

最適制御理論について<sup>1)</sup>

— 経済・地域・都市計画の基礎理論として —

井 原 健 雄

I. はじめに II. 最適制御問題の提起と定式化による分類 III. タイプ 1 の問題に対する最大原理 IV. タイプ 1 の問題の応用 V. タイプ 2 の問題に対する最大原理 VI. タイプ 2 の問題の応用 VII. タイプ 3 の問題に対する最大原理 VIII. タイプ 3 の問題の応用 IX. 結びに代えて

## I

1950年代の後半に、ソビエトの数学者ポントリャーギン、ボルチャンスキー、ガムクレリーゼ、ミシチェンコ等によって開拓された「最適制御理論」<sup>2)</sup>は、当初、工学的な物理過程（たとえば、月ロケットの誘導や、自動制御系の設計など）にもっぱら応用されたものであった。しかし、その理論は、内容の斬新さと広範な応用能力によって、さらに社会科学（とくに、経済・地域・都市計画など）の分野にまで、数多くの応用例をみるに至っている。<sup>3)</sup>

あるシステムの動的過程に注目し、最適化問題を解く手法として、従来「変分法」や「ダイナミック・プログラミング法」が、よく用いられた。しかし、古典的な変分法は、不等式体系を制約条件としてもつ、より一般的な制御問題

1) 筆者は、昭和49年度および50年度に、京都大学に於いて開講された、藤田昌久氏担当の特別実験及び演習課目、「地域・都市計画法」を聴講する機会を得た。本稿は、そのときに得た貴重な経験をもとにして、まとめあげたものである。同氏に対し、ここに記して謝意を表明したい。また、阿部文雄氏からは、有益な助言を頂き、榎本章子さんには、清書の労を煩わした。合わせて、お礼を申し上げたい。

2) 最適制御理論誕生の基礎となったのは、ソ連科学アカデミー会員レフ・セメノビッチ・ポントリャーギンを指導者とする数学者のグループによって、1956—61年に成された一連の研究成果である。[A]8、参照。しかし、アメリカでも、ノイスタット、ラサールや、ベルマンを中心とする数学者たちによって、これに関係する重要な成果が得られている。また、フェリドバウムの研究成果もとくに重要であり、彼はこの分野の開拓者の1人に当然加えて然るべきであろう。

3) 本稿の最後に掲載している参考文献——これは、藤田昌久氏に負う——参照。

をその射程外にしている。したがって、オイラー・ラグランジュ方程式によって解決し得る問題領域は、著しく限定されたものとなっている。<sup>4)</sup>また、ダイナミック・プログラミング法は、汎関数の連続微分可能性という強い仮定のもとで、その汎関数に対する偏微分方程式（すなわち、ベルマン方程式）を導出する。しかし、この仮定は、最も簡単な最適制御問題においても、通常、みだされていないから、実際、ダイナミック・プログラミング法を用いることは、根拠のないこととなる。したがって、ベルマンの考え方は、数学的な解というよりも、むしろ、探索の手段を与えるものと解すべきであろう。<sup>5)</sup>

かくして、われわれの課題は、古典的な変分法に比して、より一般的な制御制約のある問題をも処理し得て、しかもまた、ダイナミック・プログラミング法に比して、より厳密な論理的根拠をもち得る最適化の手法を考察することになる。すなわち「最適制御の立場から、より一般的な最適化問題を、より厳密に考えること」が、本稿の目的である。けだし、最大原理を用いることによって、最適制御のみたすべき必要条件が、数学的に明らかにされ、また、そのことによって、遠大な構想をもって開拓された最大原理の理解を深めることになるからである。

## II

この章で、明らかにされることは、つぎのとおりである。まず、われわれは、対象とする制御問題の一般的性質と仮定を明らかにする。ついで、状態空間を拡張し、その空間内において、最適トラジェクトリーを定義する。これらの一般的考察をもとにして、システムの動的過程が、常微分方程式によって表わされ、しかもまた、最適性の評価基準が積分形で表わされている場合に、考察を限定する。そして、最後に、最適制御問題の一般的定式化と、制御制約の差異にもとづく、当該問題の分類が試みられる。

- 
- 4) G. Hadley & M. C. Kemp; *Variational Methods in Economics*, North-Holland, (1971), pp.238-279. 変分法と最大原理との関連については、[A]1, pp.92-95, [A]3, pp.186-192, [A]8, pp.250-267, などを参照。
- 5) R. Bellman; *Dynamic Programming*, Princeton University Press, (1957). ダイナミック・プログラミング法と最大原理との関連については、[A]4, pp.17-22, pp.209-250, [A]8, pp.70-74, などを参照。

## §1. 問題の提起と仮定

いま、有限個の実変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  によって特性づけられる、あるシステムを考えることにしよう。各実変数  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  が、時刻  $t$  の関数であるとすれば、<sup>6)</sup> 任意の時刻  $t$  におけるこれらの変数の値は、その時刻におけるシステムの状態を規定することになる。そこで、このシステムの状態を、 $n$  次元ユークリッド空間  $E^n$  内の点  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  と考えれば、この点の集合によってつくられる空間を状態空間とよぶことができる。<sup>7)</sup>

つぎに、この状態の時間的な経過の過程は、あらかじめ決められた一群の法則のうちのひとつによって支配されるものと想定しよう。たとえば、それが常微分方程式によって完全に表わされる場合もあれば、偏微分方程式によらなければ、表現し得ない場合もある。8)あるいは、また、そのような連続型ではなく、差分方程式といった離散型によって規定される場合もあるであろう。9)

ここでは、さしあたり、この一群の法則 ( $\Omega$ ) が、どのようなものであるかを限定する必要はない。しかし、留意すべき点は、ある法則 ( $r$ ) がきまれば、それに応じて、システムの状態が、状態空間内で径路 ( $p$ ) に沿って動く、という関係である。そこで、この関係を明示的に表わせば、つぎのようになる。

$$p=T(r), \quad r \in \Omega \quad (2.1)$$

つまり、あらかじめ決められた一群の法則 ( $\Omega$ ) のうち、そのいずれか1つ ( $r$ ) を選べば、それに対応して、システムの状態の変化の態様が、状態空間内における径路 ( $p$ ) として体現するということである。

6) いうまでもなく、実変数  $x_i$  を説明する変数として、時刻  $t$  に限定する必要はない。問題の状況に応じて、たとえば、都心からの距離とか、人口密度を取り上げても、何ら一般性を失わない。

7) 「相空間」とよばれることもある。

8) たとえば、状態の説明変数として、時刻  $t$  のみを取り上げれば、常微分方程式によってシステムの挙動が支配されるが、さらに、都心からの距離  $d$  を同時に考慮すれば、偏微分方程式に依存せざるを得なくなるであろう。本稿では、順次、常微分方程式によって挙動が支配されるシステムに、議論を絞ってゆくことにする。

9) 離散型の最大原理については、[B]1, [B]2, などを参照。

つぎに、この径路に注目しよう。いま、システムを時刻  $t_0$  において、ある与えられた状態  $X(t_0) = X^0$  から、もうひとつの与えられた状態の集合  $\theta^1$  内の任意の1点へ、有限時間内で移す問題を考えてみよう。その場合、あらかじめ決められた法則のなかには、当該システムを、状態  $X^0$  から、状態  $X^1 \in \theta^1$  へ移す法則もあれば、状態  $\bar{X}^1 \in \theta^1$  でおわる径路を生ぜしめる法則もあり得る。そこで、この径路を図示すれば、つぎのようになる。

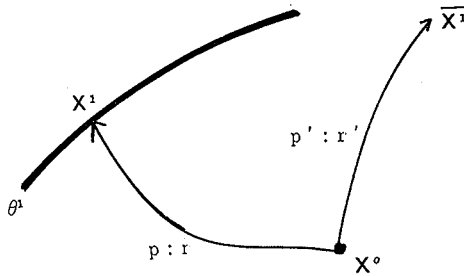


図1. 状態空間 ( $E^n$ ) 内の径路

つまり、あるシステムの状態を  $X^0$  から  $X^1$  へ、あるいは、また  $X^0$  から  $\bar{X}^1$  へ移動させるのには、そのいずれを問わず、ある法則  $(r, r')$  と、それに対応する各径路  $(p, p')$  が関係する。

そこで、これらの数ある法則について、何らかの形で評価をする必要が生じてこよう。そのために、われわれは、システムの挙動を支配する法則によって引き起こされる状態の時間的な推移過程に、ある実数を一意的に対応させる規則を考えることにする。この規則、すなわち汎関数を、評価基準とよび、推移過程に対応してきまる実数を、汎関数の値、あるいはコスト (Cost) とよぶことにする。<sup>10)</sup>

すでに述べたとおり、 $X^0$  から  $X^1$  へ、あるいは  $X^0$  から  $\bar{X}^1$  への移動のコストは、法則  $r$  と、それに対応する径路  $p$  に関係する。そこで、この法則  $r$  に

10) ここでは、説明の便宜上、最短時間問題を考えることにする。したがって、汎関数の値を「コスト」とよぶことが、許されよう。

対応する評価基準を  $V(X^0, X^1; r, p)$  なる記号によって、明示的に表わすことにしよう。ただし、 $X^1$  は  $X(t_f)$  の略記であり、ここでは、 $X^1$  あるいは  $\bar{X}^1$  を具体的に表わすものとする。<sup>11)</sup>

さて、われわれは、この評価基準にもとづいて、最適な法則を定義することができる。すなわち、いま、法則  $r^*$  によって、初期の状態  $X^0$  から径路  $p^*$  をたどって、ある最終状態  $X^{1*} \in \theta^1$  へ移され、しかも  $\theta^1$  に達する径路を生ずる他のすべての法則とくらべて、評価基準の値（すなわち、コスト）が最小になる、つまり

$$V(X^0, X^{1*}; r^*, p^*) \leq V(X^0, X^1; r, p)$$

ただし、すべての  $r \in \Omega, X^1 \in \theta^1$  (2.2)

が成立するとき、法則  $r^*$  を最適であると定義する。

もとより、 $X^0$  から  $\theta^1$  への移動は、最適な法則によることもあれば、最適でない法則によっておこることもある。図2は、これを示している。

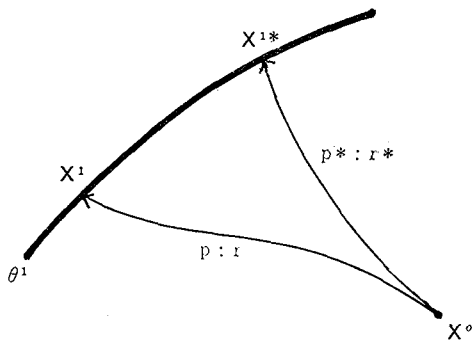


図2. 状態空間 ( $E^n$ ) 内の最適径路 ( $p^*$ )

そこで、便宜上、つぎのように、状態空間に2つの部分集合を考えることにする。<sup>12)</sup>

- 1) その点から出発して与えられた最終状態の集合に到達する径路が存在するすべての点の集合  $E$ , すなわち

11)  $t_f$  は、最終時刻 (Final time) のことである。

12) [A] 3, p. 3.

$$E \triangleq \{X^0: \alpha p; X^0 \rightarrow \theta^1\} \quad (2.3)$$

2) 最適な法則にもとづく径路が存在するすべての点の集合  $E^*$ , すなわち

$$E^* \triangleq \{X^0: \alpha p^*; X^0 \rightarrow \theta^1\} \quad (2.4)$$

そのとき, これら2つの集合は, 全状態空間に一致することもあるが, 一般には, 必ずしもそうなるとはかぎらない。<sup>13)</sup>

また, いうまでもなく, 初期状態と最終状態の集合に対して, 最適な法則が1つ以上存在することも, 当然あり得る。しかし, 叙上の最適性の定義(2.2)から明らかのように, その場合でも, 最小コストは一意的にきまる。そこで, 与えられた最終状態の集合( $\theta^1$ )に対して, 最小コストが初期状態( $X^0$ )のみの関数になることを強張して, これを, つぎのように書くことにする。

$$V^*(X^0; \theta^1) \triangleq V(X^0, X^{1*}; r^*, p^*)$$

ただし, すべての  $r^*$  (2.5)

さて, ここで, 以下の議論——すなわち, 最適性の原理——において, とくに重要な意味をもつ, 2つの仮定を導入しよう。

まず, その第1は, 法則の連結可能性<sup>14)</sup>とよぶべき仮定である。その内容は, つぎのとおりである。すなわち, 個々の法則によって生ずる径路を連結したものは, それ自体, 各時間区間でこれらの法則に一致する1つの法則によって生ずる径路とみなす仮定である。いま, これを図3に示す, 2つの法則について考えてみよう。

まず, 最初に, 法則  $r^i$  を時刻  $t_0$  から  $t_i$  まで適用することによって, システムの状態を初期状態  $X^0$  から  $X^i$  へ移す場合に生ずる径路を  $p^i$  とする。つぎに, もう1つの法則  $r_i$  を時刻  $t_0'$  から  $t_i'$  まで適用することによって, 状態を  $X^i$  から最終状態  $X^f$  へ移す場合に生ずる径路を  $p_i$  とする。そのとき, 最初の法則  $r^i$  を時刻  $t_0$  から  $t_i$  まで適用し, それに引き続いて, 法則  $r_i$  を時刻  $t_i$  から  $t_f$  (ただし,  $t_f = t_i + t_i' - t_0'$ ) まで適用する法則を, 連結された法則とみ

13)  $E^*$  あるいは  $E$  が,  $E^n$  と一致しない場合には, これらの集合は, 境界を有することになる。

14) 「制御の連結可能性」とよびかえても, その内容は不変である。

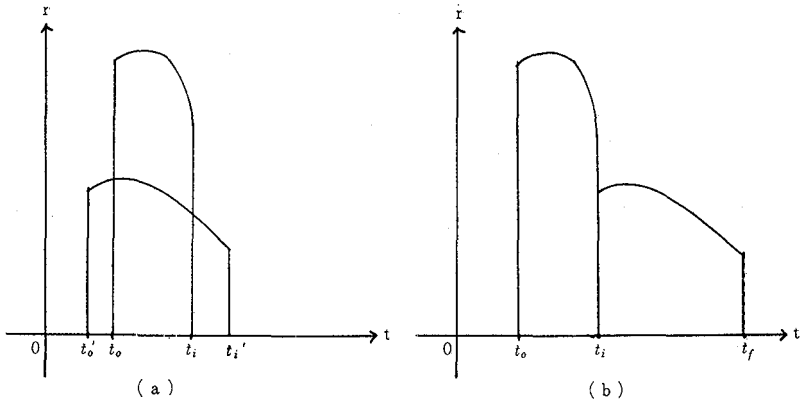


図3. 法則の連結可能性

なし、さらにその法則によって、初期状態  $X^0$  から最終状態  $X^f$  へ移す場合に生ずる径路を  $p$  (ただし、 $p = p^i \cup p_i$ ) とみなそうとするものである。<sup>15)</sup> これをまとめれば、つぎのようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} p^i : X^0 \xrightarrow{r^i(t_0, t_i)} X^i, r^i \in \Omega \\ p_i : X^i \xrightarrow{r_i(t'_0, t'_i)} X^f, r_i \in \Omega \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow p = p^i \cup p_i : X^0 \xrightarrow{r = r^i(t_0, t_i) \cup r_i(t_i, t_f)} X^f, r \in \Omega$$

ただし、 $t_f - t_0 = (t_i - t_0) + (t'_f - t'_0)$

つぎに、導入される第2の仮定は、評価の加法性である。これは、各法則に対して与えられる汎関数、すなわち、評価基準の性質に関する仮定であって、その内容は、つぎのとおりである。ある法則によって生ずる径路上の移動コスト (すなわち、汎関数の値) は、つねに、加法性の条件をみたすというものである。これを、さきにあげた例にそくして考えれば、つぎのようになる。第

15) この場合、 $t$  軸に沿った移動によって、法則の性質は、不変であると仮定されている。この仮定がみたされる場合を、「オートノマス系」(Autonomous system) とよぶ。[A] 8, pp.16-18, 参照。

1の仮定は、当該システムについて、状態を  $X^0$  から  $X^f$  まで径路  $p$  に沿って移動させる法則  $r$  が、じつは、 $X^0$  から  $X^i$  までを径路  $p^i$  に沿って移動させ、さらに  $X^i$  から  $X^f$  までを径路  $p_i$  に沿って移動させる各法則を連結したものと同じであるという帰結をもたらす。ここでの仮定は、それに加えて、各径路 ( $p^i$  および  $p_i$ ) に沿った移動コストの和<sup>16)</sup>が、全体としてみた径路 ( $p$ ) の移動コストにつねに等しいとみなすことに対応する。したがって、これを一般的に示せば、つぎのようになる。<sup>17)</sup>

$$V(X^0, X^f; r, p) = V(X^0, X^i; r, p^i) + V(X^i, X^f; r, p_i) \quad (2.6)$$

ただし、任意の  $X^i \in p, p = p^i \cup p_i$

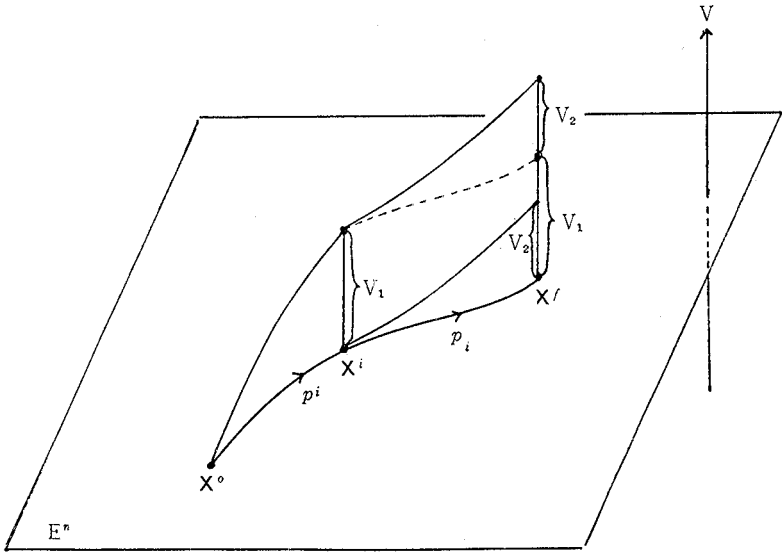


図4. 評価の加法性

16) ここでは、相異なる法則 ( $r^i, r_i$ ) について、その径路に対する評価の加法性を考えているが、逆に、同一の法則 ( $r$ ) に対して、その時間的分割を試み、各分割された径路に対する評価の加法性を考える方が、より一般的であろう。したがって、(2.6) は、評価の加法性についての一般的な定義式と考えられる。

17) ただし、 $\lim_{t_i \rightarrow t_f} V(X^i, X^f; r, p_i) = 0$  を仮定する。



図4は、この関係を図式化したものである。

ただし、簡単化のため、状態空間  $E^n$  を2次元平面で表わし、さらに1つの次元(縦軸方向)を加え、その次元によって、評価基準の累積値 ( $V$ ) を表わすことにする。そのとき、評価の加法性は、全体の径路  $p$  に属する任意の状態  $X^i$  について、つねに、

$$V^1 + V^2 = V$$

の関係が成立することを意味している。

上記、2つの仮定は、いわゆる「最適性の原理」をみたし<sup>18)</sup>、以下の議論で対象とする、区分的に連続な導関数をもった常微分方程式によって表わされる法則<sup>19)</sup>と積分形の評価基準<sup>20)</sup>に対しては、明らかに成立する。

## §2. 状態空間の拡張とトラジェクトリー

前節において、われわれは、一般的な状態空間として  $n$  次元のユークリッド空間 ( $E^n$ ) を考え、さらにその空間内における状態の推移過程に対して評価基準を導入した。そこで、本節では、その両者を分離することなく、同時に考慮することにより、その相互関係を明らかにするために、これまでの状態空間を拡張し、その拡張された空間内に形成されるある曲線をトラジェクトリー (Trajectory) として定義しよう。

いま、1つの変数 (これを  $x_0$  とする)<sup>21)</sup> を測る方向として、新たに1次元空間 ( $E^1$ ) をとり、これと  $n$  次元の状態空間 ( $E^n$ ) との直積集合を考えれば、点  $X = (x_0, \mathbf{X}) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  の集合は、 $(n+1)$  次元のユークリッド空間 ( $E^{n+1}$ ) に拡張される。このとき、もとのシステムの状態  $\mathbf{X}$  は、拡張された状態点  $X = (x_0, \mathbf{X})$  の状態空間 ( $E^n$ ) への射影となる。図5は、この関係を示している。<sup>22)</sup>

18) 「最適トラジェクトリーのいかなる部分も、また最適トラジェクトリーである」という意味である。[A] 8, p.18, 参照。

19) 本章, 第3節, 参照。

20) 本章, 第4節, 参照。

21) 評価基準の値, すなわち, コストを測る変数 ( $V$ ) に対応する。

22) ただし, 図中に示す状態  $X^0$  において,  $x_0$  の値は, ゼロであると仮定する。

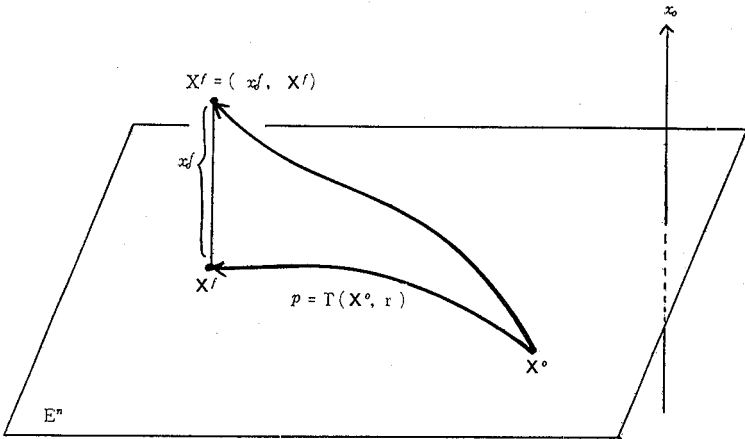


図5. 拡張された状態空間 ( $E^{n+1}$ )

ある与えられた初期状態  $X^0$  に対して、法則  $r$  を適用すれば、径路  $p$  が形成されることは、すでに述べたとおりである。そこで径路  $p$  が、初期状態  $X^0$  と法則  $r$  によって決まることより、これをつぎのように書くことにする。<sup>23)</sup>

$$p = T(X^0, r), \quad r \in \Omega \tag{2.7}$$

さて、このように拡張された状態空間 ( $E^{n+1}$ ) 内において、つぎの (2.8) をみたす曲線 ( $\Gamma$ ) をトラジェクトリー<sup>24)</sup>の定義としよう。

$$\Gamma \triangleq \{X^i : x_0^i + V(X^i, X^1; r, p_i) = C, p_i \subset p\} \tag{2.8}$$

ただし、 $p$  は法則  $r$  によって生ずる径路で  $\Gamma$  の状態空間  $E^n$  への射影である。また、 $X^1$  は、 $X^1 \in \theta^1$  あるいは  $\bar{X}^1 \in \theta^1$  で、 $C$  はある定数である。

