香川大学教育実践総合研究（*Bull. Educ. Res. Teach. Develop. Kagawa Univ.*），28：45－58，2014

高等学校数学「課題学習」の教材開発について

佐竹　郁夫　・風間　喜美江・　豊田　　稔*　・　杉本　紘野*
（数学教育）　（数学教育）　（大学院教育学研究科）　（大学院教育学研究科）

760－8522　高松市幸町１－１　香川大学教育学部
*760－8522　高松市幸町１－１　香川大学大学院教育学研究科

On the Development of Teaching Materials for the “Problem Situation-based Learning” of Senior High School Mathematics

Ikuo Satake, Kimie Kazama, Minoru Toyota* and Hirono Sugimoto*

Faculty of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522
**Graduate School of Education, Kagawa University, 1-1 Saiwai-cho, Takamatsu 760-8522*

要　旨　平成21年改訂の高等学校学習指導要領数学に課題学習が明示された。そこでは，すべての生徒に自ら学ぶ意欲や主体的に取り組む学習姿勢の育成が求められている。この課題学習の趣旨を受け，高等学校数学を修了した生徒の数学的な体験に関するアンケート調査を踏まえ，高等学校数学「課題学習」における，素材の検討と素材から教材化する教材開発の視点，および具体的な教材開発例を提示する。

キーワード　課題学習　高等学校数学　教材開発　探究　関心・意欲

１．問題の所在と研究のねらい

平成21年改訂の高等学校学習指導要領数学に「課題学習」が明示された。この「課題学習」は，数学Ⅰ及び数学Ａの内容であり，「その内容又はそれらを相互に関連付けた内容[註1]を生活と関連付けたり発展させたりするなどして，生徒の関心や意欲を高める課題を設け，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識できるようにする」という目標を掲げている。この目標は，平成元年改訂の中学校学習指導要領数学の指導計画の作成と内容の取扱いの「課題学習」に示された「第２学年及び第３学年においては，生徒の主体的な学習を促し数学的な見方や考え方の育成を図るため，各領域の内容を総合したり日常の事象に関連付けたりした適切な課題を設けて行う課題学習を，指導計画に適切に位置付け実施するものとする」の文言と大きな違いはなく，実質的に高等学校数学に自ら学ぶ意欲や主体的に取り組む学習姿勢の育成が求められたことになる。

高等学校数学に「課題学習」が入ったことについては，次の理由によるものであるといわれている。

・学習指導要領数学の目標に入れた数学的活動の一層の充実。
・97％の生徒が高等学校に進学する社会にあって「数学を学ぶことの意義や有用性などの数学のよさをどのようにして伝えられるか」という視点の重視。

・教え込み型の授業からの脱却を図る。
・高等学校は大学入試に影響される部分が多いが，その一方で必ずしも「思考力，表現力が身についていない」という現場の声も増えている。

この中でも高等学校進学率が97％を越えている実態（文部科学省，2009）は，高等学校が義務教育とほぼ同じであり，いろいろな生徒に対応し，これまでの数学の授業を見直すべきであるという動きは自然なことであろう。

課題学習のとらえ方，目標，方法など実態に即した研究が急務であるが，その議論が現場では消極的である。表１は，課題学習に関しての，日本数学教育学会全国大会での発表の件数（日本数学教育学会，1989～1993・2009～2013）で，課題学習が学習指導要領に示されてから５年間のそれに関する発表件数を中・高で比較したものである。表１から，中・高での研究の取り組み方に温度差があることが読み取れる。

表１　中・高別「課題学習」に関する発表件数

平成（年）	中学校	平成（年）	高等学校
元年	1	21年	0
２年	5	22年	0
３年	9	23年	0
４年	9	24年	7
５年	19	25年	7

中学校現場における「課題学習」の導入も，必ずしも平坦なものではなかった。「課題学習」が中学校学習指導要領数学に明示された当初，中学校の数学教師には２通りの反応があった。ひとつは大きな戸惑いと抵抗感をもつ教師。もうひとつは，これまでやってきた指導と大きな差はないとする教師。やがて，教科書等に具体例が示され，研修会等で取り上げられ経緯を経て，学会での実践発表が増えていった。20年余りが経った今日，中学校における「課題学習」はある程度定着した。また，中学校の「課題学習」導入とともに，日々の授業方法にも変化が出てきているといってよい。

このことから，高等学校での「課題学習」を根付かせることは，これからの課題であり，また授業改善にも結びつくと考えられる。

しかし，高等学校学習指導要領解説数学編理数編（文部科学省，2009）には，数少ない素材だけが示され，その素材のまま高等学校の授業で使うとすれば，「課題学習」導入以前より数学嫌いをひき起こすことが予想されるものもある。課題学習がねらう，意欲的な学習，主体的な学習には，素材の検討とともにそれを良質な「課題」へと加工することと指導法の研究が重要である。

そこで，本稿では次のことを研究のねらいとする。

> 高等学校数学を修了した生徒の数学的な体験に関するアンケート調査を踏まえて，高等学校数学「課題学習」における，素材の検討と素材から教材化する教材開発の視点，および具体的な教材開発を行う。

２．高等学校数学を修了した生徒のアンケート調査

（１）調査目的

小・中学校での授業と高等学校での授業について，授業を受けてきた大学生の立場からこの２つを比較する。また，大学生の数学に対する意識(数学を学ぶ意味，数学の問題への接し方)を探る。これらにより，高等学校における「課題学習」の必要性について考察を行う。

