行四辺形の面積概念の構成に関する操作と教具について－事例研究をもとに－」香川大学教育実践研究，10，19－29

長谷川順一・吉川雄基（2013）「面積に関する基礎概念について（１）－小学校第４学年の児童を中心とした調査とその結果－」香川大学教育実践総合研究，27，25－34

細谷 純（1968）「空間・量・数の認識とその発達」黒田孝郎他編「教育学全集６　論理と数学」81－112，小学館

工藤与志文（2005）「概念的知識の適用可能性に及ぼす知識操作水準の影響－平行四辺形求積公式の場合－」 教育心理学研究，53，405－413

工藤与志文・白井秀明（1991）「小学生の面積学習に及ぼす誤ルールの影響」教育心理学研究　39，21－30

西林克彦（1988）「面積判断における周長の影響―その実態と原因―」教育心理学研究，36（２），120－128

Piaget, J., Inhelder, B. and Szeminska, A.（1960）“*The child's conception of geometry.*” Translated by E. A. Lunzer, Routledge and Kegan Paul, 261－273.

Russell, J.（1976）Nonconservation of area: Do children succeed where adults fail?" *Developmnet Psychology*, 89（４）, 367－368.

佐藤誠子（2008）「小中学生における面積大小判断とその規定要因について－図形の高さ概念および公式の定性的理解に着目して－」東北大学大学

院教育学研究科研究年報　56（2），123－135

付記
第1執筆者が本論をまとめるに当たって，一部，科学研究費からの補助を得た。