図6は、拡張された状態空間 ( $E^{n+1}$ ) 内における、ある1つのトラジェクトリー ( $\Gamma$ ) を表わしている。

23) これは、さきの (2.1) とくらべて、径路  $p$  が、初期状態  $X_0$  より生ずることを明示的に表わしている。

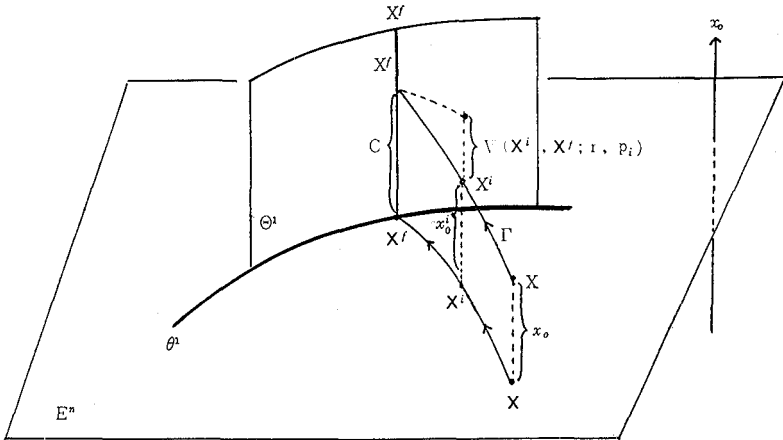


図6. 拡張された状態空間内におけるトラジェクトリー

すでに、われわれは、最適な法則の定義を与えている。<sup>24)</sup>そこで、この最適な法則に対応するトラジェクトリーを、**最適トラジェクトリー**とよび、これをつぎのように定義しよう。すなわち、最適な法則  $r^*$  によって生ずる最適な径路を  $p^*$  とすれば、最適トラジェクトリーは、(2.9) によって定義される  $\Gamma^*$  となる。

$$\Gamma^* \triangleq \{X^i : x_0^i + V(X^i, X^{i*}; r^*, p_i) = C, p_i \subset p^*\} \quad (2.9)$$

この定義によれば、最適でない径路  $p$  と最適な径路  $p^*$  とが一致することはあり得るが、最適でないトラジェクトリー  $\Gamma$  が最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  に一致することはない。また、図6から、つぎのことが明らかになる。すなわち、(2.8) 右辺の  $C$  の値を変化させれば、それに応じて、トラジェクトリーの1径数族が形成され、それらは、すべて  $x_0$  軸に平行で、状態空間  $E^n$  と径路  $p$  で交わる曲面上にならぶことになる。図6に示すように、径路  $p$  が、与えられた最終状態の集合  $\theta^1$  内に含まれるある状態でおわってあれば、その径路  $p$  に対応するトラジェクトリー  $\Gamma$  は、すべて、拡張された状態空間 ( $E^{n+1}$ )

24) (2.2), 参照。

内において、集合  $\theta^1 \triangleq \theta^1 \times \{x_0\}$  と直線  $X^f$  で交わることになる。<sup>25)</sup> ただし、直線  $X^f$  は、状態空間  $E^n$  と  $X^f = p \cap \theta^1$  で交わり、 $x_0$  軸に平行な直線を表わすものとする。

叙上の議論は、(2.9) によって定義された最適トラジェクトリー ( $\Gamma^*$ ) についても、妥当する。

最後に、このパラメーター ( $C$ ) の値の決め方について、1つの示唆を与えておこう。すでに、仮定した評価の加法性より、状態  $X$  から  $X^f$  までの移動コストは、状態  $X$  までの移動のコストとは独立であると考えられる。そこで、状態  $X$  における  $x_0$  の値を、それ以前の状態から  $X$  まで移動させるのに要するコストと考えることが許されよう。その場合には、さきの  $C$  を状態  $X^f$  への移動の総コストと考えることができる。

### §3. 状態方程式の規定と許容制御

さて、ここで、当該システムの態様を規定する法則を、特定のものに限定して、考察を進めることにしよう。

いま、状態  $X$  が時刻  $t$  の関数として、つぎの常微分方程式をみたすシステムを考えることにする。

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

ただし、 $u_1, u_2, \dots, u_m$  は、制御変数とよばれ、 $m$  次元ユークリッド空間 ( $E^m$ ) 内に点  $u$  をきめるものとする。

(2.10) は、状態  $X$  の時間的推移過程を明らかにしている意味において、状態方程式<sup>26)</sup>とよぶことができる。そして、ベクトル  $u$  は、われわれが、制御 (Control) し得るという意味で、御制ベクトル、あるいは、制御とよぶことにする。

25)  $\theta^1 \triangleq \theta^1 \times \{x_0\}$  は、 $\theta^1$  が  $\theta^1$  と  $\{x_0\}$  との直積集合として定義されるという意味であり、幾何学的には、 $\theta^1$  上で  $x_0$  軸に平行につくられる“Screen”を表わすことになる。

26) 「運動方程式」とよばれることもある。たとえば、[A]4, pp. 8—11, 参照。

そこで、この制御について、さらに説明を補足することにしよう。まず、その第1は、制御領域という概念である。一般に、制御変数  $u_1, u_2, \dots, u_m$  は、点  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  が、あらかじめ与えられた  $m$  次元空間内の集合  $U$  に属する値のみを各時刻 ( $t$ ) にとり、時刻  $t$  の関数と考えられる。言い換えれば、任意の時刻  $t$  に対して、 $\mathbf{u}(t) \in U$  をみたす制御  $\mathbf{u}(t)$  だけを考えればよいことになる。そこで、この集合  $U$  を、制御領域とよび、われわれが以下で考察の対象とする数学的な定義のなかに含めることにする。<sup>27)</sup> すなわち、あるシステムを数学的にとらえるためには、すでに述べた状態方程式 (2.10) に加えて、制御領域 ( $U$ ) を、ともに指定しなければならないものとするわけである。

つぎに、ここでの制御 ( $\mathbf{u}$ ) と、すでに与えた法則 ( $r$ ) との関連について言及しよう。そのために、いま制御領域  $U$  に属する制御  $\mathbf{u}$  を、ある時間的な閉区間  $[t_0, t_1]$  にわたって、時刻  $t$  の関数として与えてみよう。そのとき、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.11}$$

として、 $\mathbf{u}$  の値が求められる。そこで、この求められた  $\mathbf{u}$  の値を、さきの状態方程式 (2.10) 右辺の  $u_1, u_2, \dots, u_m$  に代入すれば、状態方程式 (2.10) は、時刻  $t$  と状態変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  のみの関数として与えられる。すなわち、

$$g_j(\mathbf{X}, t) \triangleq f_j(\mathbf{X}, \mathbf{u}(t)) \tag{2.12}$$

と定義すれば、(2.10) は、

$$\frac{dx_j}{dt} = g_j(\mathbf{X}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad j=1, 2, \dots, n \tag{2.13}$$

として表わされることになる。したがって、制御  $\mathbf{u}$  を、ある区間  $[t_0, t_1]$  にわたって、時刻  $t$  の関数として与えることは、その区間におけるシステムの動的な態様を支配する法則をきめることと同じことになる。

27) 制御領域  $U$  は、多少なりとも、幾何学的な特徴をもつ。なぜなら、対象とする制御部分の構造によっては、制御変数  $u_1, u_2, \dots, u_m$  の間に、 $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_m) = 0$  なる等式関係が成立することもあれば、 $\Psi(u_1, u_2, \dots, u_m) \leq 0$  で表わされる不等式関係が成立することもあり得るからである。

最後に、制御の特性として与えられる、きわめて重要な仮定を明らかにしておこう。それは、われわれが、以下において考察の対象とする制御を、つねに連続的なものに限る必要はなく、さらに条件をゆるめて、任意の区分的に連続な制御であってもよいとする仮定である。すなわち、有限個の連続な部分からなる制御であっても許容されるわけである。

このような制御は、われわれの理論を実際に応用する場合、とくに重要な意味をもつ。そこで、この仮定を、より正確に述べておこう。すなわち、制御領域  $U$  内に値をもつ関数  $u(t)$  は、第1種の不連続を示す有限個の時刻だけを除けば、考えているすべての  $t$  に対して連続であるとき、区分的に連続であるという。ただし、第1種の不連続とは、各不連続点  $\tau$  で有限な左極限と右極限

$$u(\tau-0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t < \tau}} u(t) \quad (2.14)$$

$$u(\tau+0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \tau \\ t > \tau}} u(t) \quad (2.15)$$

が存在することを意味する。<sup>28)</sup>

図7は、区分的に連続な制御の例を示している。すなわち、時刻  $\tau_1$  と  $\tau_2$  で、制御  $u(t)$  は、不連続となっている。

しかし、これらの不連続点における値は、以下の議論でなんら本質的な役割を果すものではない。ただ、そのような場合でも、制御  $u(t)$  が、 $t$  の全区間——すなわち  $[t_0, t_1]$  の全体——で定義されていることを保証するために、各不連続点の値を、便宜上、つぎのように定義しておこう。すなわち、 $t = \tau_i$  で制御  $u(t)$  が不連続であるとき、

$$u(\tau_i) = u(\tau_i + 0) \quad (2.16)$$

と定義する。<sup>29)</sup> さらに、 $u(t)$  は、与えられた区間の両端、すなわち、 $t = t_0$  と

28) [A] 4, pp.14—15, 参照。

29) 不連続点  $\tau_i$  における制御  $u(t)$  の値を、必ずしも右極限の値に等しくする必要はない。たとえば、左極限の値  $u(t) = u(\tau_i - 0)$  で定義しているものとして、[A] 3, p.14 がある。

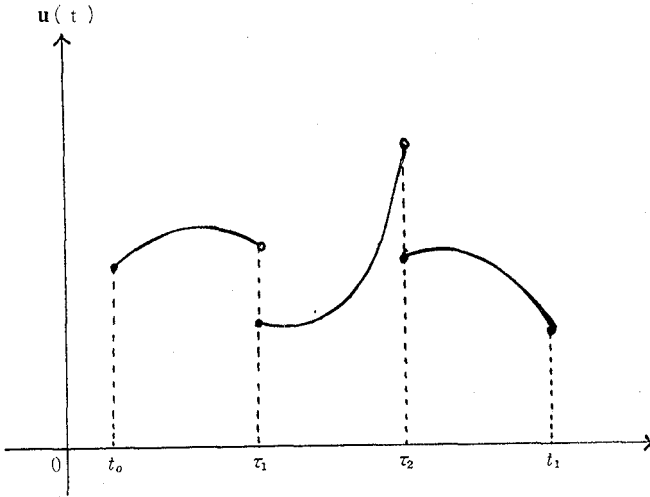


図7. 区分的に連続な制御

$t=t_1$ においても連続であると仮定する。いうまでもなく、これらの仮定は、さきの状態方程式 (2.10) の解には、なんらの影響をも及ぼさない。したがって、われわれは、制御領域  $U$  に属し、かつまた、それが所与の区間  $[t_0, t_1]$  の両端で連続であるすべての区分的に連続な関数  $u(t)$  を、許容制御 (Admissible control) とよぶことにする。

では、なにゆえに、われわれが制御を考える場合、それを連続的なものだけに限定せず、区分的に連続的なものをも含めて考える必要があるのであろうか。それは、最適制御が原則として不連続なものだからである。<sup>30)</sup> たとえば、いま、図8に2つの半直線、すなわち、実線部で示される不連続関数が最適制御であると仮定しよう。

この場合、その不連続な関数を“なめらか”にすることにより、この関数を近似する連続な関数、すなわち、点線部分を得ることは、できるであろう。しかし、それよりも、さらに一層急な勾配をもつ連続関数を選ぶことができ、その

30) すなわち、瞬間的な跳躍での切換え (Switch) をもつのが一般的だからである。

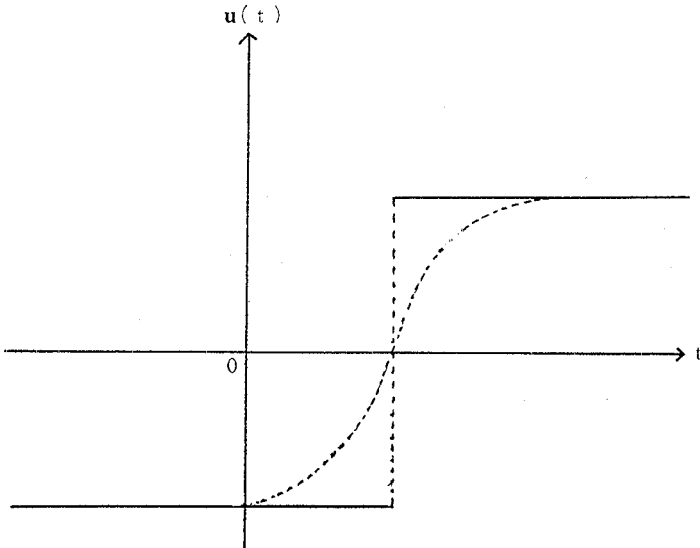


図8. 不連続制御と連続制御

方が、最適制御に一層近くなる。それゆえ、“なめらか”な部分で不連続部分を近似する連続関数のなかには、最適制御が存在しないことになる。

要するに、区分的に連続な制御を考える利点は、第1に、最適制御問題の十分広範囲な実例に対して、数学的に正確な解を与え得ること、第2に、技術的にそれを実現するうえで、十分に明瞭、かつ便利であることに求められる。<sup>31)</sup>

#### §4. 積分形の評価基準

前節では、システムの動的過程を規定する法則を、常微分方程式という特定の枠組を設定することによって、限定的に考察した。それに引き続いて、本節では、システムの動的過程に、あるコストを結びつける規則（すなわち、汎関数）についても、やはりこれを特定化することにして、限定的考察を加えることにしよう。

われわれの状態方程式は、(2.10) に示す1階の連立常微分方程式によって、

31) [A]4, p.16, 参照。



完全に記述し得るものと仮定した。これを、ベクトル表示すれば、つぎのようになる。

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(X(t), u(t)), \quad j=1,2,\dots, n \quad (2.17)$$

その場合、 $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  は、システムの状態を、与えられた初期状態  $X(t_0) = X^0$  から、与えられた最終状態の集合  $\theta^1$  内の点  $X(t_1) = X^1 \in \theta^1$  へ、あるいは、その他の状態  $X(t_1) = \bar{X}^1 \notin \theta^1$  へ移す制御であると考ええる。

そこで、この常微分方程式 (2.17) によって表わされるシステムの動的過程に対応する1つの評価基準 (汎関数) として、つぎの積分形で表わされるものを、以下で取り扱うことにする。<sup>32)</sup>

$$V(X^0, X^1; r, p) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(X(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (2.18)$$

この考え方を、さらに敷衍すれば、あるシステムについて、任意の状態  $X(t_1)$  へ移動させるときの汎関数の値 (すなわち、コスト) は、

$$V(X^i, X^1; r, p_i) = \int_{t_i}^{t_1} f_0(X(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (2.19)$$

として、与えられる。

そこで、いま、変数  $x_0$  を、次式によって定義する。

$$x_0(t) + \int_t^{t_1} f_0(X(\tau), u(\tau)) d\tau = C \quad (2.20)$$

ただし、 $C$  は定数パラメーターである。<sup>33)</sup>

その結果、(2.20) より、われわれは、つぎの微分方程式を得ることができ、これを、さきの状態方程式 (2.17) と一括して、取り扱うことが可能となる。

32) いうまでもなく、 $f_0(X(\tau), u(\tau))$  は、 $\tau$  に関して積分可能性の条件をみたす、ある所与の関数である。

33) 本章、第2節の図6、参照。

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2.21)$$

さて、ここで、状態方程式 (2.17) の解の性質について、検討しておこう。そのために、まず、われわれは、(2.17) に関して、関数  $f_j(\mathbf{X}, \mathbf{u})$ 、および、 $\partial f_j(\mathbf{X}, \mathbf{u})/\partial x_i$ 、( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) が  $E^{n+m}$  内で定義され、<sup>34)</sup> かつ連続であると仮定する。そのとき、許容制御の関数<sup>35)</sup>  $\mathbf{u}(t)$ 、 $t_0 \leq t \leq t_1$  と、 $t=t_0$  における初期条件  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0$  が与えられると、(2.17) の解が一意的にきまる——すなわち、 $t$  の閉区間  $[t_0, t_1]$  にわたって、当該システムのたどる径路が決定される——場合がある。ただし、その場合、この径路がすべての  $t \in [t_0, t_1]$  について定義される必要がある。

つぎに、この点を補足しておこう。われわれの考察する許容制御  $\mathbf{u}(t)$  は、区分的に連続である仮定をみたしている。そこで、この関数  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  の少なくともどれか1つが不連続となる  $t$  の値を、 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  としよう。そのとき、この制御関数  $\mathbf{u}(t)$  が、状態方程式 (2.17) の右辺に代入されたものとして、この  $n$  次元連立常微分方程式について、不等式  $t_0 \leq t \leq \tau_1$  をみたす  $t$  に対応する状態変数  $\mathbf{X}(t)$  の値を、考えることにする。関数  $\mathbf{u}(t)$  は、 $t_0 \leq t \leq \tau_1$  で連続であるから、関数  $f_j(\mathbf{X}, \mathbf{u})$  および、その偏導関数  $\partial f_j(\mathbf{X}, \mathbf{u})/\partial x_i$  は変数  $\mathbf{X}$ 、 $t$  のすべてについて連続である。したがって、 $t_0 \leq t < \tau_1$  のとき、(2.17) に対して、「微分方程式系の解の存在と一意性に関する定理」<sup>36)</sup> が適用され、区間  $t_0 \leq t < \tau$  (ただし、 $\tau < \tau_1$ ) に対して、初期条件  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0$  をみたす解、 $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  が一意的に定義されることになる。しかし、その場合でも、解  $\mathbf{X}(t)$  を、区間  $t_0 \leq t \leq \tau_1$  全体に延長できるとは必ずしもかぎらない。なぜなら、与えられる問題の状況によっては、その解が  $\tau_1$  よりも小さい  $t$  に対して、無限大に発散してしまう場合もあり得るからである。(図9、参照)

そこで、この解  $\mathbf{X}(t)$  が、区間  $t_0 \leq t \leq \tau_1$  全体で定義され、有限個の確定し

34) 一般に、状態空間を  $E^n$ 、制御領域を  $E^m$  と想定しているためである。

35) 本章、第3節で与えた許容制御の定義、参照。

36) III章、第3節、参照。

た極限值

$$X(\tau_1) \cong \lim_{t \rightarrow \tau_1} X(t) \tag{2.22}$$

が存在すると仮定しよう。そうすれば、解  $X(t)$  は、区間  $t_0 \leq t \leq \tau_1$  全体で定義され、しかもその区間全体で連続となる。(図10、参照)

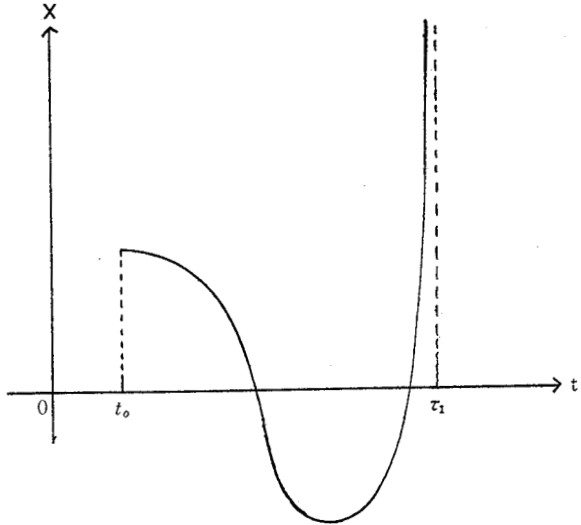


図9. 解  $X(t)$  が区間  $t_0 \leq t \leq \tau_1$  で定義されない場合

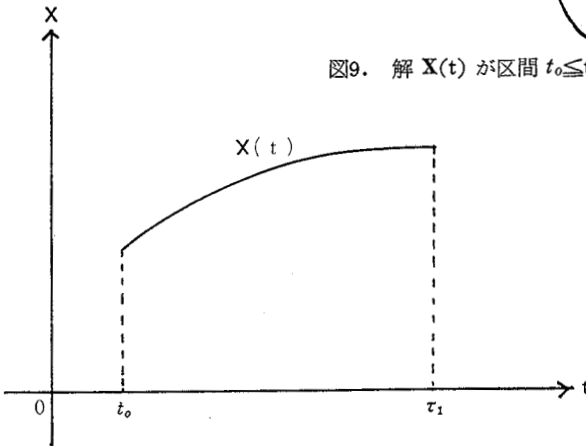


図10. 解  $X(t)$  が区間  $t_0 \leq t \leq \tau_1$  で定義される場合

つぎに、この有限確定値  $X(\tau_1)$  を初期値として、常微分方程式 (2.17) を、区間  $\tau_1 \leq t < \tau_2$  で考える。もとより、この場合にも、叙上の「常微分方程式に関する解の存在と一意性」の定理が適用され、ある区間  $\tau_1 \leq t < \tau'$  (ただし、 $\tau' \leq \tau_2$ ) 内で初期値  $X(\tau_1)$  をもつ解が定義される。<sup>37)</sup>このとき得られる解  $X(t)$  は、 $t = \tau_1$  でも連続となり、したがって、それが定義されるすべての区間  $t_0 \leq t < \tau'$  で連続となる。図11は、それを例示している。

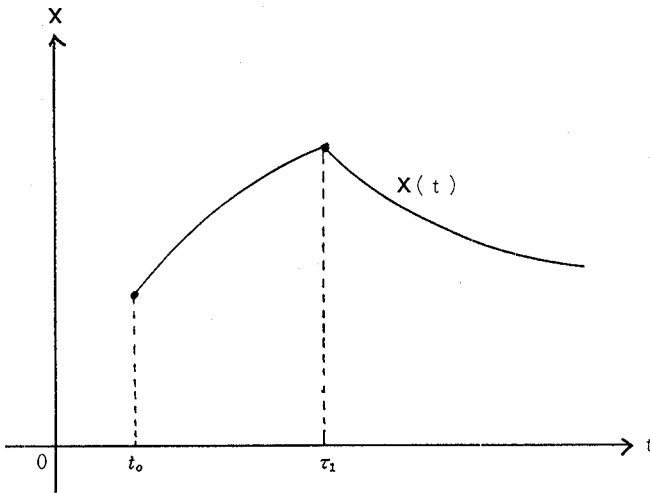


図11. 制御  $u(t)$  に対応する解  $X(t)$  の接続

ここでも、また、その解  $X(t)$  が、区間  $t_0 \leq t \leq \tau_2$  全体で定義され、 $t$  を  $\tau_2$  に近づけたとき、その極限值として、

$$X(\tau_2) \triangleq \lim_{t \rightarrow \tau_2} X(t) \tag{2.23}$$

が存在すると仮定すれば、そのとき得られる解  $X(t)$  は、区間  $t_0 \leq t \leq \tau_2$  全体で定義され、また連続となる。以下、同様の手順を経て、(2.17) の解を、

37) このことは、区間  $\tau_1 \leq t < \tau_2$  において、制御関数  $u(t)$  が、 $u(\tau_1) \triangleq u(\tau_1 + 0)$  によって、連続であることから可能となる。(2.16)、参照。

$t_0 \leq t \leq t_1$  の全区間にわたって延長することが可能となる。このようにして、構成される関数  $X(t)$  を、われわれは、初期条件  $X(t_0) = X^0$  での、制御  $u(t)$  に対応する (2.17) の解とよぶことにする。したがって、制御  $u(t)$  に対応する、初期条件  $X(t_0) = X^0$  をみたす常微分方程式 (2.17) の解が、区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  の全体で定義され、時刻  $t_1$  に  $X(t_1) = X^1$  を通る<sup>38)</sup> ならば、許容制御  $u(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) が、システムの状態を初期状態  $X^0$  から  $X^1$  へ (状態方程式 (2.17) によって) 移すとよぶことにする。<sup>39)</sup>