（２）調査対象

国立大学教育学部３年，私立大学文学部２，３年の学生　計102名

（３）調査時期・時間・方法

・2013年11月中旬
・10～15分間
・それぞれの学生が全問回答終了後に回収した。

（４）調査内容・・・参考資料１参照

質問Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの４つのブロックに分けた。

Ⅰ，Ⅳ：数学への意識を探る。具体的には，Ⅰで数学を学ぶ意味，Ⅳで数学の問

題への接し方について問うた。

Ⅱ，Ⅲ：受けてきた授業形態について知る。Ⅱは高等学校，Ⅲは小・中学校の授業についてである。比較のため，Ⅱ，Ⅲでは同じ質問とした。

（５）調査結果と考察

詳細な個々の設問に対する結果は，参考資料２参照。ここでは顕著な結果について考察する。

①　数学への意識について

１）数学を学ぶ意味（質問Ⅰ）

表２　アンケート質問Ⅰ（一部）

2．	現象を抽象化してとらえ，考えることができる。
5．	関係や法則など使って生活の中の問題解決ができる。
6．	いろいろな条件の中で，基本となる条件や原則を見いだそうとする心が養われる。
10.	受験に役に立つ。
11.	計算の力がつく。
12.	社会生活の中で，前提をはっきりさせ問題を正しくとらえる力がつく。

質問２，５，６，12について，あてはまると答えた回答が少なかった。これらは，数学を通じて身につく，人生全体で必要な「生きる力」であると考えており，質問10や11のような一時しのぎの力より重要であると考えているが，学生はむしろ，数学を10や11の力をつけるものであるという認識であるようである。２，５，６，12の力が重要であり，数学がその力をつけるものであるという認識と，そのために課題学習を重視すること，さらにそれが，目先の大学受験にとっても役立つという認識が社会全体のコンセンサスとなってほしい。

２）数学の問題への接し方（質問Ⅳ）

質問「１．見たことがない問題が出されたとき，解く気持ちがなくなる。」にあてはまると答えた学生は45％いた。想像以上に多かった。数学の学習において，学ぶことでさらに未知への好奇心を膨らませ，見たことがない問題に対して，新鮮な興味を持てるようになるというのが望ましい学習スタイルであると考えるが，この回答数は，その真逆であり，未知に対する新鮮な興味，積極的な学びの姿勢が失われていると解釈できる。

②　高等学校の授業と小・中学校の授業の比較について（質問Ⅱ，Ⅲ）

表３　アンケート質問Ⅱ・Ⅲ（一部）

6．	課題に対して，生徒が試行錯誤をしたり考えを組み立てたりする場面がある授業
7．	課題に対して，生徒が予想を立てたり「なぜ？」と考えたりする導入がある授業
9．	問題を解く際，先生が問題の意味やイメージをわかせる指導の工夫がある授業
10.	生活に関する数学の問題に取り組ませる授業
12.	実験や実測を取り入れた授業
13.	生徒一人一人の自由な発想を大切にする授業
14.	課題を解決した後，その課題から新たな課題を見いだすことができる授業
15.	生徒が学んできた知識や考え方をつなげてくれる授業

質問６，７について，「あてはまらない」との回答が，高等学校の方がおよそ20～30％多かった。これは，課題学習の有無がそのまま調査結果に現れていると考えられる。

質問10，12についても，「あてはまらない」との回答が，高等学校の方がおよそ20～30％多かった。これは，高等学校では抽象的で高度な数学になるためという意見もあるかもしれないが，教員の視野を拡げることにより，高等学校の数学でも生活に関連させ，生徒に実感を持たせることは十分可能である。例を挙げれば，斜めに切った大根をかつら剥きにして三角関数のグラフを導出したり，QRコードを多項式と関連付けることなどいくらでも例はあげられる。

質問９，13について，授業で強い印象を受けた「よくあてはまる」との回答が小・中学校の方がおよそ10～15％多かった。小・中学校の方が，イメージをわかせる指導があり，生徒の自由な発想を大切にしているという結果である。高等学校での課題学習の導入により，課題学習

以外の学習においても，イメージが湧き，生徒の発想を生かす指導が定着することを期待したい。

質問14，15については，回答の結果にそれほど差がない。小・中・高とも，このような「課題学習」に向けての授業改善が望まれる。

３．課題学習をどうとらえるか

先述したように，学習指導要領が示した課題学習の目標は中・高とも大きな違いはない。それらを踏まえ，筆者らは，

> 物事を総合的にとらえ，考察する力，自ら進んで課題をみつけ，取り組み，それを主体的に解決していこうとする学習の仕方を身につける

という課題学習を目指している。

そのための課題の条件として，井上正允（1991）の提案する次の３つは興味深い。

① とりつきやすいこと
② 面白いこと
③ ためになること

本稿では，この①～③を活かし，課題の条件を，

Ａ 取り組みやすいこと
Ｂ 興味がもてること
Ｃ 価値が高いこと

とした。

Ａ～Ｃの課題の条件を満たすような数学としての「課題学習」にするためには，数学の素材を教材として改善していく視点が重要となる。以下で，このことは論じる。

また，同じ課題を扱っても，「今日は課題学習をやります」といって始めるだけで，導入の工夫がなければ，課題の魅力，課題が語る数学的な内容は見えてこない。大切なことは，適切な課題で導入を工夫し，生徒の実態に合った発問をし，考えさせることである。展開においても指導の工夫によって，生徒が主体的に取り組むことができるかどうかが決まってくる。

４．「課題学習」における素材から教材化への視点

３．の課題の条件Ａ，Ｂ，Ｃを実現するために，以下のような教材化の視点を提案する。この視点をできるだけ多く取り込むことで，よい教材になると考えている。

「Ａ：取り組みやすい」教材化のために，

Ａ-1. 具体的な例から一般の場合へとする。
Ａ-2. 発問はできるだけきめ細かなものとし，緩やかなスロープとなるようにする。
Ａ-3. 生徒自らが考察をスタートできること，対象に親しむことを重視し，多様な反応（図を描いて実測する，証明を試みる）が可能な教材とする。その結果，場合によっては，中間的な結果への到達のみでも可とする。

「Ｂ：興味が持てる」教材化のために，

Ｂ-1. 課題の問い方を先生目線でなく，生徒目線とする。
Ｂ-2. 小さな発見的ステップが多くなるようにし，数学を自ら構築する感覚が味わえるようにする。
Ｂ-3. 数学的素材が本来持つ生き生きとした面，不思議さが伝わるように工夫する。

「Ｃ：価値が高い」教材化のため，

Ｃ-1. 課題について，やらされている，公式を当てはめるのではなく，具体的で特殊な場合について生徒が自ら掴んだ情報をもとにして，他の場合についても自ら考察を押し進めることで各自の数学的世界を拡げることをする。
Ｃ-2. それがうまくいかないときに，試行錯誤する過程を重視し，失敗から立ち直り別な一歩を踏み出す力が要求されるようにする。
Ｃ-3. それらの結果を踏まえて，より一般の場合に成り立つ構造，関係を自ら見出し，他者に説明するため，明確な言葉にさせるようにする。
Ｃ-4. それらの理由について考え，他者に説明する必要を生じさせ，生徒の論理性を磨

かせるようにする。

以下，３つの例について，これらの教材化の視点がどのように実現されているかを述べる。

５．教材開発例その１
ー倍数と余りに関する課題ー

（１）素材から教材化への分析と課題設定

高等学校学習指導要領解説数学編理数編の数学Ａでは，次の整数の検算方法に関する「課題学習」の例示がある（文部科学省，2013)。

> 23×51＝1173という計算について，
> 左辺：23について２＋３＝５，
> 　　　51について５＋１＝６，
> 　　　さらに５×６＝30で，３＋０＝３
> 右辺：1173について１＋１＋７＋３＝12,
> 　　　さらに　１＋２＝３
> したがって，このような計算をすると左辺と右辺の計算結果はともに３で、等しくなっている。このような性質が正の整数の計算では常に成り立つことを幾つかの具体例で確認させ、なぜ成り立つのかを考えさせ、説明させる。

筆者らは，この例示は「課題学習」の素材であると考えた。ただし，この例示だけでは，授業の具体的な展開が見えてこない。よい素材であっても，導入や展開の仕方によって，生徒が主体的に活動できるかどうかは異なる。

この素材を，小学生でもできるようなやさしい整数の性質から高度な整数の性質まで含まれたものを想定して教材化し課題を開発した。この素材は成り立つことを指導者のいう通り確認するものである。それを，間違いを指摘するという問いに変えることで，生徒にとって積極的な取り組みを促し，教師の視点から生徒の視点への問いとした。間違いの理由を述べることにより論理性を高めることができ，生徒の試みが失敗したときに試行錯誤が要求されるようにした。また，文字を使って具体から一般の場合を考えさせるようにした。これらの方針を立て，この素材を教材化し課題１～６を開発した。

【課題１】

> ３人の子どもが次の計算をし，答えを出しました。
> 　Ａ：12×51＝402
> 　Ｂ：12×51＝602
> 　Ｃ：12×51＝702
> それを見たお父さんは，すぐに３人とも計算の答えが違っているといいました。
> お父さんは実際の計算をしていません。
> さて，どうやってそれを見抜いたのでしょうか。

【課題２】

> 課題１では２，３，４，９を使って検算を考えました。では，それ以外の数７を使って，余りに着目した計算違いの指摘はできるだろうか。

【課題３】

> 課題２で先生はなぜ５を使った検算をいわなかったのでしょうか。

【課題４】

> 課題１や２で，出てきた考えが他の２桁の整数の積計算の検算の考えにも使えるだろうか。

【課題５】

> 課題１～３の検算方法が使える理由を文字を使って説明しよう。

【課題６】

> 課題１～５を通して，検算についていえること，調べたい具体例をあげ，文字を使って説明してみよう。

（２）学習の流れ

①　課題１の答えと理由を考える。

・すべては２の倍数だからあっているが・・・。

・Ａ：10×50＝500だから500より小さいのはおかしい。

・Ｂ：左辺の例えば12＝３×４で３の倍数だが，602は６＋０＋２＝８で８は３の倍数ではない。３で割ったとき余りが２。
・Ｂ：51＝３×17で，どちらも３の倍数だから，12×51は９の倍数。
・Ｃ：12×51は９の倍数。702で７＋０＋２＝９だから702は９の倍数。でも，12＝４×３で４の倍数だが，702は，下２桁が00か４の倍数になっていないから，おかしい。

②　課題２の答えと理由を考える。

・Ｂ：12÷７は商１余り５
51÷７は商７余り２
余りどうしの積は５×２＝10
10÷７は商１余り３
602＝７×86 で７でわった余り０
余りが違う。
・Ｃ：702÷７は商100余り２で余りが違う。

③　課題３の答えと理由を考える。

・（10＋２）（50＋１）これを展開したら，５に関しては10進法と同じものが見えてくるから，右辺の答えの下１桁の数と同じになることを見抜いたので，間違を指摘できる判断はできない。