図12は、 $u(t)$  に対応する解  $X(t)$  の構成の仕方を例示している。

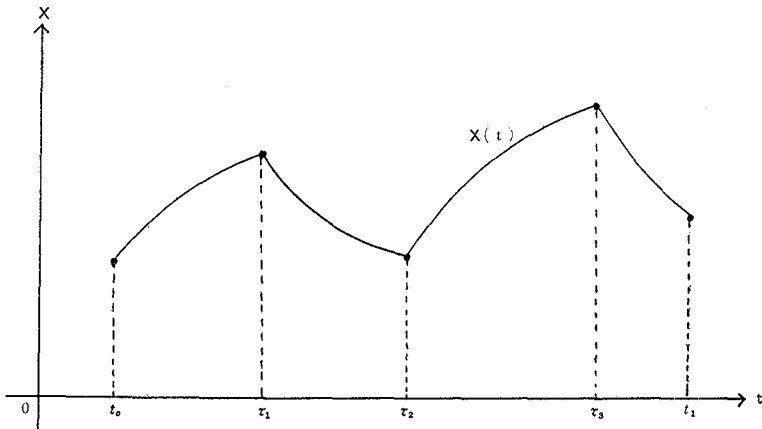


図12. 制御  $u(t)$  に対応する解  $X(t)$  の構成

つぎに、積分形の評価基準より導出される微分方程式 (2.21) を、(2.17) と同じ枠組のなかにおいて、それらを同時に考察することにしよう。方程式 (2.21) および、(2.17) を同時に合わせ考えれば、つぎの  $(n+1)$  次の1階

38) これを、 $t=t_1$  における「終端条件」とよぶ。

39) ただし、(2.17) における状態連続の成分  $f_j(X(t), u(t))$  には、時刻  $t$  が陽の形で含まれていない。それゆえ、初期時刻の値を、任意に選ぶことができる。これは、制御  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  によって、システムの状態が、 $X^0$  から  $X^1$  へ移されるならば、制御  $u(t-\Delta t)$ ,  $t_0 + \Delta t \leq t \leq t_1 + \Delta t$  も、また、システムの状態を  $X^0$  から  $X^1$  へ移すことを意味し、いわゆる「オートノマス系」に当たっている。脚注15)、参照。

連立常微分方程式が求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_0}{dt} = f_0(X(t), u(t)) \\ \frac{dx_j}{dt} = f_j(X(t), u(t)), j=1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (2.24)$$

そのとき、得られる解によって、拡張された状態空間 ( $E^{n+1}$ ) 内に、トラジェクトリーが定義される。われわれは、このトラジェクトリー方程式を、つぎのように、ベクトル表示しておこう。<sup>40)</sup>

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t), u(t)) \quad (2.25)$$

ただし、 $f(X(t), u(t)) = [f_0(X(t), u(t)), f_1(X(t), u(t)), \dots, f_n(X(t), u(t))]'$  を表わすものとする。

さて、ここで、関数  $f_j(X, u)$  および、 $\partial f_j(X, u)/\partial x_i$ , ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) に対して、すでに与えた同じ仮定を、関数  $f_0(X, u)$  および、 $\partial f_0(X, u)/\partial x_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) に対しても与えることにしよう。すなわち、関数  $f_0(X, u)$  および、その導関数  $\partial f_0(X, u)/\partial x_i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) も、 $E^{n+m}$  内で定義され、連続であると仮定する。そうすれば、許容制御関数  $u(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) と、 $t=t_0$  における初期条件が与えられれば、(2.25) は、区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  に対して、連続な解、

$$X(t) \cong S(t; t_0, X^0), t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.26)$$

が一意的に求められる。<sup>41)</sup>

以上の考察により、われわれは、いわゆる「最短時間問題」を、つぎのよう

40)  $X$  は、 $x_0$  を含む  $(n+1)$  次元ベクトル、 $X$  は、 $x_0$  を含まない  $n$  次元ベクトルであることを注意せよ。

41) ただし、ここでも、制御  $u(t)$  が、区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  の全域で定義される場合に限られる。脚注38)、参照。

に正確に述べることができる。すなわち、それは、あるシステムの状態を、与えられた初期状態  $X^0$  から、あらかじめ与えられている最終状態  $X^1$  へ移すように作用するすべての許容制御  $u(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) のうちで、この移行が最短時間で行なわれるものを求める問題である。<sup>42)</sup> そのとき、積分 (2.18) を最小にする制御  $u(t)$  を最適制御とよび、それを  $u^*(t)$  で表わすことにする。さらに、その最適制御  $u^*(t)$  に対応する (2.25) の解を、最適トラジェクトリーとよび、それを  $X^*(t)$  で表わすことにする。

### §5. 最適制御問題の定式化とその分類

以上、われわれは、最適制御問題の一般の特徴を明確化するため、まず、第1節および第2節でその基本的な仮定として、2つの条件、すなわち、(i) 法則(制御)の連結可能性と、(ii) 評価の加法性、を明らかにした。ついで、第3節および第4節で、その2つの条件をみたす範囲のなかで、状態方程式およびそれに対応する評価基準の特定化を試みた。すなわち、第3節では、システムの動的過程を示す状態方程式が、常微分方程式によって完全に規定される場合について考察した。そして、第4節では、その動的過程を評価する手段として、いわゆる評価基準(すなわち、汎関数)が積分形によって表現される場合について考察した。

いまや、われわれは、このようにして特定化された最適制御問題のなかで、一般的定式化を求める段階に立ち至っている。そこで、本節では、この最適制御問題の定式化とその分類について検討を進めていくことにしよう。最適制御問題の一般形は、つぎのように定式化できる。

#### 最適制御問題 (一般形)

つぎの評価基準

$$\int_{t_0}^{t_f} f_0(X(t), u(t)) dt \quad (2.27)$$

を、以下の制約に従って最小にする制御  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$  を求めよ。

(i) 状態方程式

$$\dot{X} = f(X, u) \quad (2.28)$$

42) [A]4, p.15, 参照。

(ii) 初期条件

$$X(t_0) \in \theta^0 \quad (2.29)$$

(iii) 終端条件

$$X(t_f) \in \theta^1 \quad (2.30)$$

(iv) 制御制約

$$u \in U \quad (2.31)$$

または,

$$(X, u) \in V \quad (2.32)$$

または,

$$X \in W \quad (2.33)$$

ただし,

$f_0$  および  $f$  は, 目的関数および状態方程式の関数を表わし, 所与とする。

$\theta^0$  および  $\theta^1$  は, 初期状態および最終状態の集合を表わし, 所与とする。

$U$ ,  $V$  および  $W$  は, 制御領域, 制御・状態領域および状態領域を表わし, 所与とする。

$t_0$  および  $t_f$  は, 初期時刻および最終時刻を表わし, 所与または未知と仮定する。

この定式化にとって留意すべき点は, (iv) に示した制御制約にある。そこには, 3つのケースが分類表示されている。そこで, つぎに, この各々の場合について, 順次検討を加えていくことにしよう。

まず, その第1は, (2.31) によって, 制御が与えられている場合についてである。これは, 制御  $u$  が他の変数 (たとえば, 状態変数  $X$ ) とは無関係に与えられる, いわば独立した制御制約を意味する。したがって, いま, 簡単化のため, 2つの制御  $u_1$  および  $u_2$  を想定し, その各々がつぎに示す範囲



$$\alpha_i \leq u_i \leq \beta_i, \quad i=1,2 \tag{2.34}$$

のなかで、任意に変化し得る場合は、このケースにあたり、そのときの制御領域  $U$  は、図13の斜線部分で示される。以後、このような問題を、「タイプ1の問題」とよぶことにする。

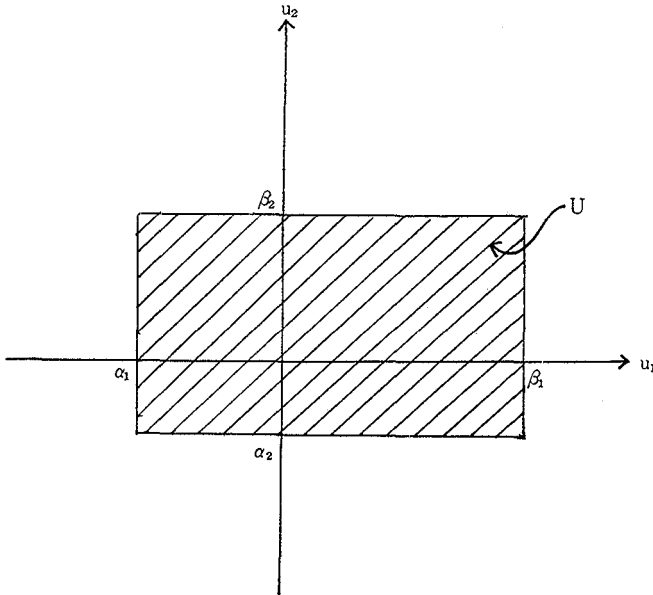


図13. 制 御 領 域  $U$

つぎに、制御制約が、(2.32) によって与えられる場合について検討しよう。この場合、制御  $u$  は、状態変数  $X$  と関係して与えられるので、状態変数  $X$  から独立したものとして、制御  $u$  を考えることは、もはや許されない。その1例として、制御変数  $u_i$  と状態変数  $x_j$  との間に、つぎの線形不等式、

$$x_j < \alpha + \beta u_i \tag{2.35}$$

が成立するものと仮定しよう。そのとき、制御・状態領域  $V$  は、図14の斜線

部分のように示される。このように、制御制約が(2.32)で与えられる問題を、「タイプ2の問題」とよぶことにする。<sup>43)</sup>

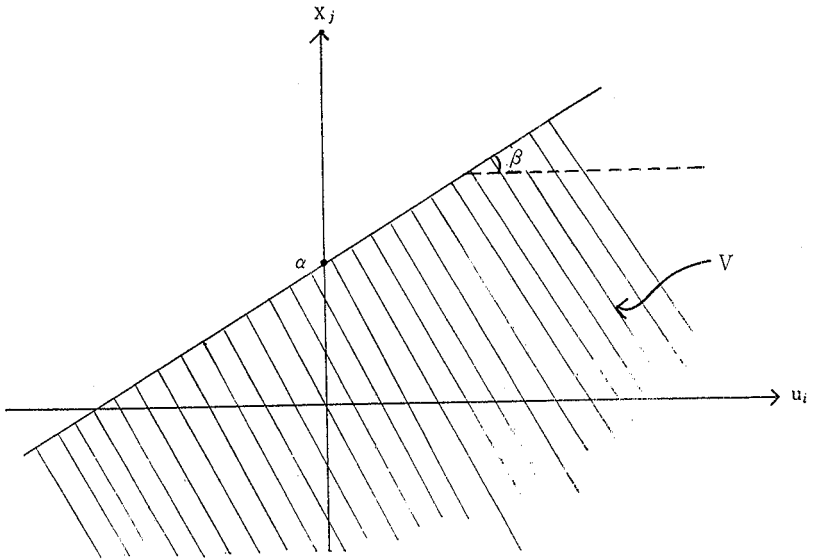


図14. 制御・状態領域 V

最後に、制御制約が、(2.33)によって与えられる場合について検討しよう。これは、状態変数  $X$  のみに関する制約であり、その意味で、制御制約とよぶよりも、むしろ状態制約とよぶべきであろう。しかし、われわれは、あくまでも、制御変数  $u$  を直接操作することによって、間接的に、状態  $X$  を変化させる<sup>44)</sup>のであるから、この場合を、広義の制御制約とよぶことも、また許されよ

43) この場合、制御制約が、さきのタイプ1を含んでいてもよい。なぜなら、タイプ1の制約は、タイプ2の制約に含まれる、1つの特殊ケースと考えられるからである。

44) A地点からB地点へ、自動車を利用して最短時間で走行しようとするとき、その中間地点に、地形上、通行禁止の区域がある場合を想定せよ。

う。いま、状態変数  $x_i$  と  $x_j$  に関して、次式

$$(x_i - 2)^2 + (x_j - 1)^2 \geq 2 \tag{2.36}$$

をみたす状態制約  $W$  は、図15の斜線部分のようになる。そして、広義の制御制約（すなわち、状態制約）が (2.33) で与えられる問題を、われわれは、「タ

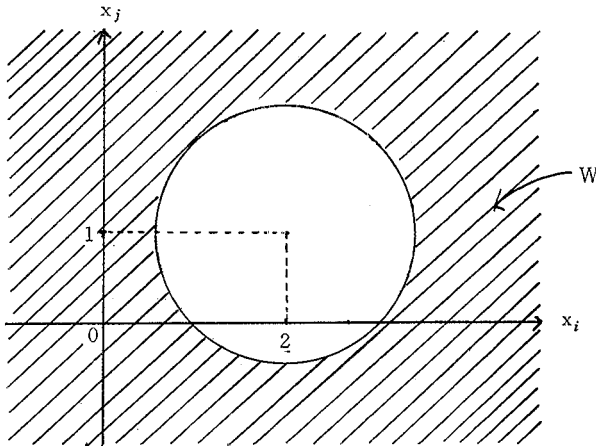


図15. 状態制約  $W$

イプ3の問題」とよぶことにする。<sup>45)</sup>

### III

この章では、タイプ1の問題に対する最大原理が考察される。まず最初に、われわれが、前章の最後で与えた最適制御問題の分類にもとづき、タイプ1の問題が定式化される。ついで、最大原理を導出する準備として、限界面の定義とその幾つかの重要な性質が明らかにされる。さらに、状態方程式と密接な関係をもつ、線形微分方程式の解の性質が明らかにされ、それに対応する変分方程式と、随伴方程式の検討が加えられる。以上の準備段階を経たうえで、前章の

45) この場合も、制御制約として、タイプ1、またはタイプ2を含んでいてもよい。なお、われわれの問題意識とは幾分異なった視角にもとづく、最適制御問題の分類化も、当然可能である。この点については、たとえば、[A]1, pp.26-28, 参照。

最後に定式化したタイプ1の問題に対する最大原理の導出とその証明が与えられる。そして、最後に、最大原理で重要な意味をもつ法線ベクトルのみたすべき条件として、横断条件が指摘され、その内容が終端点および初期点について、それぞれ検討される。

### §1. 問題の定式化

タイプ1の問題は、つぎのように定式化できる。

#### タイプ1の問題

つぎの評価基準

$$\int_{t_0}^{t_f} f_0(X(t), u(t)) dt \quad (3.1)$$

を、以下の制約に従って最小にする制御  $u(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_f$ ) を求めよ。

(i) 状態方程式

$$\dot{X} = f(X, u) \quad (3.2)$$

(ii) 初期条件

$$X(t_0) = X^0 \quad (3.3)$$

(iii) 終端条件

$$X(t_f) \in \theta^1 \quad (3.4)$$

(iv) 制御制約

$$u \in U \quad (3.5)$$

ただし、

$$X \in E^n, u \in E^m$$

$$\theta^1 \subset E^n, U \subset E^m$$

$t_0$  は所与,  $t_f$  は未知とする。

いま,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  とおき,  $x_0(t)$  をつぎのように定義しよう。

$$x_0(t) \triangleq \int_{t_0}^t f_0(X(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (3.6)$$

その結果、つぎの微分方程式が、上式より、直ちに導出される。

$$\dot{x}_0 = f_0(X(t), u(t)) \quad (3.7)$$

ただし、 $x_0(t_0) = 0$  と仮定する。<sup>46)</sup>

そこで、タイプ1の問題を書きかえるために、この  $x_0(t)$  を目的関数とし、それに対応して状態空間  $E^n$  を拡張すれば、さきの状態方程式 (3.2) は、つぎのように変形される。すなわち、 $X \triangleq (x_0, X) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ 、 $f \triangleq (f_0, f) = (f_0, f_1, \dots, f_n)$  と定義すれば、拡張された状態空間  $E^{n+1}$  における状態方程式は、 $\dot{X} = f(X, u)$  として表わされ、<sup>47)</sup> したがって、タイプ1の問題は、つぎのように書きかえられる。

すなわち、

つぎの目的関数

$$x_0(t_f) \quad (3.8)$$

を、以下の制約のもとで、最小化せよ。

(i) 状態制約

$$\dot{X} = f(X, u) \quad (3.9)$$

(ii) 初期条件

$$X(t_0) = (0, X^0) \quad (3.10)$$

(iii) 終端条件

$$X(t_f) \in \theta^1 \quad (3.11)$$

46) II章、第4節、参照。ここで、 $t_f - t_0$  はあらかじめ決められていないから、所与の  $t_0$  に対して  $t_f$  の値は、各制御ごとに異なっているかもしれない。しかし、最適制御  $u^*(t)$  に対する  $t_f$  の値を  $t_f^*$ 、最終状態を  $X^{1*} \in \theta^1$  とすれば、 $x_0$  の初期値は、積分形の評価基準 (3.1) の値を決めるのに無関係となるから、 $x_0(t_0) = 0$  と選んでもさしつかえないことになる。すなわち、 $u^*(t)$  は、 $x_0(t_f)$  の値を最小にするものとなる。

47) II章、第4節、(2.24)、参照。

(iv) 制御制約

$$u \in U \quad (3.12)$$

ただし,

$$\theta^1 = \theta^1 \times \{x_0\} \subset E^n \times E^1$$

を表わすものとする。<sup>48)</sup>

以上の変形により, われわれは, 当初の評価基準 (3.1) を, 拡張した状態方程式の1つに含めている結果, 目的関数の値  $x_0(t_f)$  が当該システムに直接影響を与えないように, タイプ1の問題を定式化したことになる。

## §2. 限界面の定義とその性質

本節では, 最大原理の導出にとって重要な意味をもつ, 限界面の定義を与え, ついで, その性質を, 定理の形でまとめることにしよう。<sup>49)</sup>

すでに, われわれは, 最適性の定義<sup>50)</sup>を与え, その定義によれば, 最小コストは一意的にきまることを明らかにした。さらに, その最小コストは, 与えられた最終状態の集合 ( $\theta^1$ ) に対して, 初期状態 ( $X^0$ ) のみの関数になることを強張して,

$$V^*(X^0; \theta^1) \triangleq V(X^0, X^{1*}; r^*, p^*) \quad (3.13)$$

と表わすことにした。<sup>51)</sup>ここで, 再度, この最小コスト  $V^*(X^0; \theta^1)$  に注意を払うことにしよう。

いうまでもなく,  $V^*(X^0; \theta^1)$  は, 最適な法則にもとづく径路が存在するすべての点の集合 ( $E^*$ ) 内に対して, 定義される。<sup>52)</sup>そこで,  $C$  を定数パラメータとすると, つぎの方程式

48)  $\theta^1$  の幾何学的形状については, II章, 第2節の図6, 参照。

49) 限界面の概念を用いなくて, 最大原理を導出するのに, 位相幾何学的方法がある。たとえば, [A]8, 参照。しかし, 限界面の導入が, 複雑な問題を単純化し, 幾何学的思考を与える意味で, より説得的である点を考慮して, 本稿では, ライトマン [A]3 の方法にもとづき, 順次検討を加えていくことにする。

50) II章, 第1節, (2.2), 参照。

51) II章, 第1節, (2.5), 参照。

52) II章, 第1節, (2.4), 参照。すなわち,  $X \in E^*$  を意味する。

$$x_0 + V^*(X; \theta^1) = C \tag{3.14}$$

は、 $(n+1)$  次元のユークリッド空間  $(E^{n+1})$  内に 1つの曲面  $(\Sigma)$  を形成する。言い換えるならば、この曲面  $\Sigma$  は、 $E^*$  の点と 1対1に対応する点からなる曲面である。さらに、(3.14) は、つぎの等式

$$V^*(X; \theta^1) = C \tag{3.15}$$

が成立する面を  $S$  とすれば、その面上で  $x_0$  の値をゼロとする。<sup>53)</sup> 図16は、ある特定の  $C$  の値に対して、 $\Sigma$  および  $S$  を示したものである。

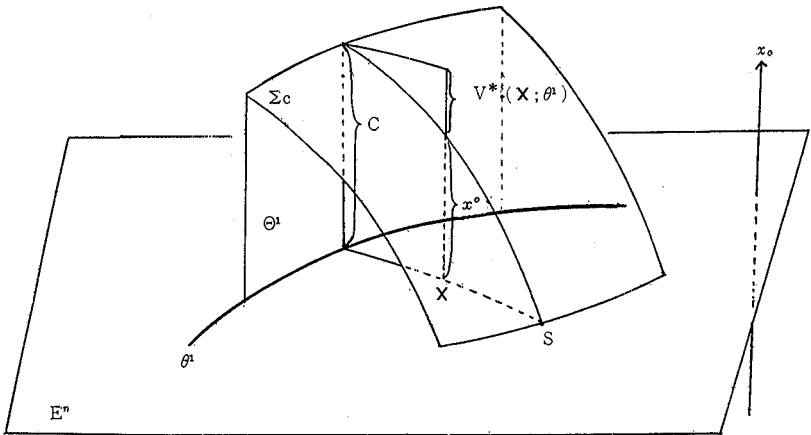


図16. 限界面  $(\Sigma)$  と最適等コスト面  $(S)$

つぎに、パラメータの値を変化させれば、それに応じて、(3.14) より、 $E^* \ni E^* \times \{x_0\}$  内に曲面の 1 径数族  $\{\Sigma\}$  が形成され、また、(3.15) により、 $E^*$  内に同じく曲面の 1 径数族  $\{S\}$  が形成されることになる。そこで、これらの面群を、それぞれ、限界面および最適等コスト面とよぶことにする。

すなわち、ある定数パラメータ  $C$  に対する 限界面は、次式によって定義さ

53) ただし、 $V^*(X; \theta^1)$  が  $X$  と無関係な場合には、 $V^*(X; \theta^1)$  は、つねにゼロとなり、この場合、 $S$  の定義はできなくなる。

れる。<sup>54)</sup>

$$\Sigma_c = \{X = (x_0, X) \mid x_0 = C - V^*(X; \theta^1), X \in E^*\} \quad (3.16)$$

また、この  $C$  に対応する最適等コスト面は、次式によって定義される。

$$S_c = \{X \mid V^*(X; \theta^1) = C, X \in E^*\} \quad (3.17)$$

これらの定義により、幾つかの重要な性質が明らかにされる。まず、ある1つの最適等コスト面  $S$  に属する点 ( $X^0 \in S$ ) を初期状態として、その点より、与えられた最終状態の集合  $\theta^1$  ヘシステムの状態を移すのには、つねに同じ最小コスト  $C$  を必要とすることが判明する。<sup>55)</sup> つぎに、最終状態の集合  $\theta^1$  の部分集合で、最適経路の終端点の集合を  $\theta$  とすれば、すでに与えた評価の加法性の仮定<sup>56)</sup>により、すべての点  $X \in \theta$  に対して、 $V^*(X; \theta^1) = 0$  となる。さらに、また、 $\theta^1$  と一度しか交わらない経路について最適性を定義すれば、直ちに  $\theta = \theta^1$  となることが判明する。<sup>57)</sup>

以下、この境界面について、その性質を、トラジェクトリーとの関連で順次検討し、その結果を、定理の形でまとめることにする。

まず、最初に、与えられた最終状態の集合  $\theta^1$  内の点  $X^1$  でおわる最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  に注目しよう。<sup>58)</sup> これを、すでに与えたわれわれの定義<sup>59)</sup>にしたがって表示すれば、つぎのようになる。

$$\Gamma^* : x_0^i = C - V(X^i, X^{1*}; r^*, p_i) \quad (3.18)$$

さらに、これと同じ最終状態の集合  $\theta^1$  内の点  $X^1$  を通る境界面  $\Sigma$  は、次式によって示される。<sup>60)</sup>