④　課題４の答えと理由を考える。

（例）　23×66＝1528　？
23×51＝1173　？
42×51＝2142　？

⑤　課題５を考える。

・授業中教科書で説明したことと結びつけてもよい。
・新たに文字を使って説明をしてもよい。

⑥　課題６を考える。

（３）この課題で期待できる数学的体験

・日頃見過ごしていた算数の中に，奥深い数学が潜んでいることへの気づき。

お父さんの考えは，小学校や中学校で学習してきた見つもり，倍数・約数，余りのある割り算，素数などが含まれており，身近な解決しやすい倍数・約数の視点で解決できる内容である。課題２は，余りのある割り算を「割られる数をａ，割る数をｂ，商をｃ，余りをｄとするとａ＝ｂ×ｃ＋ｄ（ただしａ，ｂ，ｃ，ｄは整数)」としてとらえ数学Ａの内容と関連づけられるものである。

・常に説明を要求されるが，具体である数を使って，簡単に説明することができる。また，それも文字に置き換える段階へのスロープも緩やかであり，取り組みやすい。

課題１のお父さんの間違いの指摘から，どの場合も具体である数の例をつくることは用意である。であるから，文字の背景にある具体となる数が身近に存在することは生徒にとって取り組みやすい。教師は具体である数と文字の往復を意識しながら，徐々に生徒を文字の世界に導いていくことが可能である。

ただし，小学校での余りのある割り算「12÷７＝１余り５」を「割られる数をａ，割る数をｂ，商をｃ，余りをｄとするとａ＝ｂ×ｃ＋ｄ（ただしａ，ｂ，ｃ，ｄは整数)」ととらえることに困難性を示す生徒は意外と多い。余りのある割り算をａ，ｂ，ｃ，ｄの関係として捉えることが難しいのである。

数学Ａの整数の性質では，ａ＝ｂ×ｃ＋ｄの式の形が中心となる。余りのある割り算を関係式でとらえる必要性は，２つの割り算の結果を比較すること（②など）で意識付けられるのである。

また，整数の性質の練習問題，例えば問題「ｍ，ｎは５で割ったときの余りをすれぞれ３，２となる整数である。ｍｎを５で割ったときの余りを求めよ」という問題はできても，それが検算のような話と結びつかない生徒は多い。課題２までの課題解決を通して，上記のａ＝ｂ×ｃ＋ｄの式の形や式の展開，余りなどが，説明の道具となること，具体的な問題の解決ができることなどを意識付けられ，これまで学習してきたいくつかの整数の性質の意味が繋がることになる。

・間違いを教師が指摘しなくとも，生徒どうしで見つけられ，反例もあげられる。

上述したように，検算のような身近な課題は，具体である整数の例示はしやすい。計算間違いは，誰にでも起こり得るものであるか

ら，間違った意見を指摘されても気軽に対応でき，他の場合も考えやすい。試行錯誤をしながら，意見交換も活発に行われ，自分の意見を伝える意義，それを理解し，より高次な内容を目指す場が，授業に出てくると考える。

６．教材開発例その２
－チェバの定理に関する課題－

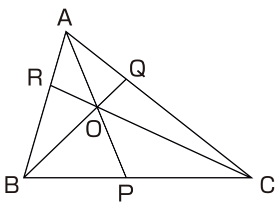
（１）素材から教材化への分析と課題設定

チェバの定理は数学Ａの教科書では次のように提示されている。

［チェバの定理］

三角形ＡＢＣの３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にそれぞれ点Ｐ，Ｑ，Ｒがあり，３直線ＡＰ，ＢＱ，ＣＲが１点で交わるならば次が成り立つ。

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$



このような有名な定理を扱う授業では，生徒からすれば唐突に定理が紹介され，それを教師が説明するという形がとられることが多い。

チェバの定理を素材としての教材開発は，次の①～③の方針のもとに行った。

① チェバの定理を動点的にとらえる教材の改善３直線が１点で交わるという考え方→２点を決めることで第３の点が決まるという考え方

② いろいろな特殊を考察した。

③ ①②の結果を踏まえ，表を作成し，定理を発見する。

①は３直線が１点で交わっている状態について，比の関係式を考えることから，２点を決めることで第３の点が決まるときの決まり方を調べるという考え方への変更を行う。

②は，①の考え方を踏まえ，重心，内心，垂心の特殊な点の場合に第３の点の決まり方を調べ，（これらの場合のみ成立する証明ではあるが）証明する。

③は，４．の数学的な価値のＣ－１，２，３の視点を実現したものである。

［課題１～４の共通な図の作成の流れ］

三角形ABCについて次の①～③の順に作図しよう。このときBP：PCはどのように決まるか考えよう。

①三角形ABCをかき辺AB，辺AC上の任意の点をそれぞれＲ，Ｑとする。ただしＲ，Ｑは三角形の頂点とは一致しない。

②直線BQ，CRをひき，その交点をＯとする。（図１）

③頂点Ａから交点Ｏを通る直線をひき，線分BCとの交点Ｐとする。（図２）

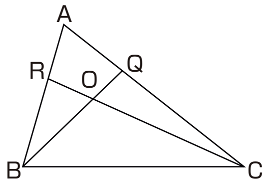


図１

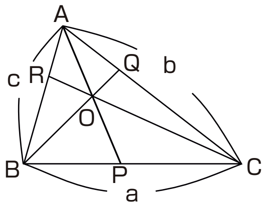


図２

【課題１】

（課題１～４の共通な図の作成の流れで，）点Ｒ，Ｑをそれぞれの辺の中点とする。

点Ｐに関してどんなことに気づきますか。

【課題２】

（課題１～４の共通な図の作成の流れで，）RQ//BCとなるように点Ｒ，Ｑをとる。

点Ｐに関してどんなことに気づきますか。

【課題３】

（課題１～４の共通な図の作成の流れで,）線分BQ，CRが∠ABC，∠ACBのそれぞれの二等分線となるように点R，Qをとる。点Ｐに関してどんなことに気づきますか。

【課題４】

（課題１～４の共通な図の作成の流れで,）線分BQ，CRが垂線となるように点R，Qをとる。 点Ｐに関してどんなことに気づきますか。

【課題５】

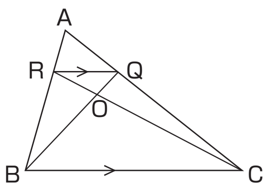
課題１～４の結果を表にまとめよう。 どんなことに気づきますか。

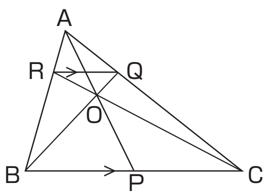
（２）学習の流れ

課題１～５は特殊から一般を考え定理を発見する学習の流れである。その流れは，次の①～⑤である。

①　点R，Qをそれぞれの辺の中点とする。

②　RQ//BCとなるように点R，Qをとる。





このときも点Ｐは辺BCの中点となる。

ここでAR：RB＝AQ：QC＝s：t とし，する。

③　線分BQ，CRが∠ABC，∠ACBのそれぞれの二等分線となるように点R，Qをとる。

④　線分BQ，CRが垂線となるように点R，Qをとる。

⑤　①～④の結果をふまえて表にまとめる。

辺の比の関係を見やすくするために表にかきだし，表からどんなことがいえるかを考える。

表から次の法則が予想される。

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

表４　①～④（課題１～４）の内分比

	$\frac{AR}{RB}$	$\frac{BP}{PC}$	$\frac{CQ}{QA}$
①	1	1	1
②	$\frac{s}{t}$	1	$\frac{t}{s}$
③	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
④	$\frac{b\cos A}{a\cos B}$	$\frac{c\cos B}{b\cos C}$	$\frac{a\cos C}{c\cos A}$

課題１～４の共通な条件で，どんな場合でも成り立つのかを考え，一般的な証明に至る。

それぞれ，生徒の気づきを大切にし，⑤の規則性の発見に至るような学習となる。①から③のスロープを緩やかにするために②の学習を入れた。

（３）この課題で期待できる数学的体験

・生徒が自ら法則を発見することができる。

実際に定理を自分たちで発見することで図形に対する興味関心が高まり，他にはどのような定理が存在するのかという発見に対する意欲も高まるだろう。また定理の定着にもつながる。

・試行錯誤をしながら既習事項を活用し，探究する。

中学校で学習した平行線と比の関係，高等学校で学習する重心などを試行錯誤しながら活用することで，本稿のチェバの定理という生徒にとって新しい定理を発見することができる。ここから既習事項の復習や関係性に気付くことができるだろう。

・特殊から一般を導く数学的思考

特殊から考え，それを一般にまで広げることでその定理の奥の深さや不思議さを感じさせることができるだろう。また，定理を発見するときの思考の流れや数学的な考え方を体験することができる。

7．教材開発例その３
－オイラー線に関する課題－

（1）素材から教材化への分析と課題設定

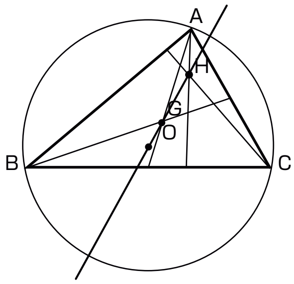
課題学習の題材として，オイラー線に関する定理を取り上げ，教材分析を行う。

オイラー線に関する定理は次の通りである。

［オイラー線に関する定理］

・ひとつの三角形の，外心O，重心G，垂心Hは一直線上にある。

・OG：GH＝１：２が常に成り立つ。



この定理に関する直線をオイラー線と呼ぶ。

中学校数学では，角の二等分線と垂線の作図方法を学ぶが，内心，外心などの証明までは至らない。しかし，高校数学では五心を学習し（教科書によって，傍心はコラム欄に載っていることもある），１つの三角形の外心，重心，垂心を作図すると，今まで個々に考えてきた点の関係が見えてくる。異なる三角形で作図しても，３つの点が一直線上に並ぶという，とても奇跡的で美しい関係が確認できる。そして，どんな三角形でもそのことが成り立つことが証明できることも１つの驚きであり，定理と呼ぶにふさわしいものである。