54) ある1つの定数パラメータ  $C$  に対応する境界面の定義として、 $C$  なる添字を  $\Sigma$  に与える。つぎの (3.17) の定義式についても同様の取り扱い方をする。しかし、記号の煩雑化をさけるため、以下、自明な場合には、この添字を省略することにする。

55) 「最適等コスト面」の呼称は、この性質に由来する。

56) II章、第1節、参照。

57) [A]3, p.7, Athans, M. & Falb, P., "Optimal Control", p.286, 参照。

58) II章、第2節の図6, 参照。

59) II章、第2節、(2.9), 参照。

60) 本章、第2節の図16, 参照。



$$\Sigma : x_0 = C - V^*(X^i; \theta^1) \tag{3.19}$$

そこで、まず、この両者の関係を、つぎの〔補助定理1〕として述べることにしよう。<sup>61)</sup>

〔補助定理1〕

集合  $\theta^1$  内の点  $X^1$  でおわる最適トラジェクトリーは、その点  $X^1$  を通る限界面 ( $\Sigma$ ) 上にある。

これを証明するには、 $X^0$  から  $\theta^1$  への最適径路 ( $p^*$ ) 上のすべての点  $X^i \in p^*$  に対して、その点における最適トラジェクトリ  $\Gamma^*$  上の  $x_0^i$  の値と、限界面  $\Sigma$  上の  $x_0$  の値とが、一致すること、すなわち、

$$V(X^i, X^{1*}; r^*, p_i) = V^*(X^i; \theta^1), p_i \subset p^* \tag{3.20}$$

が成立することを示せば、十分である。

そこで、帰謬法を用いて、(3.20) が成立することを証明しよう。そのために、つぎの図17に示す2つの異なった径路 (すなわち、 $p_i$  と  $p_i^*$ ) を想定する。

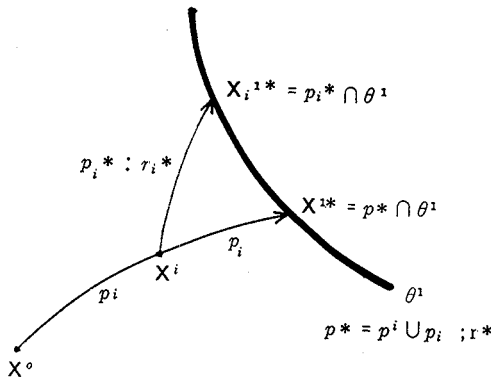


図17. 2つの仮想径路 ( $p_i$  と  $p_i^*$ )

すでに述べたように、初期状態  $X^0$  から最終状態  $\theta^1$  への移行にともなう最

61) 以下に示す補助定理の導出は、[A]3, pp.7-12, に負う。

小コスト  $V^*(X^0; \theta^1)$  は、「評価の加法性」の仮定<sup>62)</sup>によって、その最適径路  $p^*$  を任意の2つの部分径路 ( $p^i$  および  $p_i$ ) に分割したときの各径路に対応するコストの和として示される。すなわち、任意の  $X^i \in p^*$  に対して、

$$\begin{aligned} V^*(X^0; \theta^1) &\triangleq V(X^0, X^{1*}; r^*, p^*) \\ &= V(X^0, X^i; r^*, p^i) + V(X^i, X^{1*}; r^*, p_i) \end{aligned}$$

ただし、 $p^* = p^i \cup p_i$ ,  $X^{1*} = p^* \cap \theta^1$  (3.21)

が成立することを意味する。

さて、帰謬法の手順にしたがって、(3.20) の成立を否定してみよう。すなわち、つぎの不等式、

$$\begin{aligned} V^*(X^i; \theta^1) &\triangleq V(X^i, X_i^{1*}; r_i^*, p_i^*) \\ &< V(X^i, X^{1*}; r^*, p_i) \end{aligned}$$

(3.22)

をみたす、状態  $X^i$  から、最終状態  $\theta^1$  への移動に対する最適な法則  $r_i^*$  が存在すると仮定しよう。したがって、 $p_i^*$  は、その仮定した最適法則  $r_i^*$  に対応する径路を表わし、 $X_i^{1*} = p_i^* \cap \theta^1$  を表わすものとする。

このとき、当該システムの状態を、まず、初期状態  $X^0$  から  $X^i$  までを法則  $r^*$  によって (すなわち、径路  $p^i$  に沿って) 移動させることが可能となる。かかる法則 ( $r$ ) に対して、再び評価の加法性の仮定を適用すれば、つぎの関係、

$$\begin{aligned} V(X^0, X_i^{1*}; r, p) &= V(X^0, X^i; r^*, p^i) \\ &\quad + V(X^i, X_i^{1*}; r_i^*, p_i^*) \end{aligned}$$

(3.23)

が成立する。ただし、 $r$  は、 $X^0$  から  $X^i$  までは  $r^*$ 、 $X^i$  から  $X_i^{1*}$  までは  $r_i^*$  を用いる法則を表わし、また、 $p = p^i \cup p_i^*$  を表わすものとする。

かかる法則  $r$  が、許容される法則であることは、すでに仮定した「法則 (制御) の連結可能性」<sup>63)</sup>によって、明らかである。

それゆえ、許容される2つの法則 ( $r$  および  $r^*$ ) に関して、つぎの不等式

62) II章, 第1節, 参照。

63) II章, 第1節, および第3節, 参照。

$$V(X^0, X_i^{1*}; r, p) < V(X^0, X^{1*}; r^*, p^*) \quad (3.24)$$

が成立することになり、その結果、 $r^*$  が最適な法則であるとした最初の仮定<sup>64)</sup>と矛盾する。したがって、(3.20) の等式が成立することが、証明された。<sup>65)</sup>

さらに、限界面の性質を、敷衍して述べることにしよう。すでに、われわれは、定数パラメータである  $C$  の値を変化させれば、それに応じて、(3.14) より、 $\varepsilon^* \triangleq E^* \times \{x_0\}$  内に異なった限界面の 1 径数族が形成されることを指摘した。そこで、これらの限界面相互の関係を明らかにするため、いま、2 つの相異なった  $C$  の値 (これを  $C_1, C_2$  とする) に対応する 2 つの限界面 (これを  $\Sigma_{c1}, \Sigma_{c2}$  とする) をとりあげよう。それらは、すでに与えた限界面の定義式 (3.16) によって、つぎのように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{c1} : x_{01} = C_1 - V^*(X; \theta^1) \\ \Sigma_{c2} : x_{02} = C_2 - V^*(X; \theta^1) \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{c1} : x_{01} = C_1 - V^*(X; \theta^1) \\ \Sigma_{c2} : x_{02} = C_2 - V^*(X; \theta^1) \end{array} \right. \quad (3.26)$$

ただし、ここでは、両者の比較のため、同じ状態  $X$  を最適径路が存在する状態空間 ( $E^*$ ) 内にとり、その状態  $X$  に対する各限界面 ( $\Sigma_{c1}$  および  $\Sigma_{c2}$ ) 上の  $x_0$  の値を、 $x_{01}$  および  $x_{02}$  で与えている。そのとき、(3.25) と (3.26) より容易にわかるように、 $E^*$  に属する任意の状態  $X$  について、

$$x_{01} - x_{02} = C_1 - C_2 \quad (3.27)$$

なる関係式が成立する。このことは、 $C$  の値を変化させれば、それに対応する限界面は、 $x_0$  軸上に沿って平行移動し、これらの各限界面は、決して交わらないことを意味している。<sup>66)</sup> これらの限界面族の 1 部を図解したのが、つぎの図 18 である。

限界面についてのこの性質と、さきの〔補助定理 1〕とから、つぎの結果が

64) 本章、第 2 節、(3.21)、参照。

65) このことは、「与えられた最終状態の集合への最適径路の任意の部分には、それ自体、同じ集合への最適径路になっている」という、いわゆるベルマンの最適性の原理を意味する。ベルマン、前掲書、参照。

66)  $C_1, C_2$  の与え方は、全く任意であるから、(3.27) の関係を、限界面族  $\{\Sigma\}$  全体に言及せしめ得る。

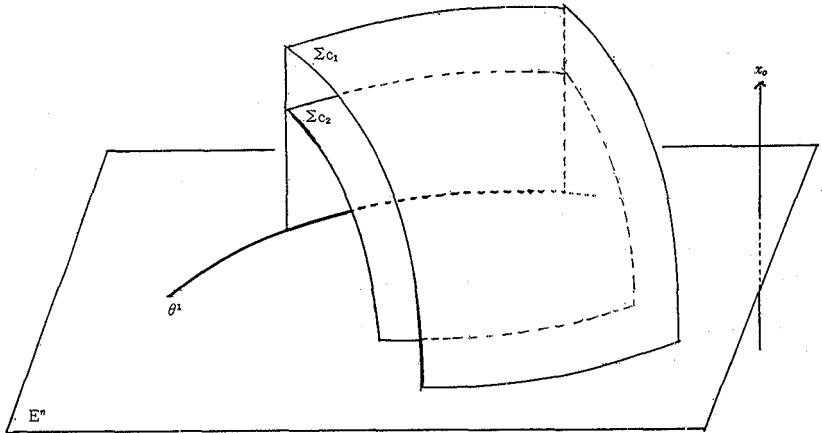


図18. 限 界 面 族  $\{\Sigma\}$

得られる。

〔補助定理 2〕

ある限界面  $\Sigma$  上に 1 点をもつ最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  は、完全に同一の限界面  $\Sigma$  上に乗っている。すなわち、限界面  $\Sigma$  は、すべての最適トラジェクトリーの軌跡である。

つぎに、新しい記号を導入しよう。いま、1つの限界面  $\Sigma$  が与えられると、この限界面によって、拡張された状態空間の部分集合  $\mathcal{E}^* \triangleq E^n \times \{x_0\}$  は、2つの互いに素な領域<sup>67)</sup> に分離されることが可能である。そこで、これらの領域を、それぞれ、 $A/\Sigma$  (“above”  $\Sigma$ ) および  $B/\Sigma$  (“below”  $\Sigma$ ) とよぶことにする。そのとき、定数パラメター  $C$  に対応する限界面  $\Sigma$  に対して、 $A/\Sigma$  および  $B/\Sigma$  は、それぞれ、つぎのように定義される。

$$A/\Sigma \triangleq \{X : x_0 > C - V^*(X; \theta^1)\} \tag{3.28}$$

$$B/\Sigma \triangleq \{X : x_0 < C - V^*(X; \theta^1)\} \tag{3.29}$$

さらに、いま、ある状態点  $X$  が、 $A/\Sigma$  の領域にあれば、<sup>68)</sup> その状態点  $X$

67) 共通点をもたない領域を、互いに素な領域であると定義する。

68)  $X \in A/\Sigma$  を意味する。

を限界面  $\Sigma$  に関して  $A$  点であるとよび、 $B/\Sigma$  の領域にあれば、<sup>69)</sup> その状態点  $X$  を限界面  $\Sigma$  に関して  $B$  点であるとよぶことにする。図19は、これを図示している。

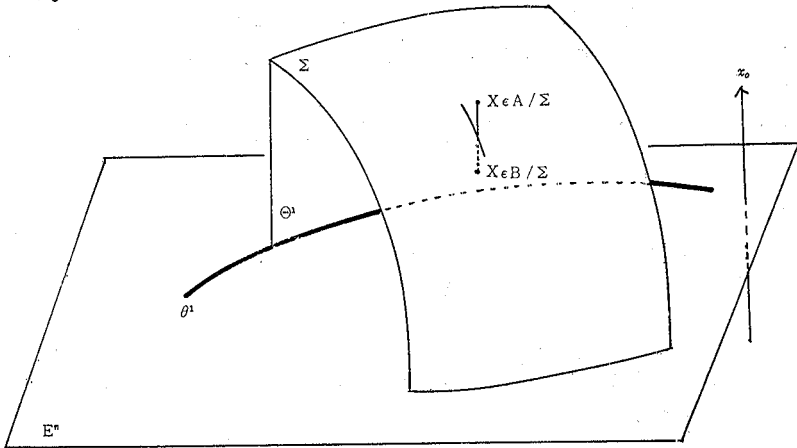


図19. 限界面  $\Sigma$  に関する  $A$  点と  $B$  点

つぎに、ある  $C$  の値に対応する限界面  $\Sigma$  と、その面上の点  $X \in \Sigma$  に注目しよう。その点  $X$  の  $E^n$  への射影を  $X$  とし、点  $X$  から出て、最終状態の集合  $\Theta^1 \triangleq \theta^1 \times \{x_0\}$  内の点  $X^1$  に達する最適でないトラジェクトリーを  $\Gamma$  とし、その  $\Gamma$  に対応する  $C$  の値が  $C'$  であると考えよう。そのとき、限界面および最適でないトラジェクトリーは、それぞれ、次式によって示される。

$$x_0 + V^*(X; \theta^1) = C \tag{3.30}$$

$$x_0 + V(X, X^1; r, p) = C' \tag{3.31}$$

ただし、 $r$  は、径路  $p$  (すなわち、 $\Gamma$  の  $E^n$  への射影) を生ずる最適でない法則を表わすものとする。

(3.31) より (3.30) を差し引けば、次式を得る。

$$V(X, X^1; r, p) - V^*(X; \theta^1) = C' - C \tag{3.32}$$

69)  $X \in B/\Sigma$  を意味する。

また、法則  $r$  が最適でないことから、上式左辺は正となり、したがって、

$$C' - C > 0 \quad (3.33)$$

となる。すなわち、ある限界面から出て、集合  $\theta^1$  に達する最適でないトラジェクトリー  $\Gamma$  は、 $\theta^1$  において、その限界面  $\Sigma$  に関して  $A$  点で交わることになる。

ここで得た結果と、さきの〔補助定理2〕とをまとめれば、つぎの結論が導かれる。

〔補助定理3〕

与えられた限界面  $\Sigma$  上の点から出て、 $\theta^1$  へその限界面  $\Sigma$  に関して  $B$  点に到達するトラジェクトリーは、存在しない。

〔補助定理3〕の内容は、最終到達点のみを問題としており、それに至る途中の過程については、なんら言及していない。したがって、つぎに、この点を検討することにしよう。

その準備として、いま、 $C_1$  に対応する限界面  $\Sigma_{c_1}$  に注目し、この限界面上の点  $X$  から出る最適でないトラジェクトリー  $\Gamma$  を考えよう。さらに、また、このトラジェクトリー上の点、たとえば  $X'$  が、さきの限界面  $\Sigma_{c_1}$  に関して  $B$  点であったとして、この点  $X'$  を通る限界面を  $\Sigma_{c_2}$  と仮定する。そのとき、この限界面  $\Sigma_{c_2}$  に対応する  $C$  の値を  $C_2$  とすれば、すでに明らかにしたとおり、<sup>70)</sup> つぎの不等式、

$$C_1 > C_2 \quad (3.34)$$

が成立する。すなわち、 $\theta^1$  に達する最終状態の点 ( $C_2, X^1$ ) は、限界面  $\Sigma_{c_1}$  に関して  $B$  点であることがわかる。そこで、図20に示すような、 $X$  から  $X'$  までは、最適でないトラジェクトリー  $\Gamma$  の部分をたどり、さらに、 $X'$  から  $\theta^1$  までは、最適なトラジェクトリー  $\Gamma^*$  (すなわち、限界面  $\Sigma_{c_2}$  上)<sup>71)</sup> をたどる1つのトラジェクトリーを考えてみよう。

70) 本章、第2節、(3.27)、参照。

71) 〔補助定理2〕による。

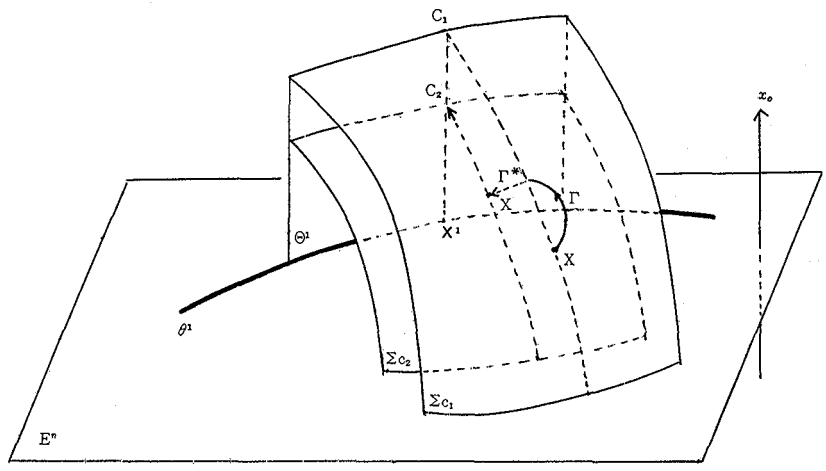


図20. XよりX'を径て(C2, X')へ至るトラジェクトリー

この場合、〔補助定理2〕によって、 $X'$ から出る最適トラジェクトリー $\Gamma^*$ は、その限界面 $\Sigma_{c2}$ 上に完全に乗っていることがわかり、したがって、 $\theta^1$ とは、 $C_1$ に対応する限界面 $\Sigma_{c1}$ に関して $B$ 点で交わることになる。他方、〔補助定理3〕によって、 $C_1$ に対応する限界面 $\Sigma_{c1}$ 上の点（すなわち、 $X$ ）から出て、その限界面 $\Sigma_{c1}$ に関して $B$ 点で $\theta^1$ と交わるトラジェクトリーは、存在しないことがすでに明らかにされている。

したがって、この両者の性質を合わせ考えるならば、ある限界面 $\Sigma_{c1}$ 上の点から出るトラジェクトリーは、（それが最適であっても、最適でなくても）、その限界面 $\Sigma_{c1}$ に関して決して $B$ 点を持ち得ないことが判明する。この限界面に関する重要な結論を、つぎの〔定理1〕としてまとめておこう。

〔定理1〕

ある与えられた限界面 $\Sigma$ 上に初期点をもつトラジェクトリーは、（それが最適であっても、最適でなくても）その限界面 $\Sigma$ に関する $B$ 点を持ち得ない。

この定理は、限界面 $\Sigma$ の限界的な性質を端的に示している。なぜなら、ある1つの限界面は、その限界面から出るすべてのトラジェクトリーを含む領域

の境界を画しているからである。

さて、つぎに、この限界面上の正則な内点に注目し、その内点における1つの重要な性質を明らかにしておこう。

まず、最初に、正則点の定義を、つぎのように与えることにする。ある次元の面上の点  $X$  において、その面に対する接平面が定義されるとき、点  $X$  をその面の正則な点であると定義する。すなわち、点  $X$  のある近傍の面上のすべての点  $X'$  が、

$$X' = X + \varepsilon \eta + O(\varepsilon) \tag{3.35}$$

と表わされるとき、 $X$  は正則な点である。

ただし、 $\eta$  は、 $X$  における接平面内のベクトルであり、 $O(\varepsilon)$  は、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|O(\varepsilon)\|}{\varepsilon} = 0$$

をみたすものとする。<sup>72)</sup>

この関係を図示したものが、図21、および図22である。

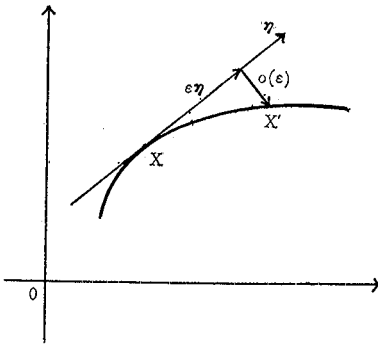


図21. 正則な点  $X$

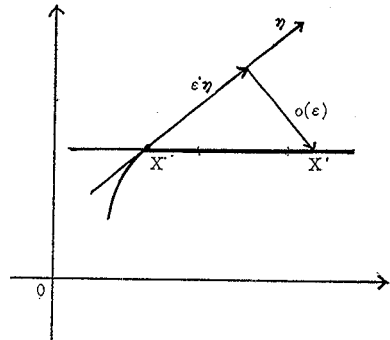


図22. 正則でない点  $X$

72)  $\|O(\varepsilon)\|$  は、ベクトル  $O(\varepsilon)$  のノルム (距離) を表わす。



図21に示される点  $X$  では、接平面が定義され、したがって、その点  $X$  が正則であることがわかる。しかし、図22の点  $X$  では、その近傍の面上の点  $X'$  が、たとえ (3.35) で表わされたとしても、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|O(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \neq 0$  となり、接平面は定義できない。したがって、点  $X$  を正則点とよぶことはできなくなる。

つぎに、内点の定義を与えておこう。いま、 $|\varepsilon|$  を十分小さくとしたとき、接平面内の各点  $X + \varepsilon \eta$  に対して、もとの面上に1点  $X'$  が対応するとき、点  $X$  を、その面の正則な内点であると定義する。すなわち、点  $X$  の近傍において、もとの面上の点と、 $X$  における接平面内の点との間に、1対1の対応が存在する場合は、これにあたる。

したがって、正則な内点とは、点  $X$  がその面の正則点であり、かつその面の内点であることを意味する。

さて、ここで定義された概念をタイプ1の問題に即して考えることにしよう。タイプ1の問題のある限界面  $\Sigma \subset E^{n+1}$  において、領域  $B/\Sigma$  に向かう  $\Sigma$  上の点  $X$  における単位法線ベクトルを  $n(X)$  としよう。この単位法線ベクトル<sup>73)</sup>が  $B/\Sigma$  に向かうということは、ある正の数  $\alpha$  が存在して、すべての  $\varepsilon$  (ただし、 $0 < \varepsilon < \alpha$ ) に対して、点  $X + \varepsilon n(X)$  が、 $B/\Sigma$  に含まれることを意味している。そこで、このベクトル  $n(X)$  の  $x_0$  軸方向の成分を  $n_0(X)$  とすれば

$$n_0(X) \leq 0 \tag{3.36}$$

となる。この関係を示したのが、図23である。

ある限界面  $\Sigma$  上の点  $X$  が、正則な内点であると仮定すれば、その点  $X$  について、つぎの重要な関係が成立するので、その結果を、[補助定理4]として、示すことにしよう。

[補助定理4]

時刻  $t'$  において、タイプ1の問題のある1つの限界面  $\Sigma$  上の任意の正則な内点  $X'$  において、つぎの関係が成立する。すなわち、 $U$  に属するすべての制御  $u$  について、

$$n(X') \cdot f(X', u) \leq 0 \tag{3.37}$$

73)  $\|n(X)\| = 1$  をみたすベクトルである。

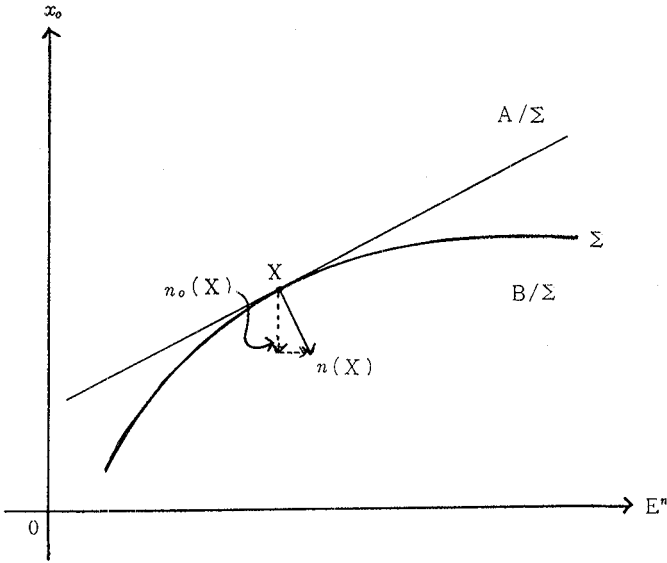


図23. 限界面  $\Sigma$  上の点  $X$  における単位放線ベクトル  $n(X)$

となる。<sup>74)</sup>

ただし、

$n(X')$  は、点  $X'$  における限界面  $\Sigma$  の、 $B/\Sigma$  に向かう単位放線ベクトルで、

$f(X', u)$  は、 $(f_0(X', u), f_1(X', u), \dots, f_n(X', u))$  を、

$X'$  は、 $(x_0', X')$  を、それぞれ表わすものとする。<sup>75)</sup>

さて、つぎに、この〔補助定理4〕の内容に検討を加えることにしよう。いま、2つの  $n$  次元ベクトルを想定し、その各々を  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 、および  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  で表わすことにする。そのとき、両ベクトルの内積は、

74) (3.37) は、単位放線ベクトル  $n(X')$  と  $f(X', u)$  との内積が、非正 (Non-positive) であることを表わす。

75) 本章、第1節で示したタイプ1の問題の定式化、参照。とくに、 $f_j(X, u) = f_j(X, u)$ 、 $(j=0, 1, \dots, n)$  であることに注意せよ。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \tag{3.38}$$

として定義される。また、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  両ベクトルの成す角度を  $\theta$  とすれば、この内積について、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\theta \tag{3.39}$$

なる関係式が成立する<sup>76)</sup>ので、(3.38) の値によって、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  両ベクトルの成す角度  $\theta$  が求められる。つぎの図24は、内積の符号の差異にもとづき、ベクトルの位置関係を例示したものである。

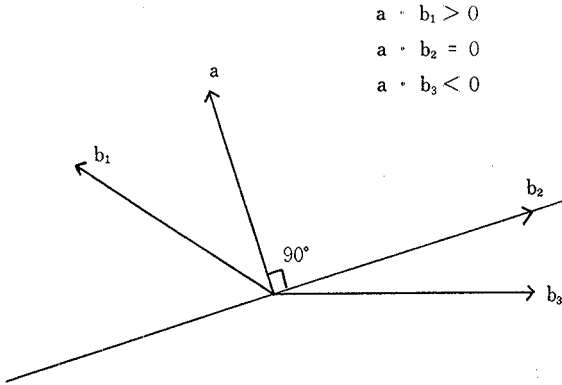


図24. ベクトルの内積とその位置づけ

この関係を、さきの (3.37) に即して考えれば、つぎの結論を得る。すなわち、時刻  $t'$  に点  $X'$  から出発して、許容制御  $\mathbf{u}(t)$ 、(ただし、 $t \geq t'$ )<sup>77)</sup> によって形成されるトラジェクトリー<sup>77)</sup>の方向  $\mathbf{f}(X', \mathbf{u})$  は、点  $X'$  において領域  $B/\Sigma$  に向かう単位放線ベクトル  $\mathbf{n}(X')$  から、少なくとも  $90^\circ$  以上開いている。言い換えるならば、点  $X'$  が、仮定により限界面  $\Sigma$  上の正則な内点であることが

76)  $\|\mathbf{a}\|$ 、 $\|\mathbf{b}\|$  は、ベクトル  $\mathbf{a}$ 、および  $\mathbf{b}$  のノルム(すなわち、長さ)を表わしている。

77) II章、第3節、参照。

ら、その点  $X'$  で接平面が定義され、図25に示すように、 $f(X', u)$  の方向を示すベクトルが、この接平面の少なくとも上側にあることを意味する。

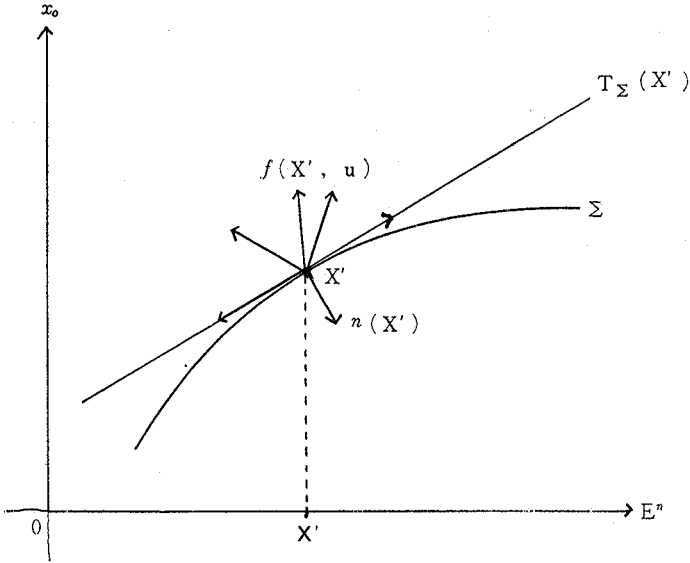


図25. トラジェクトリーを示すベクトル  $f(X', u)$  と単位放線ベクトル  $n(X')$  との関係

ただし、 $T_Σ(X')$  は、点  $X'$  を通る限界面  $Σ$  の接平面を表すものとする。

そこで、この〔補助定理4〕の証明は、つぎのようにしてなされる。<sup>78)</sup> いま、ある許容制御  $u' \in U$  について、(3.37) が成立しない、すなわち、つぎの不等式、

$$n(X') \cdot f(X', u') > 0, \quad u' \in U \tag{3.40}$$

が成立するものと仮定しよう。そのとき、つぎの諸点が明らかとなる。(図26, 参照)

- (i) 限界面  $Σ$  上の点  $X'$  について、 $n(X')$  と  $f(X', u')$  は、ともにその点

78) [A]3, pp.22-24, 参照。

$X'$  における限界面  $\Sigma$  の接平面  $T_{\Sigma}(X')$  によって作られる同一の開半空間内に存在する。

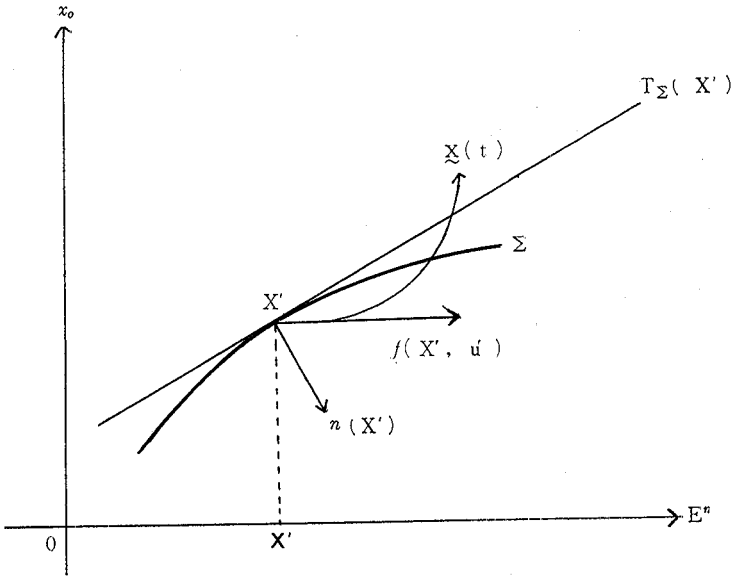


図26. 補助定理4の証明のための解曲線  $\tilde{X}(t)$

- (ii)  $X(t') = X'$  を初期値とする, 常微分方程式  $\dot{X} = f(X, u(t))$ , ただし,  $u(t) = u(t')$ ,  $t \geq t'$ , の解曲線を  $\tilde{X}(t)$  とすれば, その解曲線  $\tilde{X}(t)$  は, ベクトル  $f(X(t'), u(t')) = f(X', u')$  に対して点  $X'$  で接している。
- (iii) 限界面  $\Sigma$  と, その限界面  $\Sigma$  に対する接平面  $T_{\Sigma}(X')$  は, 点  $X'$  で接している。

以上の3点より, われわれは, 許容制御  $u'$  によって作られた解曲線  $\tilde{X}(t)$  の少なくとも1部が, その限界面  $\Sigma$  に関して  $B$  点 (すなわち, 領域  $B/\Sigma$  に属する点) をもつことを知る。しかし, この帰結は, すでに与えた [定理1] と明らかに矛盾する。これは, (3.40) が成立するとした最初の仮定が誤りであることを意味し, その結果, [補助定理4] の証明が完了する。

最後に、この特別な場合として、最適制御  $u^*(t)$ ,  $(t_0 \leq t \leq t_1)$  によって作られる最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の点  $X^t = X^*(t')$  を考えてみよう。このとき、われわれは、[補助定理2]によって、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  が限界面  $\Sigma$  上に完全に乗っていることを知っている。さらに、[補助定理4]に関して述べた以上の議論により、点  $X^*(t')$  が限界面  $\Sigma$  の正則な内点であるかぎり、すべての  $t'$ ,  $(t_0 \leq t' \leq t_1)$  に対して、

$$n(X^*(t')) \cdot f(X^*(t'), u^*(t')) = 0 \tag{3.41}$$

が成立することがわかる。

これをまとめれば、つぎの[定理2]を得る。

[定理2]

いま、 $X^*(t)$  が最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の1点で、かつその点を通る限界面  $\Sigma$  の正則な内点であり、さらに  $u^*(t)$  が、それに対応する最適制御であれば、つぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} n(X^*(t)) \cdot f(X^*(t), u^*(t)) &= \text{Max}_{u \in U} n(X^*(t)) \cdot f(X^*(t), u) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.42}$$

### §3. 変分方程式と随伴方程式

前節において、われわれは、限界面の定義とその性質について、詳細な検討を加え、その結果を定理の形でまとめあげた。なぜなら、限界面は、すべての最適トラジェクトリーの軌跡であるという性質とともに、システム一般の動的過程を議論するうえで、極めて重要であると考えたからである。しかしながら、これらの定理は、実際上の問題を解くうえでは、未だ使用に耐えるものではない。なぜなら、限界面自体を求めることは、最適トラジェクトリーを求めることよりも一層厄介であり、また、それに代わるものとして、法線ベクトルを求めようとしても、その求め方を、われわれは、未だ知らないからである。そこで、つぎに、限界面を知らずに、法線ベクトルを求める具体的な方法を考えることにしよう。本節では、その準備として、法線ベクトルの動きと密接な関係をもつ、線形微分方程式の諸性質をまず明らかにし、ついで、それに対応する

変分方程式と随伴方程式について、検討を加えることにする。

〔線形微分方程式〕

状態方程式  $\dot{x}_i = g_i(X, t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n^{79)}$  に対する 1 つの特殊な場合として、以下の議論で重要な役割を果たす、つぎの線形同次の微分方程式系について、その性質を考えよう。

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_j^i(t) x_j, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.43)$$

ただし、 $a_j^i(t)$  は、ある適当な区間  $a \leq t \leq b$  で連続であるものとする。

この同次方程式 (3.43) をベクトル記法によって表わせれば、つぎのようになる。

$$\dot{X} = A(t)X \quad (3.44)$$

ただし、 $A(t) = [a_j^i(t)]$ 、すなわち、 $n$  行  $n$  列の係数行列を表わし、 $X$  は  $n$  次の列ベクトルを表わすものとする。

また、初期条件は、区間  $a < t_0 < b$  に対して、

$$X(t_0) = X^0 \quad (3.45)$$

として与えられるものとする。

このようなシステムに対して、「解の存在と一意性の定理」は、著しく強いものとなる。<sup>80)</sup> したがって、(3.44) で示される線形の微分方程式に対応する「解の存在と一意性の定理」は、つぎのようにまとめられる。

(性質 1)

関数  $a_j^i(t)$ , ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) がある区間  $a \leq t \leq b$  で定義されており、かつ連続であれば、どのような  $X^0$  に対しても、区間  $a < t < b$  で考えれば

79) II 章, 第 3 節, (2.13), 参照。

80) 一般の微分方程式系に対する解の存在定理は、 $t$  のある区間で定義される解の存在を主張するのに対して、(3.44) で示される線形の微分方程式系については、その係数が定義される  $t$  の区間全体で、解の存在が主張できる。[A] 4, p.58 の定理 II.

1, および p.60 の定理 II.3, 系 II.4, 参照。

(3.44) の解であり、さらに、初期条件 (3.45) を満足する区間  $a \leq t \leq b$  全体で定義される連続関数  $\underline{X}(t)$  が存在する。この関数  $\underline{X}(t)$  は、( $X^0$  が与えられていれば) 一意に決定される。

さらに、方程式 (3.44) のもつ基本的な性質を述べれば、つぎのようになる。

(性質 2)

(3.44) の解  $\underline{X}(t)$  が、ある  $t_0$  (ただし、 $a < t_0 < b$ ) に対してゼロになれば、すなわち、 $\underline{X}(t_0) = 0$  ならば、この解は、恒等的にゼロに等しい。すなわち、 $\underline{X}(t) \equiv 0$  ( $a < t < b$ ) となる。

(性質 3)

ベクトル関数  $\underline{X}^1(t)$ ,  $\underline{X}^2(t)$ , ...,  $\underline{X}^r(t)$  が、(3.44) の解であれば、任意の定数  $C^1, C^2, \dots, C^r$  に対して、

$$\underline{X}(t) = C^1 \underline{X}^1(t) + C^2 \underline{X}^2(t) + \dots + C^r \underline{X}^r(t) \quad (3.46)$$

もまた、(3.44) の解である。

(性質 2) および (性質 3) は、容易に検証される。まず (性質 2) について、恒等的にゼロに等しいベクトル関数  $\underline{X}(t) = 0$  は、明らかに (3.44) をみたすから、この解と同じ初期条件  $\underline{X}(t_0) = 0$  をもつ解  $\underline{X}(t)$  とは、当然一致するはずである。また、(性質 3) については、 $r$  個のベクトル関数の一次結合である  $\underline{X}(t)$  が、(3.44) の成立をつねに保証することより、明らかである。<sup>81)</sup>

つぎに、同次方程式に対して、最も重要な解の基本系という概念を考察することにしよう。そのためには、解の体系に関する 1 次従属および 1 次独立の定義が必要となる。

いま、 $\underline{X}^1(t)$ ,  $\underline{X}^2(t)$ , ...,  $\underline{X}^r(t)$  を、(3.44) の解の体系とする。そのとき、同時にはゼロでない定数  $C^1, C^2, \dots, C^r$  が存在して、

$$C^1 \underline{X}^1(t) + C^2 \underline{X}^2(t) + \dots + C^r \underline{X}^r(t) \equiv 0 \quad (3.47)$$

81) ポントリャーギン (千葉克裕訳), 常微分方程式 (新版) 共立, (1963) p. 116, A) a) および b), 参照。



となる時、その解の体系は、1次従属であると定義する。また、そうでない場合には、(3.44)の解の体系を、1次独立であると定義する。

この定義に従えば、さらに、つぎの性質が明らかにされる。

(性質4)

(3.44)の解の体系  $\underline{X}^1(t), \underline{X}^2(t), \dots, \underline{X}^r(t)$  は、少なくとも1つの  $t=t_0$  に対して、ベクトル  $X^1(t_0), X^2(t_0), \dots, X^r(t_0)$  が1次従属であれば、すべての  $t$  に対して1次従属である。

これを言い換えれば、解の体系  $\underline{X}^1(t), \underline{X}^2(t), \dots, \underline{X}^r(t)$  が、ひとつの  $t=t_0$  に対して1次独立の場合には、 $t$  のいかなる値に対しても、その解の体系が1次従属にはなり得ないことを意味する。この性質は、つぎのようにして、明らかにされる。

ベクトル  $X^1(t_0), X^2(t_0), \dots, X^r(t_0)$  が1次従属、すなわち、すべてゼロではない定数  $C^1, C^2, \dots, C^r$  に対して、

$$C^1 X^1(t_0) + C^2 X^2(t_0) + \dots + C^r X^r(t_0) = 0 \tag{3.48}$$

が成立すると仮定しよう。そのとき、

$$\underline{X}(t) = C^1 \underline{X}^1(t) + C^2 \underline{X}^2(t) + \dots + C^r \underline{X}^r(t) \tag{3.49}$$

とおけば、(性質3)によって、このベクトル関数  $\underline{X}(t)$  は、方程式(3.44)の解であることがわかる。また、この関数  $\underline{X}(t)$  は、 $t=t_0$  のとき、(3.48)によってゼロとなるから、(性質2)により、恒等的にゼロに等しくなる。<sup>82)</sup> これで、(性質4)が検証されたわけである。

つぎに、解の基本系を定義しよう。方程式(3.44)の解の体系  $\underline{X}^1(t), \underline{X}^2(t), \dots, \underline{X}^n(t)$  (ただし、 $n$  は(3.44)の係数行列のランク(Rank)を表わす)が1次独立のとき、これらを解の基本系と定義する。この解の基本系については、つぎの性質がある。

(性質5)

(a) 方程式(3.44)に対して、解の基本系は、つねに存在する。

(b)  $\underline{X}^1(t), \underline{X}^2(t), \dots, \underline{X}^n(t)$  が、方程式(3.44)の解の基本系であれ

82) ポントリャーギン, 前掲書, pp.116-117, B), 参照。

ば、その任意の解  $\underline{X}(t)$  は、 $C^1, C^2, \dots, C^n$  を定数として、つぎの形に書き表わされる。

$$\underline{X}(t) = C^1 \underline{X}^1(t) + C^2 \underline{X}^2(t) + \dots + C^n \underline{X}^n(t) \quad (3.50)$$

(性質5) は、つぎのように検証される。<sup>83)</sup> いま、 $a_1, a_2, \dots, a_n$  を任意の1次独立な定数ベクトルであると仮定する。そのとき、 $t_0$  を  $t$  のある1つの値として、初期条件、

$$\underline{X}^i(t_0) = a_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.51)$$

をみたす解を  $\underline{X}^i(t)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) とする。ベクトル  $\underline{X}^1(t_0), \underline{X}^2(t_0), \dots, \underline{X}^n(t_0)$  は、仮定により、1次独立であるから、(性質4) によって解  $\underline{X}^i(t)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) も1次独立となり、したがって、それが解の基本系をつくることになる。

つぎに、その解  $\underline{X}^i(t)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) は、1次独立であるから、(性質4) によって、ベクトル  $\underline{X}^1(t_0), \underline{X}^2(t_0), \dots, \underline{X}^n(t_0)$  も1次独立となり、 $n$ 次元空間の基底となし得る。したがって、ベクトル  $\underline{X}(t_0)$  は、 $C^1, C^2, \dots, C^n$  を適当に選ぶことによって、つぎのように書き表わせる。

$$\underline{X}(t_0) = C^1 \underline{X}^1(t_0) + C^2 \underline{X}^2(t_0) + \dots + C^n \underline{X}^n(t_0) \quad (3.52)$$

そのとき、解  $\underline{X}(t)$  と  $C^1 \underline{X}^1(t) + C^2 \underline{X}^2(t) + \dots + C^n \underline{X}^n(t)$  とは、いずれも同じ初期条件をみたしているから、一致し、(3.50) の等式関係が成立する。

さて、上述の結果をベクトルの成分ごとにより書き表わしてみよう。いま、初期条件を、

$$\underline{X}^i(t_0) = e_i \quad (3.53)$$

として与えた場合<sup>84)</sup>に求まる (3.44) の解を  $\underline{X}^i(t)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) とする<sup>85)</sup>と

83) ポントリヤギン, 前掲書, pp.117-118, C], 参照。

84) ただし、 $e_i$  は、第  $i$  番目の要素のみが1であり、その他の要素がすべてゼロである  $n$ 次元の列ベクトルを表わすものとする。したがって、これは、(3.45) の特別な場合に対応する。

85) したがって、 $\underline{X}^i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$  は、すべての  $t$  の値について、互いに直交している関係にある。

き、

$$T(t, t_0) = [X^1(t), X^2(t), \dots, X^n(t)]$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^1(t), X_1^2(t), \dots, X_1^n(t) \\ X_2^1(t), X_2^2(t), \dots, X_2^n(t) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ X_n^1(t), X_n^2(t), \dots, X_n^n(t) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

は、方程式 (3.44) の遷移行列 (Transition matrix) とよばれる。<sup>86)</sup>

この遷移行列の性質として、まず、

$$T(t_0, t_0) = I_n \quad (3.55)$$

の関係が成立することが容易に確かめられる。<sup>87)</sup>

さらに、(性質 5) によって、初期条件 (3.45) に対する方程式 (3.44) の解は、

$$X(t) = T(t, t_0) X^0 \quad (3.56)$$

として表わされる。また、(性質 4) によって、解の基本系については、区間  $a < t < b$  をみたとすすべての  $t$  に対して、遷移行列の行列式は、ゼロにならない、すなわち、

$$|T(t, t_0)| \neq 0, \quad a < t < b \quad (3.57)$$

が成立することが判明する。

[変分方程式]

つぎに、接平面の変換にとって重要な意味をもつ、変分方程式の概念を説明しよう。そこで、もとの方程式、

$$\dot{x}_i = g_i(X, t), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.58)$$

86) ただし、 $X^i(t) = (X_1^i(t), X_2^i(t), \dots, X_n^i(t))'$  を表わすものとする。

87)  $I_n$  は、 $n$  次元の単位行列を表わす。

について、再び考察してみよう。いま、(3.58) について、つぎのことを仮定する。すなわち、その右辺  $g_i$  とその偏導関数  $\partial g_i / \partial x_j (i, j=1, 2, \dots, n)$  が、 $(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  一空間内のある開集合  $D$  で定義され、変数  $(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  のすべてについて連続であるとする。さらに、初期条件、

$$X(t_0) = X^0 \quad (3.59)$$

をみたし、区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  を含むある領域で定義された (3.58) の解を、 $X(t, X^0)$  で表わすことにする。<sup>88)</sup>

いま、 $Y^0 = (Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_n^0)$  を、 $(Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_n^0, t) \in D$  であると仮定し、初期条件、

$$Y(t_0) = Y^0 \quad (3.60)$$

をみたす (3.58) の解を、 $Y(t, Y^0)$  で表わそう。<sup>89)</sup> そのとき、つぎの性質が明らかにされる。<sup>90)</sup>

(性質6)

$B$  を  $X^0$  の十分小さい近傍とすれば、 $Y^0 \in B$  を初期条件とする (3.58) の解  $Y(t, Y^0)$  は、区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  で定義され、変数  $(y_1, y_2, \dots, y_n, t)$  のすべてに関して連続であり、さらに変数  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  に関する連続な偏導関数をもつ。

この厳密な証明は、ポントリャーギンによって与えられている<sup>91)</sup>ので、ここでは割愛し、それに代わって、この(性質6)と密接な関連をもつ、つぎの(性質7)を指摘するにとどめよう。<sup>92)</sup>

(性質7)

$X(t, X^0)$  は、初期条件 (3.59) をみたし、区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  を含むある

88)  $X(t, X^0)$  は、時刻  $t=t_0$  のとき、 $X(t_0)=X^0$  をみたす解曲線  $\tilde{X}(t)$  にあたる。

89)  $Y(t, Y^0)$  は、 $X(t, X^0)$  の場合と同様に、時刻  $t=t_0$  のとき、点  $Y(t_0)=Y^0$  を通過する解曲線  $\tilde{Y}(t)$  である。