このことから，オイラー線に関する次の課題を設定した。

【課題１】

> 正三角形，二等辺三角形をかき，その外心，内心，重心，垂心をそれぞれ作図しよう。
> それらの４点の関係について気づくことをあげよう。

【課題２】

> 課題１以外の三角形をかき，その外心，内心，重心，垂心をそれぞれ作図しよう。
> それらの４点の関係について気づくことをあげよう。

（2）学習の流れ

課題１を提示し，生徒に活動させた後，課題２を提示し探究活動を行う。

課題１は①②の内容となる。課題２は③～⑥の内容となる。

①　正三角形（図３）

外心，内心，重心，垂心はすべて一致することに気づき，その理由を考える。

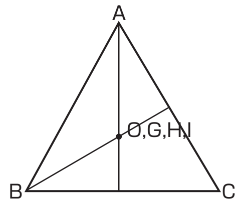


図３　正三角形の場合

②　二等辺三角形（図４）

二等辺三角形ABCにおいて，点Mを線分BCの中点とすると，

線分AMは中線，

線分BCの垂直二等分線，

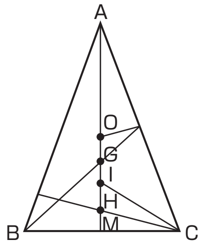
点Aからの線分BCに対する垂線

である。このことから，外心，重心，垂心が一直線上にあることに気づき，その理由を考える。

さらに，線分APは角Aの二等分線でもあることから，内心も一直線上にあることがわかる。

③　特殊から一般への橋渡し（図５）

図２は４点が一直線上にある。図３の三角形では内心がはずれ，３点が一直線上に並ぶことになる。このことに気づき，証明を考える。後述の図４から図６に関する証明は，３点が一直線上にあることを次のようにいいかえ，証明を考える。



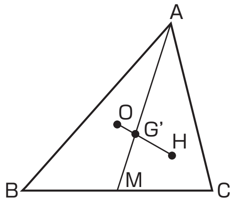


図４　二等辺三角形の場合　図５　特殊から一般へ

④　直角三角形（図６）

△ABCが直角三角形の場合は，外心Ｏは必ず斜辺の中点になる。垂心Ｈは必ず三角形の直角をつくる頂点と一致することに気づき，証明を考える。

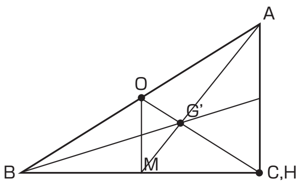


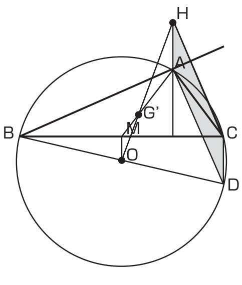
図６　直角三角形の場合

⑤　鋭角三角形（図７）

△ABCが鋭角三角形の場合で，点Ｄを線分BDが円の直径になるようにとり，オイラー線に関する定理に気づき，証明を考える。

⑥　鈍角三角形（図８）

④と同様に展開する。



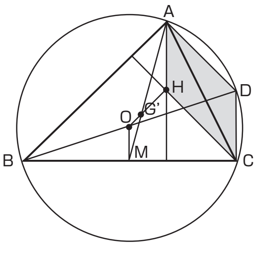


図７　鋭角三角形の場合　図８　鈍角三角形の場合

（３）この課題で期待できる数学的体験

この学習で以下の３つの数学的体験が期待できると考える。

・いろいろな三角形を作図するという実験的な探究から，４点の関係を見つける活動に多くの生徒が参加できる。

自分が作図したものだけでなく，クラスの全員がかいたいろいろな三角形をもちよると，４点にどのような関係があるかを予想する活動に多くの生徒が参加できる。またオイラー線の性質は見た目の判断がしやすいので，関係を見つけることが容易で，発見の喜び，関係の美しさを多くの生徒が感じられるであろう。

・証明方法を発見する過程に多くの生徒が参加できる。

いろいろな三角形（正三角形，二等辺三角形，直角三角形，鋭角三角形，鈍角三角形）で証明するという課題の選択肢を設けることで，生徒の学習状況にあった課題を生徒自身で選ぶことができる。三角形によっては中学生でも証明可能であり，作図をする過程でたくさんの証明の手掛かりが得られる。鋭角三角形，鈍角三角形の場合は補助線を引くなど，少し証明の難易度が上がるが，二等辺三角形や直角三角形の証明を参考にし，証明の筋道を大まかに予測できる。この証明の筋道の見つけ方を方法として対象化することで，他の場合にも扱えるようになる。また，証明に困難を覚えた場合は実測で関係を確認でき，一応の納得もできる。これによって，生徒が達成感を味わえる場面が増える。証明方法は複数存在するので多様な証明が期待できる。

・一般的に成り立つ性質を見つけるために吟味する場面がうまれる。

課題にオイラー線上には必ずしものらない内心を取り上げた。これにより，特殊な場合のみ成り立つ性質と一般に成り立つ性質とを見極める練習になると考えたからである。反例を見つけたり，内心がオイラー線にのるための条件を考えたりする活動にもつながると考える。また，教師が定理や性質に必要な材料だけ(今回の場合は外心，重心，垂心のみ)を提示すると，生徒は受動的になると考えた。教師の提示するものがすべて正解ではな

く，自分で調べてみなければ分からないという状況をつくることで，主体的な学習と意欲を高めることにもつながる。また，内心が必ずしもオイラー線にのらないことを知ると，外心，重心，垂心は必ず一直線上にあることの不思議さや美しさがより一層感じられると考えた。

8．今後の課題

本稿では，学生の意識についてのアンケート調査を踏まえ，「課題学習」の課題を明確化した。そして，「課題学習」教材化へのプロセスを提示し，いくつかの教材開発を行った。

今回提示した３つの「課題学習」は，観察から発見，証明という場面をつくったこと，数学に慣れ親しむことから関心・意欲を生み出す設定であることから，一人一人の生徒の学習状況に対応でき，多くの生徒が達成感を味わえるような課題となったと考える。

課題学習が成立するかどうかは，教材の質にほとんど依存するといってよい。日常で生活に関連する課題であっても，幾何の課題であっても同様なことがいえる。課題に対して一人一人の生徒が一歩を踏み出して考えることで，様々な探究や学習意欲を生み出すことになろう。本稿の教材開発の視点の重要性が，今後の高等学校の授業研究の一歩になることを期待したい。