90) [A]4, p.64の定理II.5に対応する。

91) ポントリャーギン, 前掲書, pp.175-185. とくに定理16および定理17, 参照。

92) [A]4, p.66の系II.6に対応する。

領域で定義された (3.58) の解とする。さらに、 $Y(t, Y^0)$  は、つぎの初期条件、

$$Y^0(\varepsilon) = X^0 + \varepsilon \eta^0 + O(\varepsilon) \quad (3.61)$$

をもつ、同じ (3.58) の解とする。

ただし、 $\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \dots, \eta_n^0)$  は、あるベクトルを表わし、 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|O(\varepsilon)\|}{\varepsilon} = 0$  を仮定する。

このとき、解  $Y(t, Y^0(\varepsilon))$  は、十分小さな  $\varepsilon$  に対して、区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  で定義され、

$$Y(t, Y^0(\varepsilon)) = X(t, X^0) + \varepsilon \eta(t) + O(\varepsilon) \quad (3.62)$$

となる。ここに、 $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t))$  は、つぎの線形微分方程式、

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i(X(t, X^0), t)}{\partial x_j} \eta_j, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.63)$$

の初期条件  $\eta(t_0) = \eta^0$  をみたす解である。

いうまでもなく (3.62) 右辺の  $O(\varepsilon)$  は、時刻  $t$  に依存する。したがって、より厳密には、 $O_i(\varepsilon)$  と書くべきであろう。しかし、すでに仮定したとおり<sup>93)</sup> これは  $t$  に関して一様に  $\varepsilon$  よりも高次の無限小である。すなわち、

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|O_i(\varepsilon)\|}{\varepsilon} = 0$  となる。それゆえ、たとえ異なった量であったとしても、それが  $\varepsilon$  よりも高次の無限小であるかぎり、同じ記号  $O(\varepsilon)$  を用いて差しつかえないであろう。

さて、われわれは、(性質7)における (3.63) を、(3.58) の変分方程式 (Variational equations) とよぶことにする。<sup>94)</sup> 以上の議論を、簡単化のため、 $n=2$  の場合について図解すれば、つぎのようになる。

93) 本章、第2節の図21、参照。

94) [A]8, pp.84-87, 参照。

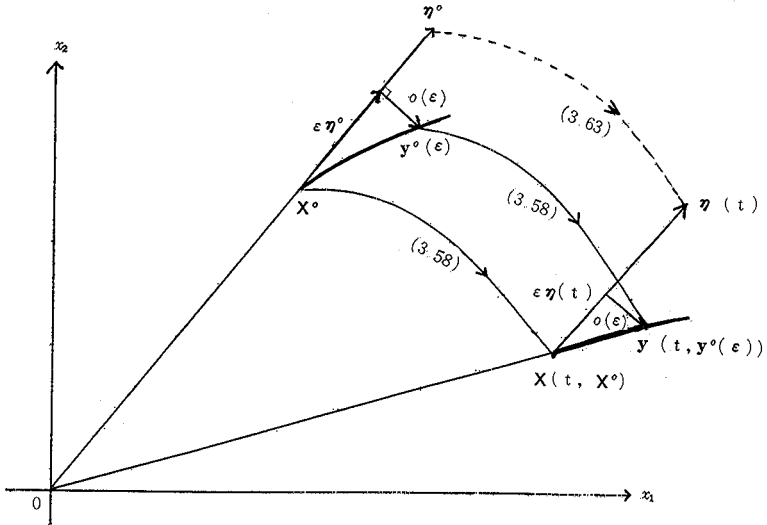


図27. 変分方程式によるベクトルの変換

すなわち、まず、 $X^0$  を初期条件としてもつ、微分方程式 (3.58) の解曲線は、「解の存在と一意性の定理」によって、ある  $t$  の区間、 $t_0 \leq t \leq t_1$  で、 $X(t, X^0)$  として与えられる。つぎに、 $X^0$  の近傍の点を  $Y^0$  とし、この  $Y^0$  を初期条件とする、同じ微分方程式 (3.58) の解曲線も、(性質6) によって、 $t$  の区間、 $t_0 \leq t \leq t_1$  で、 $Y(t, Y^0)$  として与えられることになる。そこで、いま、 $X^0$  の近傍の点  $Y^0$  が、(3.61) として表わされるものと仮定しよう。たとえば、 $X^0, Y^0$  が同じ境界面  $\Sigma$  上にあり、また、 $X^0$  を通るその境界面の接平面  $T_\Sigma(X^0)$  内のベクトルを  $\eta^0$  とすれば、 $Y^0$  は、そのベクトル  $\eta^0$  を用いて、 $Y^0 = X^0 + \epsilon \eta^0 + O(\epsilon)$  として表わされる。<sup>95)</sup> そのとき、(性質7) は、変分方程式 (3.63) にもとづくベクトルの変換 ( $\eta^0 \rightarrow \eta(t)$ ) によって、 $Y^0(\epsilon)$  を初期条件とする解  $Y(t, Y^0(\epsilon))$  が、 $X^0$  を初期条件とする解  $X(t, X^0)$  と変換されたベクトル  $\eta(t)$  と  $O(\epsilon)$  の合成によって表わされる、すなわち、(3.62) が成立することを教えている。

95) ただし、 $X^0$  は、正則な内点であるものとする。本章、第2節、参照。

最後に、変分方程式の線形性に注目しておこう。いま、(3.63)の右辺の係数を、つぎのように置き換えてみよう。

$$\frac{\partial g_i(X(t), X^0, t)}{\partial x_j} = a_j^i(t) \tag{3.64}$$

そのとき、(3.63)は、

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n a_j^i(t) \eta_j, \quad i=1, 2, \dots, n \tag{3.65}$$

となり、さらに、これをベクトル記法で表わせば、つぎのようになる。

$$\dot{\eta} = A(t)\eta \tag{3.66}$$

ただし、 $A(t) = [a_j^i(t)]$ を表わすものとする。<sup>96)</sup>

[随伴方程式]

さて、ここで、限界面に対する放線ベクトルの変換にとって重要な意味をもつ、随伴方程式に注目しよう。そのために、まず、(3.65)で示される線形同次の微分方程式について考えることにする。ただし、その係数 $a_j^i(t)$ は、区間 $t_0 \leqq t \leqq t_1$ に対して定義され、かつ連続であるものと仮定する。

そのとき、(3.65)の係数行列、すなわち、(3.66)の $A(t)$ を、転置し、さらに符号を変えて得られる行列を係数行列にもつ、線形同次の微分方程式を構成することができる。この微分方程式の未知関数を、(3.65)の $\eta$ と区別するため、 $\lambda$ で表わすことにすれば、これは、次式で示される。

$$\dot{\lambda} = -A'(t)\lambda \tag{3.67}$$

ただし、 $A'(t) = [a_i^j(t)]$ を表わすものとする。

さらに、これを、分解表示すれば、

96) 本章、第3節、(3.43)、(3.44)、参照。なお、状態方程式に対する変分方程式は、その状態方程式を、テイラー (Taylor) 展開して、その1次近似を与えるものと解釈される。

$$\dot{\lambda}_i = - \sum_{j=1}^n a_j^i(t) \lambda_j, \quad i=1,2,\dots, n \tag{3.68}$$

となる。

このようにして得られた (3.67), あるいは (3.68) を, (3.66), あるいは (3.65) の 随伴方程式 (Adjoint equations) とよぶことにする。

この随伴方程式とさきの変分方程式との解相互には, つぎの (性質 8) として述べられる重要な関係がある。<sup>97)</sup>

(性質 8)

$\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t))$  を変分方程式 (3.66) の任意の解とし,  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$  をその 随伴方程式 (3.67) の任意の解とする。<sup>98)</sup> このとき, 解ベクトルの内積,

$$\eta(t) \cdot \lambda(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \lambda_i(t) \tag{3.69}$$

は, ( $t$  に依存しない) 一定値である。

この関係は, つぎのようにして検証される。すなわち,  $\eta(t)$  と  $\lambda(t)$  は, ともに連続であるから, その内積  $\eta(t) \cdot \lambda(t)$  もまた連続であり, さらに  $t_0 < t < t_1$  のとき, この内積は連続な導関数をもつ。したがって,  $t_0 < t < t_1$  の区間で, この内積の導関数がゼロとなることを示せばよい。すなわち, これを求めれば,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\eta(t) \cdot \lambda(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n \eta_{\alpha}(t) \lambda_{\alpha}(t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \dot{\eta}_{\alpha}(t) \lambda_{\alpha}(t) + \sum_{\alpha=1}^n \eta_{\alpha}(t) \dot{\lambda}_{\alpha}(t) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^{\alpha}(t) \eta_j(t) \lambda_{\alpha}(t) \end{aligned}$$

97) [A] 4, p.69の定理II. 8に対応する。

98) ただし, 解  $\eta(t)$  と  $\lambda(t)$  は, ともに区間  $t_0 \leq t \leq t_1$  全体で定義されるものとする。



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{\alpha}(t) (-a_{\alpha}{}^j(t) \lambda_j(t)) \\
 & = 0 \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

となる。<sup>99)</sup>

§4. 最大原理の導出

以上の検討結果にもとづき、本節ではタイプ1の問題に対する最大原理の導出とその証明を試みることにしよう。

まず最初に、タイプ1の問題に対する最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  が存在するものと仮定しよう。そのとき、われわれは、限界面  $\Sigma$  の性質に関する〔補助定理2〕により、その最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  が、 $C$  を定数パラメータとして規定される、ある1つの限界面  $\Sigma_c$  上に完全に乗っていることを知っている。<sup>100)</sup> つぎに、その最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の点  $X^*(t)$ 、( $t_0 \leqq t \leqq t_1$ ) が、限界面  $\Sigma_c$  上の正則な内点である<sup>101)</sup> と仮定すれば、その点  $X^*(t)$  で接平面  $T_{\Sigma_c}(X^*(t))$  が定義可能となり、その点  $X^*(t)$  の近傍  $\Delta(X^*(t))$  も、また限界面  $\Sigma_c$  上に乗っていることがわかる。図28は、この関係を示している。

さらに、この点  $X^*(t)$  における限界面  $\Sigma_c$  の、 $B/\Sigma_c$  の領域<sup>102)</sup> に向かう単位放線ベクトルを  $n(X^*(t))$  で表わし、最適制御  $u^*(t)$  によって形成されるトラジェクトリー  $\Gamma^*$  の方向を  $f(X^*(t), u^*(t))$  で表わすならば、〔定理2〕により、つぎの関係式

$$\begin{aligned}
 n(X^*(t)) \cdot f(X^*(t), u^*(t)) & = \text{Max}_{u \in U} n(X^*(t)) \cdot f(X^*(t), u) \\
 & = 0 \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

99) この(性質8)は、係数  $a_{ij}(t)$  が  $t$  の連続関数ではなく、区分的に連続な関数である場合にも成立する。その結果、われわれが考察の対象とする制御問題(たとえば、状態方程式が(2.28)で与えられている場合)にとっても適用可能となる。〔A〕4, p.70の系II.9, 参照。

100) 本章, 第2節, 参照。

101) 本章, 第2節で与えた「正則な内点」の定義, 参照。

102) 本章, 第2節, (3.29), 参照。

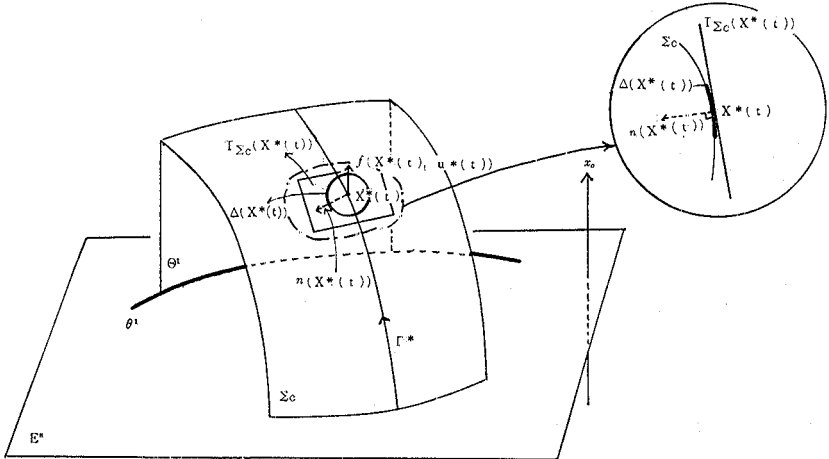


図28. 限界面 (Σ<sub>c</sub>) の正則な内点

が成立することがわかる。<sup>103)</sup>

そこで、いま  $t=t_0$  におけるもとの点  $X^*(t_0)$  およびその近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  内の点  $X(t_0)$  については、これらと同じ最適制御  $u^*(t)$  で動かすことを考え、さらにもとの点  $X^*(t_0)$  の限界面  $\Sigma_c$  に対する接平面  $T_{\Sigma_c}(X^*(t_0))$  については、トラジェクトリー方程式<sup>104)</sup>

$$\dot{x}_i = f_i(X, u^*(t)), \quad i=0,1,\dots, n \tag{3.72}$$

に対応する変分方程式<sup>105)</sup>

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_i(X, u^*(t))}{\partial x_j} \Big|_{X=X^*(t)} \eta_j, \quad i=0,1,\dots, n \tag{3.73}$$

103) 本章, 第2節, (3.42), 参照。

104) II章, 第4節, (2.24), または (2.25), 参照。もとの状態方程式  $\dot{x}_i = f_i(X, u^*(t))$ , (ただし,  $i=1,2,\dots,n$ ) に加えて, 積分形の評価基準より導出される微分方程式  $\dot{x}_0 = f_0(X, u^*(t))$  が同時に考慮されている点に注意せよ。

で動かすことを考えてみよう。この場合、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の点  $X^*(t_0)$  を原点とし、その接平面  $T_{X^*} (X^*(t_0))$  内へ向かうベクトルのうちの任意の1つを  $\eta^0 = (\eta_0^0, \eta_1^0, \dots, \eta_n^0)$  とすれば、(3.73) の変分方程式は、 $\eta^0$  に対する線形変換  $A(t, t_0)$ 、すなわち、

$$\eta(t) = A(t, t_0)\eta^0 \tag{3.74}$$

を定義する。<sup>106)</sup>

つぎに、この線形変換の性質を吟味しておこう。まず、そのために、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の点  $X^*(t_0)$  を含む  $n$  次元平面（これを、一般に  $\pi(X^*(t_0))$  と表わすことにする）を考えよう。そのとき、この平面は、 $X^*(t_0)$  からその平面内の点へ向かうベクトルによって定義される。そこで、 $\eta^0$  をそのようなベクトルのうちの任意の1つとすれば、このベクトル  $\eta^0$  に対して、(3.74) の線形変換を施したとき、もとの  $n$  次元平面  $\pi(X^*(t_0))$  は、新しい平面（これを  $\pi(X^*(t))$  と表わすことにする）に変換される。このとき、線形変換  $A(t, t_0)$  にもとづく  $n$  次元平面の変換は、つぎの〔補助定理5〕として記述される諸性質を有する。<sup>107)</sup>

〔補助定理5〕

最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の点  $X^*(t_0)$  を含む、任意の  $n$  次元平面  $\pi(X^*(t_0))$  の線形変換  $A(t, t_0)$  による変換  $\pi(X^*(t))$  は、つぎの性質をもつ。

- (a)  $\pi(X^*(t))$  は、すべての  $t \in [t_0, t_1]$  に対して定義される。
- (b)  $\pi(X^*(t))$  は、 $\pi(X^*(t_0))$  と同じ次元の平面である。
- (c)  $\pi(X^*(t))$  の方向は、時刻  $t$  に関して連続である。

105) 本章、第3節、(3.63)、参照。

106) (3.72) について、 $u^*(t)$  を与えれば、 $X^*(t)$  が決定される。したがって、いま (3.73) の線形性に注目して、 $A(t) = [a_j^i(t)] = \left[ \frac{\partial f_i(X, u^*(t))}{\partial x_j} \right] \Big|_{X=X^*(t)}$  とおけば、変分方程式 (3.73) は、 $\dot{\eta} = A(t)\eta$  と表わされる。そこで、初期条件  $\eta(t_0) = \eta^0$  に対するこの変分方程式の解は、 $A(t, t_0)$  を遷移行列として、(3.74) のように示される。本章、第3節、参照。

107) [A] 3, pp.17-18, 参照。

ただし、 $A(t, t_0)$  は、(3.73) の変分方程式によって定義される線形変換 (3.74) を表わすものとする。

この証明は、つぎのようにしてなされ得る。まず、 $\pi(X^*(t_0))$  は、仮定により、 $n$  次元平面であるから、その平面に属する  $n$  個の 1 次独立なベクトル (これらを  $\eta_\alpha^0$ 、ただし  $\alpha=1, 2, \dots, n$  で表わすものとする) が存在し、

$$\eta^0 = \sum_{\alpha=1}^n C_\alpha \eta_\alpha^0 \quad (3.75)$$

と書き表わすことができる。ただし、 $C_\alpha$  は、すべてがゼロではない定数である。したがって、 $\eta^0$  の変換は、(3.74)、(3.75) より、

$$\begin{aligned} \eta(t) &= A(t, t_0) \eta^0 \\ &= A(t, t_0) \sum_{\alpha=1}^n C_\alpha \eta_\alpha^0 \\ &= \sum_{\alpha=1}^n C_\alpha A(t, t_0) \eta_\alpha^0 \\ &= \sum_{\alpha=1}^n C_\alpha \eta_\alpha(t) \end{aligned} \quad (3.76)$$

となる。

したがって、[補助定理 5] の (a) は、(3.73) で示される変分方程式が線形同次であることから、その変換  $A(t, t_0)$  は正則となり、<sup>108)</sup> すでに指摘した線形微分方程式の (性質 1) が適用されて明らかとなる。<sup>109)</sup>

つぎに、(b) は、さきの (性質 4) によって導かれる。<sup>110)</sup> すなわち、(3.76) のベクトル  $\eta_\alpha(t)$ 、( $\alpha=1, 2, \dots, n$ ) が 1 次独立であることを示せばよい。そこで、変換  $A(t, t_0)$  の線形性に注目すれば、

108) 逆変換  $A^{-1}(t, t_0)$  が存在し、すべての  $t$ 、( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) に対して  $\eta^0 = A^{-1}(t, t_0) \eta(t)$  が定義されることを意味する。

109) 本章、第 3 節の (性質 1)、参照。

110) 本章、第 3 節の (性質 4)、参照。

$$\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \eta_{\alpha}(t) = A(t, t_0) \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \eta_{\alpha}^0 \tag{3.77}$$

と表わされ、また、その逆変換  $A^{-1}(t, t_0)$  が、すべての  $t, (t_0 \leqq t \leqq t_1)$  に対して定義されているから、

$$\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \eta_{\alpha}^0 = A^{-1}(t, t_0) \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \eta_{\alpha}(t) \tag{3.78}$$

となる。ところが、ベクトル  $\eta_{\alpha}^0, (\alpha=1, 2, \dots, n)$  は、仮定により、1次独立であるから、

$$\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \eta_{\alpha}^0 = 0 \tag{3.79}$$

をみたら、すべてがゼロではない定数  $b_{\alpha}$  は、存在しない。したがって、(3.78)より、すべてがゼロではない定数  $b_{\alpha}$  に対して、

$$\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} \eta_{\alpha}(t) = 0 \tag{3.80}$$

となることは、あり得ない。かくして、 $\eta_{\alpha}(t), (\alpha=1, 2, \dots, n)$  が1次独立であることが示される。

最後に、[補助定理5]の(c)は、変分方程式(3.73)の解の連続性、すなわち、さきの(性質1)によって、直ちに導かれる。<sup>111)</sup>

つぎに、点  $X^*(t_0)$  の近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  が、(3.72)で示される trajectories 方程式によってどのように変換されるかを検討しよう。<sup>112)</sup> このことは、

111) 本章、第3節の(性質1)、参照。

112) 限界面  $\Sigma_c$  上の、点  $X^*(t_0)$  の近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  は、つぎのように定義される。  
 $\Delta(X^*(t_0)) \triangleq \{X; X = X(t_0) \in \Sigma_c\}$

ただし、

$$X(t_0) \triangleq X^*(t_0) + \varepsilon \eta^0 + o(\varepsilon)$$

で、つぎの条件をみたまとする。

(i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|o(\varepsilon)\|}{\varepsilon} = 0$

近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  内の点  $X(t_0)$  を初期条件として、最適制御  $u^*(t)$ ,  $(t_0 \leq t \leq t_1)$  による (3.72) の解を  $X(t)$  とするとき、集合

$$\Delta(X^*(t')) \triangleq \{X : X = X(t')\}, \forall t' \in [t_0, t_1] \tag{3.81}$$

の性質を吟味することを意味する。それゆえ、 $\Delta(X^*(t'))$  は、時刻  $t_0$  に、 $\Delta(X^*(t_0))$  内の点  $X(t_0)$  から出発して、最適制御  $u^*(t)$  によって形成されるトラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の、時刻  $t'$  における点の集合を表わすことになる。図29は、この関係を示している。

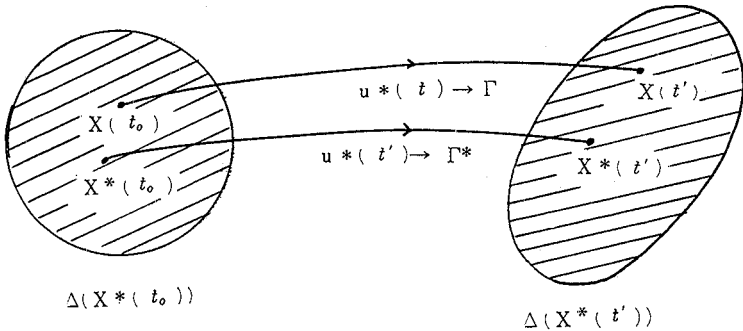


図29. 点  $X^*(t_0)$  の近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  の変換

そこで、いま最適制御  $u^*(t)$  を用いた場合、トラジェクトリー方程式(3.72)の解の初期値に対する依存性から、つぎの関係が成立する。<sup>113)</sup>

$$X(t') = X^*(t') + \varepsilon \eta(t') + O(\varepsilon) \tag{3.82}$$

ただし、 $\eta(t')$  は、 $\eta(t_0) = \eta^0$  を初期条件とする変分方程式 (3.73) の解を表わすものとする。<sup>114)</sup> このとき、ベクトル  $\eta^0$  は、 $n$  次元平面  $T_{\Delta}(X^*(t_0))$  に含

(ii)  $\eta^0 \in T_{\Delta}(X^*(t_0))$ , ただし、 $T_{\Delta}(X^*(t_0))$  は、点  $X^*(t_0)$  における  $\Delta(X^*(t_0))$ , したがって  $\Sigma_0$  の接平面である。

[A] 3, pp.19-21, 参照。

113) 本章, 第3節, (3.62), および図27, 参照。

114) 遷移行列を用いれば、 $\eta(t') = A(t', t_0)\eta^0$  と表わされる。(3.74), 参照。

まれているから、さきの〔補助定理5〕により、変換されたベクトル  $\eta(t')$  は、点  $X^*(t')$  を含む  $n$  次元平面に含まれることになる。<sup>115)</sup> この平面を、 $T_d(X^*(t'))$  とすれば、点  $X^*(t')$  の近傍  $\Delta(X^*(t'))$  は、その点  $X^*(t')$  において、 $T_d(X^*(t'))$  を接平面とする  $n$  次元平面であることがわかる。<sup>116)</sup>

さらに、点  $X^*(t_0)$  を、限界面  $\Sigma_c$  上の、したがって、その点の近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  上の正則な内点であると仮定したこと、および、変換  $A(t', t_0)$  が正則であることから、点  $X^*(t')$  もまた、 $\Delta(X^*(t'))$  の正則な内点になる。また、仮定により点  $X^*(t')$  が、限界面  $\Sigma_c$  にとっても、その正則な内点であることから、その点で接平面  $T_{\Sigma_c}(X^*(t'))$  が存在することになる。<sup>117)</sup>

一方、〔定理1〕により、 $\Delta(X^*(t'))$  内の点は、いずれも限界面  $\Sigma_c$  に関して  $B$  点ではありえない<sup>118)</sup> ので、 $\Delta(X^*(t'))$  が  $\Sigma_c$  と交わることはない。それゆえ、点  $X^*(t')$  が、限界面  $\Sigma_c$  とその点の近傍  $\Delta(X^*(t'))$  に対して、正則な内点であり、この2つの面が交わらないことから、結局、両者は、この点  $X^*(t')$  で、共通の接平面、

$$T_d(X^*(t')) = T_{\Sigma_c}(X^*(t')) \tag{3.83}$$

をもつことになる。図30は、もとの点  $X^*(t_0)$  およびその近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  を最適制御  $u^*(t)$  で動かし、接平面  $T_{\Sigma_c}(X^*(t_0))$  については、トラジェクトリ一方程式に対する変分方程式で動かした場合を図示したものである。

以上の検討結果をまとめれば、つぎの〔補助定理6〕を得る。<sup>119)</sup>

〔補助定理6〕

$X^*(t_0)$  および  $X^*(t')$ 、 $(t_0 \leqq t' \leqq t_1)$  を、限界面  $\Sigma_c$  に含まれる最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の点とすれば、 $X^*(t_0)$  における  $\Sigma_c$  の接平面は、変分方程式 (3.73) で定義される線形変換  $A(t', t_0)$  によって、 $X^*(t')$

115) 本章、第3節の(性質4)、参照。

116) (3.82)、または、本章、第3節の(性質6)、および(性質7)、参照。

117) 十分小さな  $|\varepsilon|$  に対して、近傍  $\Delta(X^*(t'))$  内の点は、すべて  $\varepsilon^* \in E^* \times \{x_0\}$  に属することが、(3.82)より判明する。

118) すなわち、 $\Delta(X^*(t')) \cap B/\Sigma_c = \phi$  を意味する。本章、第2節の〔定理1〕、参照。

119) [A]3, p.21の〔補助定理5〕、参照。

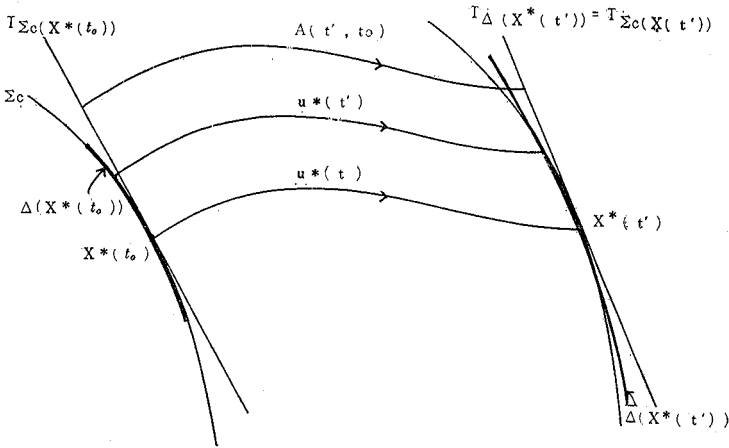


図30. 点  $X^*(t_0)$ , その近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  および接平面  $T_{\Sigma_c}(X^*(t_0))$  の変換における  $\Sigma_c$  の接平面に変換される。すなわち,

$$T_{\Sigma_c}(X^*(t')) = A(t', t_0) T_{\Sigma_c}(X^*(t_0)) \tag{3.84}$$

の関係が成立する。

したがって、われわれは、もとの点  $X^*(t_0)$  およびその点の近傍  $\Delta(X^*(t_0))$  を最適制御  $u^*(t)$  で動かす、その接平面については、変分方程式で動かした場合、変換された新しい接平面が、最適制御で動かされた点およびその近傍の同じ接平面になっているという、重要な性質を得た。

さて、われわれの知りたいものは、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の各点を原点とし、領域  $B/\Sigma$  に向かう放線ベクトル  $n(X^*(t))$  である。そのため、(3.73) の変分方程式に対応するつぎの随伴方程式に注目しよう。<sup>120)</sup>

$$\dot{\lambda}_i = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(X, u^*(t))}{\partial x_i} \Big|_{X=X^*(t)} \lambda_j, \quad i=0, 1, \dots, n \tag{3.85}$$

この随伴方程式 (3.85) の解  $\lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$  は、ある与えられた初期条件  $\lambda(t_0) = \lambda^0$  に対して、一意的にきまる。<sup>121)</sup> また、変分方程式

120) 本章, 第3節, (3.67), または (3.68), 参照。

121) 本章, 第3節の (性質1), 参照。



(3.73) の解  $\eta(t) = (\eta_0(t), \eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$  もある  $\eta(t_0) = \eta^0$  を初期条件として与えれば、一意的に決定される。したがって、すでに述べた (性質 8) により、この 2 つの解ベクトルの内積  $\lambda(t) \cdot \eta(t)$  は、 $t$  に依存しない定数であることがわかる。<sup>122)</sup>

したがって、いま、 $\lambda^0$  を点  $X^*(t_0)$  において限界面  $\Sigma_0$  に垂直で、領域  $B/\Sigma_0$  に向かうベクトルであると仮定しよう。<sup>123)</sup> また、 $\eta^0$  を、点  $X^*(t_0)$  の限界面  $\Sigma_0$  に対する接平面  $T_{\Sigma_0}(X^*(t_0))$  内の任意のベクトルであると考えよう。そのとき、放線と接平面内のベクトルが直交することから、

$$\lambda^0 \cdot \eta^0 = 0 \tag{3.86}$$

が成立し、さらに、(性質 8) によって、区間  $[t_0, t_1]$  のすべての  $t$  に対して、

$$\lambda(t) \cdot \eta(t) = 0 \tag{3.87}$$

が成立することが導かれる。それゆえ、

$$\lambda(t) = \alpha(t)n(X^*(t)) \tag{3.88}$$

と表わされ、区間  $[t_0, t_1]$  で連続で、 $\lambda^0$  がゼロでないかぎり  $\lambda(t)$  もゼロにはなりえない<sup>124)</sup> ことから、 $\lambda(t)$  と  $n(X^*(t))$  の両ベクトルは、つねに同じ方向をもつことがわかる。したがって、いわゆる最大原理にあたる [定理 2] の (3.42) は、つぎのように書きかえられる。<sup>125)</sup>

$$\begin{aligned} \lambda(t) \cdot f(X^*(t)) \cdot u^*(t) &= \text{Max}_{u \in U} \lambda(t) \cdot f(X^*(t)) \cdot u \\ &= 0 \quad t_0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \tag{3.89}$$

また、随伴方程式 (3.85) の右辺が、 $x_0$  に関係しないことから、

$$\dot{\lambda}_0 = \sum_{j=0}^n 0 \cdot \lambda_j = 0 \tag{3.90}$$

122) 本章、第 3 節の (性質 8)、参照。

123)  $\lambda^0$  は、単位放線ベクトル  $n(X^*(t_0))$  と同じ方向を向いている。すなわち、 $\alpha_0 > 0$  とおけば、 $\lambda^0 = \alpha_0 n(X^*(t_0))$  と表わされる。

124) 随伴方程式 (3.85) が、正則な線形変換を定義することによる。

125) 本章、第 2 節の [定理 2]、参照。

となり、

$$\lambda_0(t) = \text{定数} \leq 0 \quad (3.91)$$

であることが判明する。<sup>126)</sup>したがって、 $\lambda(t)$  は、限界面  $\Sigma_c$  に関して、つねに領域  $B/\Sigma_c$  へ向かう放線ベクトルとなっている。

いまや、われわれは、ある時刻 (たとえば、 $t=t_0$ ) における接平面  $T_{\Sigma_c}(X^*(t_0))$  に垂直なベクトル  $\lambda^0$  がわかったとすれば、随伴方程式 (3.85) を解くことによって、放線ベクトル  $\lambda(t)$  を自動的に求めることが可能となった。そこで、この放線ベクトル  $\lambda(t)$  の初期条件  $\lambda^0$  を、いかにして与えるかが、残された最後の課題となる。そこで、われわれは、この  $\lambda(t)$  のみたすべき条件を、横断条件 (Transversality condition) とよび、次節で検討を加えることにしよう。

### §5. 横断条件

本節では、まず最初に、状態空間内で与えられる最終状態の集合  $\theta_1$ 、および初期状態の集合  $\theta_0$  を、多様体としてとらえ、その多様体についての接平面と放線ベクトルとの関係が明らかにされる。ついで、その検討結果を踏まえて、最終点における横断条件、および初期点における横断条件が、順次明らかにされる。そして、最後に、タイプ1の問題に対する最大原理が、[定理3]としてまとめられる。

#### [多様体と接平面]

状態空間内の集合  $\theta_1$ 、および  $\theta_0$  は、通常、何次元かの曲線あるいは曲面、すなわち多様体 (Manifold) として与えられる。したがって、可動端点をもつ最適制御問題の最大原理を正確に記述するために、多様体の考察に関連して必要となる幾何学的な諸概念を導入しておこう。<sup>127)</sup>

いま、 $n$  次元ユークリッド空間 ( $E^n$ ) 内のある領域 ( $G$ ) で定義された実数値関数を、一般に次式、

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.92)$$

126) 点  $X^*(t_0)$  における放線ベクトル  $n(X^*(t_0))$  の第1要素を  $n_0(X^*(t_0))$  で表わせば、(3.36) より、 $\lambda_0(t) = \alpha_0 n_0(X^*(t_0)) \leq 0$  が成立する。

127) [A] 4, pp.253-256, および [A] 8, pp.45-49, 参照。

で表わすことにする。さらに、この関数  $f(\mathbf{X})$  が領域  $G$  で、各変数  $x_i, (i=1, 2, \dots, n)$  に関する 1 階の偏導関数をもつと仮定すれば、領域  $G$  のすべての点  $\mathbf{X}$  で、ベクトル

$$\nabla f(\mathbf{X}) \triangleq \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{3.93}$$

が定義される。したがって、このベクトルを、われわれは、関数  $f(\mathbf{X})$  の勾配 (Gradient of the function  $f(\mathbf{X})$ ) とよぶことにする。<sup>128)</sup>

そこで、関数  $f(\mathbf{X})$  の勾配がもつ幾何学的な特徴を明らかにしておこう。いま、関数  $y=f(\mathbf{X})$  を、 $y_0=f(\mathbf{X}_0)$  の点に関して、テイラー展開すれば、次式を得る。

$$y = y_0 + \nabla f(\mathbf{X}_0) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \dots \tag{3.94}$$

上式の右辺の第 3 項以降を無視すれば、(3.94) は、関数  $y=f(\mathbf{X})$  の線形近似として、次式によって示される接平面の方程式を与える。

$$(y - y_0) = \nabla f(\mathbf{X}_0) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \tag{3.95}$$

これを、ベクトルの内積として表現するべく変形すれば、

$$(-1, \nabla f(\mathbf{X}_0)) \cdot (y - y_0, \mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = 0 \tag{3.96}$$

を得る。その結果、つぎの 2 つの性質が明らかとなる。

(性質 1)

$(-1, \nabla f(\mathbf{X}_0))$  は、曲面  $y=f(\mathbf{X})$  の点  $(y_0, \mathbf{X}_0)$  における接平面の放線ベクトルとなっている。

(性質 2)

$\nabla f(\mathbf{X}_0)$  は、曲線  $y_0=f(\mathbf{X})$  の点  $\mathbf{X}_0$  における接平面の放線ベクトルとなっている。

叙上の関係を図解するため、 $n=2$  の場合に考察を限定し、関数  $y=f(\mathbf{X})=$

128) この表現方法として、(3.93) に示す  $\nabla f(\mathbf{X})$  の記号が用いられることもあれば、また、 $\text{grad } f(\mathbf{X})$  の記号が用いられることもある。



$$\nabla f(\mathbf{X}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = 0 \tag{3.98}$$

をみたす点  $\mathbf{X} \in S$  を、超曲面  $S$  の特異点 (Singular point) という。したがって、この特異点をもたない超曲面を、われわれは、“なめらかな”超曲面 (Smooth hypersurface) とよぶことにする。

さて、以下で取り上げる超曲面は、つねになめらかな (すなわち、特異点をもたない) ものであると仮定しよう。<sup>130)</sup>

つぎに、点  $\mathbf{X}_0$  を (3.97) によって決定されるなめらかな超曲面  $S$  の任意の点と仮定しよう。そのとき、ベクトル  $\nabla f(\mathbf{X}_0)$  は、超曲面  $S$  の点  $\mathbf{X}_0$  における放線ベクトル (Normal vector) を定義する。また、点  $\mathbf{X}_0$  を通り、ベクトル  $\nabla f(\mathbf{X}_0)$  をその法線ベクトルとしてもつ超平面は、超曲面  $S$  の点  $\mathbf{X}_0$  における接超平面 (Tangent hyperplane) を与える。そこで、点  $\mathbf{X}_0$  を始点とする接平面上のすべてのベクトルを、超曲面  $S$  の点  $\mathbf{X}_0$  における接線ベクトル (Tangent vector) とよぶことにしよう。<sup>131)</sup>

以上において、われわれは、多様体の厳密な定義をするのに必要な、基礎的諸概念の考察を、逐次検討してきた。そこで、つぎに、これらの諸概念を用いて、“なめらかな”多様体の定義を与えることにしよう。

いま、 $S_1, S_2, \dots, S_k$  を、それぞれつぎの方程式、

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \tag{3.99}$$

130)  $\nabla f(\mathbf{X}) \neq 0$  の点を、非特異点 (Non-singular point) という。いま、 $y=f(\mathbf{X})=x_1+x_2-1$  のとき、 $\nabla f(\mathbf{X})=(1, 1) \neq 0$  となり、関数  $y=f(\mathbf{X})$  は特異点をもたないが、 $y=f(\mathbf{X})=(x_1+x_2-1)^2$  のときには、 $\nabla f(\mathbf{X})=(2(x_1+x_2-1), 2(x_1+x_2-1))$  となり、 $x_1+x_2=1$  をみたす線上の点は、すべて特異点となる。それゆえ、特異点をもつか否かは、もとの関数  $y=f(\mathbf{X})$  に対応することに注意すべきである。

131) したがって、点  $\mathbf{X}_0$  を始点とするベクトルは、 $\nabla f(\mathbf{X}_0)$  に直交するとき、またそのときに限り、超曲面  $S$  の接線ベクトルとなる。

で与えられる空間  $E^n$  内の“なめらかな”超曲面とする。そのとき、これらすべての超曲面の交わりを  $M$  とすれば、<sup>132)</sup> (すなわち、(3.99) のすべてを同時にみたすすべての点の集合を意味する) 各点  $X \in M$  において、

$$\nabla f_1(X), \nabla f_2(X), \dots, \nabla f_k(X) \tag{3.100}$$

が1次独立であるときにかぎり、この  $M$  を  $E^n$  における  $(n-k)$  次元のなめらかな多様体 (Smooth manifold) と定義する。したがって、この定義によれば、 $n$  次元ユークリッド空間  $E^n$  内の  $r$  次元多様体は、 $(n-r)$  個の連立方程式によって与えられることになる。<sup>133)</sup>

簡単化のため、いま、 $n=3$ 、 $k=2$  として、 $\nabla f_1(X)$  と  $\nabla f_2(X)$  が1次独立な場合の多様体を図示すれば、図32のようになる。

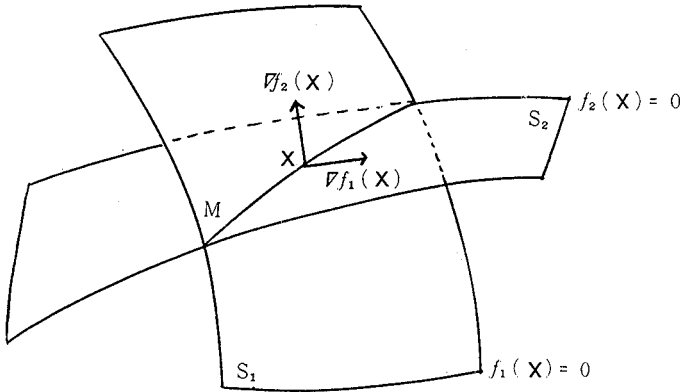


図32.  $\nabla f_1(X), \nabla f_2(X)$  が1次独立の場合

この図より明らかなように、 $M$  は  $(n-k) = 1$  次元の多様体を定義する。<sup>134)</sup>

132)  $M = \{X : f_i(X) = 0, i=1, 2, \dots, k\}$  (ただし、 $f_i(X) = 0$  は、いずれもなめらかな超曲面である) と表わされる。

133) それゆえ、特別な場合として、 $(n-1)$  次元の多様体は、1個の方程式で与えられ、超曲面と一致することになる。

134) 1次元の多様体は、曲線 (Curve) ともよばれる。

なお、放線ベクトル (3.100) が1次独立であるための条件は、つぎの関数行列

$$A = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{X}) \\ \nabla f_2(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \nabla f_k(\mathbf{X}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \frac{\partial f_k}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

のランクが最大であること、すなわち、

$$r(A) = k \quad (3.102)$$

が成立する条件と同じである。

ちなみに、(3.102) の条件が成立しない (すなわち、放線ベクトルが1次独立でない) 場合を図示したのが、つぎの図33である。

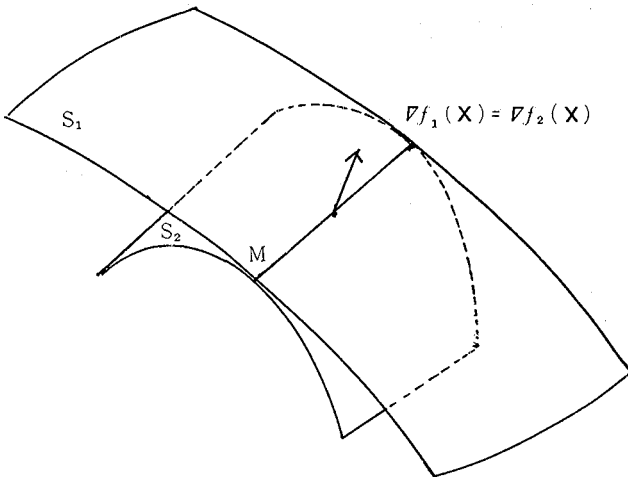


図33.  $\nabla f_1(\mathbf{X}), \nabla f_2(\mathbf{X})$  が1次独立でない場合

最後に、この多様体  $M$  の接平面をつぎのように定義しよう。すなわち、いま、 $M$  を  $n$  次元空間  $E^n$  内において (3.99) により定義された  $(n-k)$  次元の多様体とし、 $X$  をそのある点とする。<sup>135)</sup> また、 $T_i(X)$ , ( $i=1, 2, \dots, k$ ) を各超曲面  $f_i(X)=0$  の点  $X \in M$  における接平面とする。そのとき、各  $T_i(X)$  平面の交わりは、 $(n-k)$  次元平面となり、これを点  $X$  における多様体  $M$  の接平面と定義する。図34は、この関係を示したものである。<sup>136)</sup>

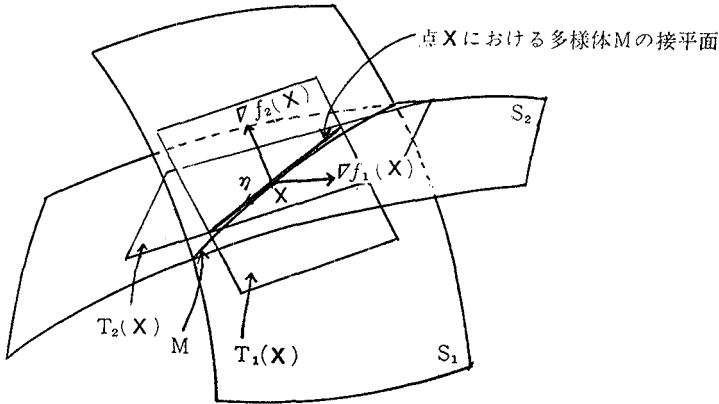


図34. 多様体  $M$  の接平面

以上の考察より、われわれは、多様体  $M$  の接線ベクトルに関する重要な2つの性質を述べる事ができる。<sup>137)</sup>

(性質 1)

点  $X \in M$  に始点をもつベクトルは、接平面内にあるとき (すなわち、点  $X$  における多様体  $M$  の接線ベクトルであるとき)、かつそのときにかぎり、ベクトル  $\nabla f_i(X)$ , ( $i=1, 2, \dots, k$ ) のすべてと直交する。

135) すなわち、 $X \in M$  を仮定する

136) 図32と同様に、 $n=3, k=2$  の場合に考察を限定している結果、多様体  $M$  の接平面は、 $n-k=1$  次元となり、接線として与えられる。

137) [A]4, pp.255-256, [A]8, pp.48-49, 参照。



(性質2)

任意の点  $X_0 \in M$  に始点をもつベクトルは、多様体  $M$  の接線ベクトルであるとき、かつそのときにかぎり、 $M$  上のある曲線の接線ベクトルである。

このうち、まず(性質1)は、さきの図34において、点  $X \in M$  に始点をもつ接平面内のベクトル(図中、 $\eta$ として示されている)が、ベクトル  $\nabla f_1(X)$  と  $\nabla f_2(X)$  のいずれに対しても直交していることによって、容易に確かめられる。つぎの(性質2)は、横断条件(すなわち、多様体上での状態点  $X$  の位置を決定する条件式)を厳密に記述する際に必要となるものである。これをいいかえると、多様体  $M$  の点  $X_0 \in M$  における多様体  $M$  の接線ベクトルが与えられれば、点  $X_0$  を通り、与えられたベクトルをその接線ベクトルとしてもつ曲線が、多様体  $M$  上に存在するということになる。そこで、この性質を用いて可動端点の最適問題を解くための横断条件を明らかにしよう。

[最終点における横断条件]

いま、 $\theta^1$  をなめらかな  $(n-q)$  次元の多様体、すなわち、

$$\theta_i^1(X) = 0, \quad i=1, 2, \dots, q \tag{3.103}$$

で与えられる  $q$  個のなめらかな超曲面の交わりであると仮定しよう。<sup>138)</sup> このとき、われわれの定義により、

$$\nabla \theta_1^1(X), \nabla \theta_2^1(X), \dots, \nabla \theta_q^1(X) \tag{3.104}$$

は、各点  $X \in \theta^1$  において、1次独立なベクトルを与える。すなわち、つぎの行列関数、

$$\begin{pmatrix} \nabla \theta_1^1(X) \\ \nabla \theta_2^1(X) \\ \vdots \\ \nabla \theta_q^1(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_1^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \theta_1^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \theta_2^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_2^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \theta_2^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \theta_q^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_q^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \theta_q^1}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.105}$$

138) (3.99), 参照。いうまでもなく、 $1 \leq q \leq n$  である。

のランクが  $q$  となることを意味する。<sup>139)</sup> その結果、 $\theta^1$  のすべての点  $X^1$  において、 $\theta^1$  に対する接平面  $T_{\theta^1}(X^1)$  が一意的にきまる。<sup>140)</sup>

さて、以上の議論を、拡張された状態空間内における多様体に敷衍してみよう。図35は、最終点における横断条件を明らかにするために、 $(n+1)$  次元のユークリッド空間内における限界面  $\Sigma_c$ 、最終状態点の集合  $\theta^1$ 、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  等を示したものである。