今後の研究の課題として，次のことがあげられる。

・本稿で構想した活動について実践的な検討を行い，生徒が考える過程を分析する。
・代数や幾何分野だけでなく，他の分野の課題学習の教材開発も進める。

註

［註１］数学Ｉでは，（１）数と式，（２）図形と計量，（３）二次関数，（４）データの分析，（５）課題学習，数学Ａでは，（１）場合の数と確率，（２）整数の性質，（３）図形の性質，（４）課題学習，と平成21年告示の学習指導要領高等学校数学に示されている。

引用文献

文部科学省（2009）「学校基本調査」 http://www.ipss.go.jp/syoushika/tohkei/Data/Relation/2_Factor/3_work/1-2-C08.htm

日本数学教育学会（1989～1993・2009～2013）「各全国大会における発表予定の研究題目一覧」日本数学教育学会誌，第71～75巻・第91～95巻.

井上正充（1991）「課題学習についての一考察」，日本数学教育学会誌第73巻，p. 2.

文部科学省（2009）「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」，実数出版，p. 51.

参考資料１－アンケート調査問題－

数学学習についてのアンケート

これはテストではありません。成績にも関係ありません。数学学習に関して，あなたの考えた通りに回答してください。

記入者（　　　　　　　番）氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Ⅰ　「数学を学ぶ意味」について，あなたの考えにあてはまるものの番号を○で囲んでください。（複数回答可）

1. 新聞やパンフレットなどのグラフを見る力がつく。
2. 現象を抽象化してとらえ，考えることができる。
3. 論理的に思考を組み立てる力がつく。
4. 与えられた問題を整理して考えることができる。
5. 関係や法則など使って生活の中の問題解決ができる。
6. いろいろな条件の中で，基本となる条件や原則を見いだそうとする心が養われる。
7. あまり役に立たない。
8. 図や記号を使って自分の考えを人に伝える手助けとなる。
9. 考えがまとまらないときにそれを整理するのに役立つ。
10. 受験に役に立つ。
11. 計算の力がつく。
12. 社会生活の中で，前提をはっきりさせ問題を正しくとらえる力がつく。
13. その他 ［具体的に記入　　　　　　　　　　　　　　　　　　　］

Ⅱ　高等学校での数学の授業について，あなたが受けてきた授業で「よくあてはまるもの」の番号を○で，「少しあてはまるもの」の番号を△で囲んでください。（複数回答可）

1. 先生が説明して，その説明のパターンの問題を練習する授業
2. 授業の初めに復習をしてから，新しい内容を先生が説明しそれを聞く授業
3. １つの課題に対し，多様な考え方が取り上げるような授業
4. １つの課題に対し，１つの考え方を生徒が身につくまで繰り返す授業
5. １つの課題に対し，２つ以上の考え方を比較する場面がある授業
6. 課題に対して，生徒が試行錯誤をしたり考えを組み立てたりする場面がある授業
7. 課題に対して，生徒が予想を立てたり「なぜ？」と考えたりする導入がある授業
8. 課題に対して解決をした後に，別解を考える時間が与えられる授業
9. 問題を解く際，先生が問題の意味やイメージをわかせる指導の工夫がある授業
10. 生活に関する数学の問題に取り組ませる授業
11. 課題についての生徒の考えを取り入れ，その意見を生かす授業
12. 実験や実測を取り入れた授業
13. 生徒一人一人の自由な発想を大切にする授業
14. 課題を解決した後，その課題から新たな課題を見いだすことができる授業
15. 生徒が学んできた知識や考え方をつなげてくれる授業

Ⅲ　小・中学校での算数・数学の授業について，あなたが受けてきた授業で「よくあてはまるもの」の番号を○で，「少しあてはまるもの」の番号を△で囲んでください。（複数回答可）

1. 先生が説明して，その説明のパターンの問題を練習する授業
2. 授業の初めに復習をしてから，新しい内容を先生が説明しそれを聞く授業
3. １つの課題に対し，多様な考え方が取り上げるような授業
4. １つの課題に対し，１つの考え方を生徒が身につくまで繰り返す授業
5. １つの課題に対し，２つ以上の考え方を比較する場面がある授業
6. 課題に対して，生徒が試行錯誤をしたり考えを組み立てたりする場面がある授業
7. 課題に対して，生徒が予想を立てたり「なぜ？」と考えたりする導入がある授業
8. 課題に対して解決をした後に，別解を考える時間が与えられる授業
9. 問題を解く際，先生が問題の意味やイメージをわかせる指導の工夫がある授業
10. 生活に関する数学の問題に取り組ませる授業
11. 課題についての生徒の考えを取り入れ，その意見を生かす授業
12. 実験や実測を取り入れた授業
13. 生徒一人一人の自由な発想を大切にする授業
14. 課題を解決した後，その課題から新たな課題を見いだすことができる授業
15. 生徒が学んできた知識や考え方をつなげてくれる授業

Ⅳ　試験場面以外で，「数学の問題」に関してあなたの考えにあてはまるものの番号を○で囲んでください。（複数回答可）

1. 見たことがない問題が出されたとき，解く気持ちがなくなる。
2. 受験問題については取り組んできたが，それ以外の問題は解きたくない。
3. １つの問題を解いた後，解いた考えが他の場合にもあてはまるかどうかを考える。
4. １つの問題を解いた後，類似だと思う問題を解く。
5. １つの問題を解いた後，3.4.以外のことをする。
（具体的に記入:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）
6. 長い時間をかけて問題を解くことができる。
7. わからない問題に出合ったとき，すぐに解答を見たり，あきらめたりする。
8. わからない問題に出合ったとき，既習問題のパターンにあてはめようとする。
9. わからない問題に出合ったとき，7.8.以外のことをする。
（具体的に記入:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）
10. 問題の解答を覚えようとする。
11. 難しい問題が解けたとき，他教科よりも満足感が感じられる。
12. 他教科に比べ答えが１つなので，満足感が感じられる。
13. 日常生活に生かされる問題はない。
14. 抽象的な問題でも，日常にあてはめて考えようとする。
15. 数学の問題やその解答に美しさを感じることがある。
16. 与えられた問題を解くだけでなく，類似の問題をつくったことがある。
17. 数学の力をあげようとして，同じ問題集を何度も解いたり，たくさんの問題数を解いたりする。
18. その他 ［具体的に記入　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　］

参考資料２－アンケート調査集計結果－

Ⅰ:数学を学ぶ意味　　ⅡⅢは同じ設問で，Ⅱは高の授業，Ⅲは小・中の授業についてである。

Ⅳ:数学の問題　　※ⅡⅢの「0:あてはまらない」「1:少しあてはまる」「2:よくあてはまる」を表している。

	人	%
Ⅰ1	44	43.1
Ⅰ2	18	17.6
Ⅰ3	57	55.9
Ⅰ4	51	50.0
Ⅰ5	38	37.3
Ⅰ6	26	25.5
Ⅰ7	8	7.8
Ⅰ8	32	31.4
Ⅰ9	13	12.7
Ⅰ10	62	60.8
Ⅰ11	76	74.5
Ⅰ12	10	9.8
Ⅰ13	2	2.0

Ⅳ1	46	45.1
Ⅳ2	31	30.4
Ⅳ3	26	25.5
Ⅳ4	32	31.4
Ⅳ5	1	1.0
Ⅳ6	36	35.3
Ⅳ7	37	36.3
Ⅳ8	60	58.8
Ⅳ9	2	2.0
Ⅳ10	21	20.6
Ⅳ11	59	57.8
Ⅳ12	26	25.5
Ⅳ13	15	14.7
Ⅳ14	7	6.9
Ⅳ15	20	19.6
Ⅳ16	4	3.9
Ⅳ17	32	31.4
Ⅳ18	3	2.9

Ⅱ1	人	%
0	7	6.9
1	7	6.9
2	88	86.3
計	102	100

Ⅲ1	人	%
0	22	21.6
1	4	3.9
2	76	74.5
計	102	100

Ⅱ9	人	%
0	67	65.7
1	18	17.6
2	17	16.7
計	102	100

Ⅲ9	人	%
0	62	60.8
1	8	7.8
2	32	31.4
計	102	100

Ⅱ2	人	%
0	38	37.3
1	21	20.6
2	43	42.2
計	102	100

Ⅲ2	人	%
0	29	28.4
1	10	9.8
2	63	61.8
計	102	100

Ⅱ10	人	%
0	88	86.3
1	12	11.8
2	2	2.0
計	102	100

Ⅲ10	人	%
0	61	59.8
1	15	14.7
2	26	25.5
計	102	100

Ⅱ3	人	%
0	58	56.9
1	23	22.5
2	21	20.6
計	102	100

Ⅲ3	人	%
0	48	47.1
1	16	15.7
2	38	37.3
計	102	100

Ⅱ11	人	%
0	78	76.5
1	11	10.8
2	13	12.7
計	102	100

Ⅲ11	人	%
0	64	62.7
1	15	14.7
2	23	22.5
計	102	100

Ⅱ4	人	%
0	76	74.5
1	14	13.7
2	12	11.8
計	102	100

Ⅲ4	人	%
0	67	65.7
1	9	8.8
2	26	25.5
計	102	100

Ⅱ12	人	%
0	90	88.2
1	8	7.8
2	4	3.9
計	102	100

Ⅲ12	人	%
0	71	69.6
1	14	13.7
2	17	16.7
計	102	100

Ⅱ5	人	%
0	58	56.9
1	27	26.5
2	17	16.7
計	102	100

Ⅲ5	人	%
0	59	57.8
1	15	14.7
2	28	27.5
計	102	100

Ⅱ13	人	%
0	83	81.4
1	9	8.8
2	10	9.8
計	102	100

Ⅲ13	人	%
0	60	58.8
1	22	21.6
2	20	19.6
計	102	100

Ⅱ6	人	%
0	67	65.7
1	19	18.6
2	16	15.7
計	102	100

Ⅲ6	人	%
0	48	47.1
1	16	15.7
2	38	37.3
計	102	100

Ⅱ14	人	%
0	85	83.3
1	10	9.8
2	7	6.9
計	102	100

Ⅲ14	人	%
0	80	78.4
1	12	11.8
2	10	9.8
計	102	100

Ⅱ7	人	%
0	80	78.4
1	14	13.7
2	8	7.8
計	102	100

Ⅲ7	人	%
0	46	45.1
1	20	19.6
2	36	35.3
計	102	100

Ⅲ15	人	%
0	59	57.8
1	18	17.6
2	25	24.5
計	102	100

Ⅲ15	人	%
0	54	52.9
1	21	20.6
2	27	26.5
計	102	100

Ⅱ8	人	%
0	68	66.7
1	17	16.7
2	17	16.7
計	102	100

Ⅲ8	人	%
0	66	64.7
1	19	18.6
2	17	16.7
計	102	100