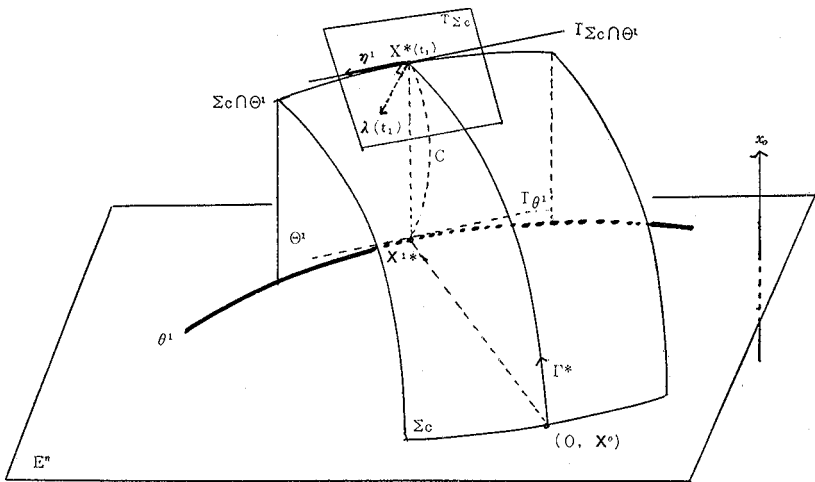


図35. 最終点における横断条件

この拡張された状態空間  $E^{n+1}$  内において、さきの集合  $\theta^1$  は、全コスト  $C$  に対応する限界面  $\Sigma_c$  と最終状態点の集合  $\theta^1 \triangleq \theta^1 \times \{x_0\}$  との交わり（すなわち、 $\Sigma_c \cap \theta^1$ ）の  $E^n$  への射影となっている。このとき、

$$\Sigma_c \cap \theta^1 = \{X : x_0 = C, X \in \theta^1\} \tag{3.106}$$

と表わされ、これをわれわれの定義により、 $(n-q)$  次元の多様体とみること

139) (3.101), および(3.102), 参照。

140) 図32と図33とを比較せよ。

ができる。<sup>141)</sup>

いま、点  $X^{1*} \in \theta^1$  の近傍で、そのどの点をとってみても、そこに達する最適経路が存在するものと仮定すれば、<sup>142)</sup> 点  $X^{1*}$  における  $\theta^1$  の接平面が存在することになる。したがって、この接平面を  $T_{\theta^1}(X^{1*})$  で表わすことにしよう。このとき、点  $X^{1*} = (C, X^{1*})$  において、 $(n-q)$  次元の多様体  $\Sigma_c \cap \theta^1$  に対する接平面  $T_{\Sigma_c \cap \theta^1}(X^{1*})$  が存在することになる。<sup>143)</sup> その結果、叙上の多様体  $M$  の接線ベクトルに関する(性質2)により、点  $X^{1*} = (C, X^{1*})$  を始点とする多様体  $\Sigma_c \cap \theta^1$  の接線ベクトル  $\eta^1 \in T_{\Sigma_c \cap \theta^1}(X^{1*})$  は、点  $X^{1*}$  における限界面  $\Sigma_c$  の接平面  $T_{\Sigma_c}(X^{1*})$  に属していることがわかる。<sup>144)</sup>

さて、以上の考察より、最終点における横断条件を、つぎのように述べることができる。いま、点  $X^{1*} = X^*(t_1)$  を限界面  $\Sigma_c$  上に形成される最適トランジェクトリー  $\Gamma^*$  上の最終点とする。また、 $\lambda(t_1)$  を、 $\lambda^0 = \alpha_0 n(X^*(t_0))$  を初期条件とする<sup>145)</sup> 随伴方程式 (3.85) の解の  $t=t_1$  における値とする。さらに、 $\eta^1 = (\eta_0^1, \eta_1^1, \dots, \eta_n^1)$  を、 $T_{\Sigma_c \cap \theta^1}(X^*(t_1))$  上に含まれる任意の  $(n+1)$  次元ベクトルとする。このとき、つぎの直交条件、

$$\lambda(t_1) \cdot \eta^1 = 0 \tag{3.107}$$

を、最終点における横断条件という。

この場合、とくに  $T_{\Sigma_c \cap \theta^1}(X^*(t_1))$  上の点については、 $x_0 = C$  および  $X \in T_{\theta^1}(X^*(t_1))$  であることから、定義によって、つねに、

$$\eta_0^1 = 0 \tag{3.108}$$

となる。また、ベクトル  $\eta^1$  が多様体  $\Sigma_c \cap \theta^1$  の点  $X^*(t_1)$  における接線ベク

141) 拡張された状態空間の次元は、 $(n+1)$  となり、他方超曲面を規定する(独立した)方程式は、(3.103)によって示される  $q$  個の方程式プラス (3.106) の右辺に示されている  $x_0 - C = 0$  を加えた合計  $(q+1)$  個となる。それゆえ、多様体  $\Sigma_c \cap \theta^1$  の次元は、 $(n+1) - (q+1) = n-q$  となる。

142) すなわち、点  $X^{1*}$  が正則であることを意味する。本章、第2節、(3.35)、参照。

143)  $T_{\Sigma_c \cap \theta^1}(X^{1*}) = \{X : x_0 = C, X \in T_{\theta^1}(X^{1*})\}$  と表わされる。

144) すなわち、(性質2)は、 $T_{\Sigma_c \cap \theta^1}(X^{1*}) \subset T_{\Sigma_c}(X^{1*})$  の関係が成立することを意味する。

145) 本章、第4節、(3.88)、および脚注123)、参照。

トル<sup>146)</sup>であることから、叙上の接線ベクトルに関する(性質1)を用いて、

$$\nabla\theta_i^1(X^{1*}) \cdot (\eta_1^1, \eta_2^1, \dots, \eta_n^1) = 0, \quad i=1, 2, \dots, q \quad (3.109)$$

となる。すなわち、この勾配ベクトル $\nabla\theta_i^1(X^{1*})$ を各成分ごとに分解表示すれば、<sup>147)</sup>(3.109)は、つぎのように示される。

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial\theta_i^1(X^{1*})}{\partial x_j} \eta_j^1 = 0, \quad i=1, 2, \dots, q \quad (3.110)$$

仮定により、

$$r[\nabla\theta_1^1(X^{1*}), \nabla\theta_2^1(X^{1*}), \dots, \nabla\theta_q^1(X^{1*})] = q \quad (3.111)$$

である<sup>148)</sup>ことから、(3.108)と(3.110)より、 $(n+1)$ 次元ベクトル $\eta^1$ の $(q+1)$ 個の方程式を解いて、 $(n+1)$ 次元ベクトル $\eta^1$ の $(q+1)$ 個の成分を、残りの $(n-q)$ 個の成分<sup>149)</sup>の線形結合として表わすことができる。さらに、(3.107)により、この任意に選ばれた $\eta^1$ の成分の係数がゼロにならないから、最適トラジェクトリー $\Gamma^*$ 上の最終点 $X^{1*}$ において、 $\lambda(t_1)$ に関する $(n-q)$ 個の条件が導かれる。<sup>150)</sup>これに、多様体を規定する $q$ 個の条件式<sup>151)</sup>を加えれば、合計 $n$ 個の条件式が形成されることになる。

[初期点における横断条件]

つぎに、初期状態の点 $X^0$ が、状態空間内の1点として必ずしも完全に指定されておらず、ある与えられた状態集合 $\theta^0$ に属しておればよいとする問題の横断条件を検討することにしよう。この場合、とくに、初期の状態集合 $\theta^0$ が、 $(n-p)$ 次元の多様体、すなわち、

$$\theta_i^0(X) = 0, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (3.112)$$

146)  $\eta^1 \in T_{X^0} \text{cone}^1(X^*(t_1))$ を意味する。

147) (3.105), 参照。

148) (3.101), および(3.102), 参照。

149) これらは、任意の値をとることができる。

150) ただし、これらの条件式のなかには、 $\lambda_0(t_1)$ が含まれていないことに注意せよ。

151) (3.103)の条件式に対応する。

で与えられる  $p$  個のなめらかな超曲面の交わりであると仮定する。その結果、 $\theta^1$  の集合と同様に、

$$r\theta_1^0(X), r\theta_2^0(X), \dots, r\theta_p^0(X) \tag{3.113}$$

は、各点  $X \in \theta^0$  において、1次独立なベクトルを与えることになる。それゆえ、 $\theta^0$  のすべての点  $X^0$  において、 $\theta^0$  に対する接平面  $T_{\theta^0}(X^0)$  が一意にきまる。

つぎに、これを、拡張された状態空間内において検討することにしよう。つぎの図36は、初期点における横断条件を明らかにするために、 $(n+1)$  次元ユークリッド空間内における限界面  $\Sigma_c$ 、初期多様体  $E^* \cap \theta^0$ 、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  等を示したものである。

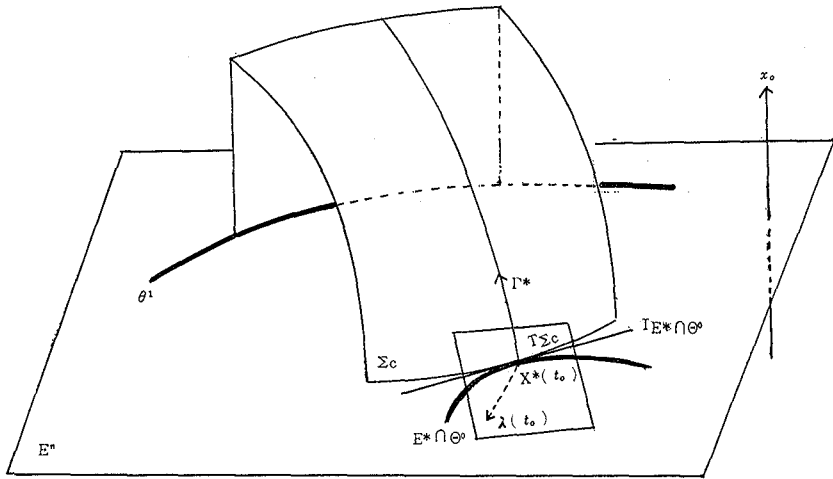


図36. 初期点における横断条件

まず、この拡張された状態空間  $E^{n+1}$  内に、多様体  $\theta^0 \triangleq \theta_0 \times \{x_0\}$  を考えよう。つぎに、この  $\theta^0$  と  $E^*$  (すなわち、最適な法則にもとづく径路が存在するすべての点  $X^0$  の集合)<sup>152)</sup>との交わり、すなわち、

152)  $E^* \triangleq \{X^0: \alpha p^*; X^0 \rightarrow \theta^1\}$  と定義される。本章、第1節、(2.4)、参照。

$$E^* \cap \theta^0 = \{X: x_0 = 0, X \in \theta^0\} \tag{3.114}$$

は、 $E^{n+1}$  における  $(n-p)$  次元の多様体を定義する。<sup>153)</sup> さらに、この場合、点  $X^{0*} = (0, X^{0*})$  において、初期多様体  $E^* \cap \theta^0$  の、接平面  $T_{E^* \cap \theta^0}(X^{0*})$  が存在し、それは、 $X$  を  $T_{\theta^0}(X^0)$  の点とするとき、 $(0, X)$  の形のすべての点の集合となる。

その結果、 $\theta^1$  の場合と同様に、多様体の接線ベクトルに関する（性質 2）より、点  $X^{0*} = (0, X^{0*})$  を始点とする多様体  $E^* \cap \theta^0$  の接線ベクトル  $\eta^0 \in T_{E^* \cap \theta^0}(X^{0*})$  は、点  $X^{0*}$  における限界面  $\Sigma_c$  の接平面  $T_{\Sigma_c}(X^{0*})$  に含まれることになる。<sup>154)</sup>

それゆえ、初期点における横断条件を、つぎのように述べることができる。 $\lambda(t_0)$  を、随伴方程式 (3.85) の解の  $t=t_0$  における値とし、また、 $\eta^0 = (\eta_0^0, \eta_1^0, \dots, \eta_n^0)$  を、 $T_{E^* \cap \theta^0}(X^*(t_0))$  上に含まれる任意の  $(n+1)$  次元ベクトルとする。このとき、つぎの直交条件

$$\lambda(t_0) \cdot \eta^0 = 0 \tag{3.115}$$

を、初期点における横断条件という。

この場合、とくに  $\eta^0$  が  $T_{E^* \cap \theta^0}(X^*(t_0))$  に含まれる任意のベクトルであることから、接線ベクトルに関する（性質 1）を用いて、

$$\eta_0^0 = 0 \tag{3.116}$$

および、

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \theta_i^0(X^{0*})}{\partial x_j} \eta_j^0 = 0, \quad i=1, 2, \dots, p \tag{3.117}$$

の関係式が導かれる。したがって、 $\eta^1$  の場合と同様に、(3.115) において、 $\eta^0$  の任意の  $(n-p)$  個の成分の係数がゼロでなければならぬことから、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の初期点において、 $\lambda(t_0)$  に関する  $(n-p)$  個の条

153)  $(n+1) - (p+1) = n-p$ 。

154) 接平面  $T_{\Sigma_c}(X^{0*})$  は、点  $X^{0*} = X^*(t_0)$  を限界面  $\Sigma_c$  の正則な内点と仮定したことから、一意的にもとめられる。

件式が導かれる。<sup>155)</sup>これに、初期多様体を規定する  $p$  個の条件式<sup>156)</sup>を加えれば、合計  $n$  個の条件式が形成されることになる。

かくして、最適トラジェクトリー  $\Gamma^*$  上の初期点および最終点における  $x_j(t)$  および  $\lambda_j(t)$  (ただし、 $j=1, 2, \dots, n$ ) の各値がみたすべき  $2n$  個の条件式が、多様体を規定する条件 (3.103), (3.112), およびそれらに対応する横断条件によって構成されることが示された。

そこで、最後に、われわれが順次検討を加えてきた、タイプ1の問題とそれに対する最大原理を要約しておこう。<sup>157)</sup>

### タイプ1の問題

つぎの評価基準

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(X(t), u(t)) dt \quad (3.118)$$

を、以下の制約に従って最小にする制御  $u(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) を求めよ。

(i) 状態方程式

$$\dot{X} = f(X, u) \quad (3.119)$$

(ii) 初期条件

$$X(t_0) \in \theta^0 \quad (3.120)$$

(iii) 終端条件

$$X(t_1) \in \theta^1 \quad (3.121)$$

155) 最終点における横断条件の場合と同様に、これらの条件式のなかには、 $\lambda_0(t_0)$  が含まれていないことに注意せよ。

156) (3.112) の条件式に対応する。

157) なお、タイプ1の問題については、本章、第1節、(3.1) ~ (3.5) として、すでに定式化されているが、そこでは、(3.3)より明らかなように、初期状態の点  $X(t_0)$  が  $X^0$  として完全に指定されている場合に当たっている。しかし、本節では、初期点における横断条件が一般的な形で検討されたので、それに対応して、ここでは、(3.3)の条件をゆるめた、(2.29)を初期条件とする問題を、タイプ1の問題として定式化されている。

(iv) 制御制約

$$\mathbf{u} \in U \tag{3.122}$$

ただし,

$$\mathbf{X} \in E^n, \mathbf{u} \in E^m, U \subset E^m$$

$$\theta^0 \subset E^n, \theta^1 \subset E^n$$

$t_0$  は所与,  $t_1$  は未知とする。

この場合, われわれの与えた仮定は, つぎのとおりである。

(仮定 1)

$f_j(\mathbf{X}, \mathbf{u}), \partial f_j(\mathbf{X}, \mathbf{u})/\partial x_i, (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$  は,  $E^n \times U$  内で定義され, かつ連続である。<sup>158)</sup>

(仮定 2)

最適制御  $\mathbf{u}^*(t), (t_0 \leqq t \leqq t_1)$  は, 許容制御のなかから選ばれるものとする。<sup>159)</sup>

(仮定 3)

$\theta^0$ , および  $\theta^1$  は, それぞれ適当な次元をもった, なめらかな多様体である。<sup>160)</sup>

そこで, いま, ハミルトニアン (Hamiltonian) 関数を,

$$H(\mathbf{X}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \triangleq \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \tag{3.123}$$

と定義すれば, つぎの定理が成立する。<sup>161)</sup>

[定理 3]

$\mathbf{u}^*(t), (t_0 \leqq t \leqq t_1)$  を, タイプ 1 の問題における最適制御,  $\mathbf{X}^*(t), (t_0 \leqq t \leqq t_1)$  を, 対応する最適トラジェクトリー上の点とすると, つぎの条件

158) 本章, 第 3 節の [変分方程式] の仮定, 参照。

159) 本章, 第 3 節の [許容制御] の定義, 参照。

160) 本節の [なめらかな多様体] の定義, および (3.103), (3.112), 参照。

161) 「タイプ 1 の問題に対する最大原理」ともよばれる。



をみたすゼロ（ベクトル）でない連続なベクトル関数  $\lambda(t)$ , ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) が存在する。

(a) (i)  $\lambda_0(t) = \text{定数} \leq 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  (3.124)

(ii)  $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  は、  
つぎの方程式の解である。<sup>162)</sup>

$$\dot{\lambda}_i = -\partial H(X^*(t), u^*(t), \lambda(t)) / \partial x_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.125)$$

(b)  $H(X^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = \text{Max}_{u \in U} H(X^*(t), u, \lambda(t))$ ,  
 $t_0 \leq t \leq t_1$  (3.126)

(c)  $H(X^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  (3.127)

(d) ベクトル  $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$  は、 $t=t_0$ , および  $t=t_1$  でそれぞれ対応する端点の多様体  $\theta^0$ , および  $\theta^1$  に直交する。

この [定理 3] について、とくに留意すべき事項を述べれば、つぎのとおりである。まず、その第 1 は、与えられた問題の初期条件または終端条件に関するものである。すなわち、端点（初期点または最終点）が固定されている問題については、 $\theta^0$ , または  $\theta^1$  は、ゼロ次元の多様体を定義する<sup>163)</sup>ことから、その端点における横断条件は、つねにみたされていることになる。

つぎに、第 2 の点は、[定理 3] が最適制御のための必要条件ではあるが、十分条件とは限らないという事実である。したがって、いま、この [定理 3] を用いて  $u^*(t)$  が導かれたとき、この  $u^*(t)$  が果して最適制御であるか否かを確かめる必要がある。その方法として、たとえば、十分条件が与えられたとすれば、これを [定理 3] の帰結と合わせ考えることにより、最適解をもとめることが可能となる。あるいは、また、与えられた問題に対する解の存在と一意性の条件が明らかにされれば、これらをてがかりとして [定理 3] の帰結を吟

162) ハミルトニアン関数  $H(X, u, \lambda)$  の定義 (3.123) により、(3.125) は、随伴方程式 (3.85) に対応する。また、トラジェクトリー方程式 (3.72) は、 $x_i = \partial H(X^*(t), u^*(t), \lambda(t)) / \partial x_i$ , ( $i=0, 1, \dots, n$ ) として書くことができる。

163)  $\theta^0$ , および  $\theta^1$  は、 $\theta_i^0(X) = 0$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), および  $\theta_i^1(X) = 0$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) で与えられ、その結果、 $(n-n) = 0$  次元の多様体を定義することになる。

味することにより、最適解の導出が可能となるであろう。

最後に、第3の留意すべき点として、たとえ与えられた問題に対する解が存在するとしても、それが必ずしもただ1つだけとは限らないということである。したがって、この点に理論分析の重要な課題がもためられ、われわれは、与えられた問題の状況に応じて、各種の工夫された理論分析を試みる必要が生じてこよう。

#### IV

この章では、すでに明らかにしたタイプ1の問題の応用として、地域的な資源配分の問題を動的ななかたちで取り扱うことにする。この分野の系譜としては、ラーマンによる地域間の投資配分モデルを草分けとして、その後、このモデルの理論的精緻化ないし一般化が、数多く試みられている。<sup>164)</sup>

そこで、まず、われわれは、最適制御問題として定式化されるラーマン・モデルをとりあげ、[定理3]の適用によるその解法を明らかにする。つぎに、その評価基準（すなわち、目的関数）に若干の変更を加えたラーマン・モデルについて、その最適解を検討し、両者の比較を試みる。最後に、地域開発において、規模の経済のもつ意味を解明するため、当初のラーマン・モデルを改良し、その理論分析を試みることにする。

##### §1. ラーマン・モデル（その1）

投資の地域間配分を問題とするラーマン・モデルは、つぎのように示される。<sup>165)</sup> いま、2地域経済を考え、その各地域では、あらかじめ決められている産出資本比率（ $Y/K$ ）にもとづき、同質の地域所得が生産されるものと想定しよう。したがって、地域  $i$ 、( $i=1,2$ )の資本ストックを  $K_i$ 、産出資本比率を  $b_i$ 、地域所得を  $Y_i$  とすれば、各地域の生産関数は、

$$Y_i = b_i K_i, \quad i=1,2 \quad (4.1)$$

として表わされる。

164) [K] a, および、河野博忠；「日本における地域学：展望」, 昭和48年度, 日本地域学会年報第4巻, pp.170-171, 参照。

165) ここでの定式化は、[K] b, 3, による。

さらに、地域  $i$  の平均貯蓄性向を  $s_i$  とすれば、2地域全体としての総貯蓄  $S$  は、

$$S = s_1 Y_1 + s_2 Y_2 \quad (4.2)$$

となる。また、地域  $i$  の投資は、その地域における資本ストックの増分  $\dot{K}_i = dK_i/dt$  となることから、2地域全体としての総投資  $I$  は、

$$I = \dot{K}_1 + \dot{K}_2 \quad (4.3)$$

として表わされる。その結果、当該2地域を全体としてみた場合、貯蓄・投資の均衡条件式は、

$$\dot{K}_1 + \dot{K}_2 = s_1 Y_1 + s_2 Y_2 \quad (4.4)$$

として示される。そこで、簡単化のため、

$$g_i = b_i s_i, \quad i=1,2 \quad (4.5)$$

とおけば、(4.4)の均衡条件式は、つぎのように書き換えられる。

$$\dot{K}_1 + \dot{K}_2 = g_1 K_1 + g_2 K_2 \quad (4.6)$$

つぎに、計画主体が、2地域より生ずる総貯蓄  $S$  を投資基金として、これを当該両地域にどのように配分すべきかという問題を考えてみよう。そのために、いま、総投資  $I$  のうち、第1の地域に配分される比率を  $\beta$ 、( $0 \leq \beta \leq 1$ )で表わし、これを配分パラメータとよぶことにする。<sup>166)</sup>

したがって、もし、この配分パラメータ  $\beta$  がきまれば、それに応じて地域別の投資配分がきまり、その結果、当該地域の資本ストックの増分が、次式によって決定されることになる。

$$\dot{K}_1 = \beta(g_1 K_1 + g_2 K_2) \quad (4.7)$$

$$\dot{K}_2 = (1 - \beta)(g_1 K_1 + g_2 K_2) \quad (4.8)$$

166) この配分パラメータ  $\beta$  は、計画主体により、政策上、十分操作可能なことから、以下でみるように、制御変数と考えられる。なお、第1地域へ配分される投資は、 $I_1 = \beta S$  となり、また第2地域へ配分される投資は、その残余として、 $I_2 = (1 - \beta)S$  となる。

ただし、両地域における初期の資本ストックは、所与とする。すなわち、

$$K_1(t_0) = K_1^0 > 0, \quad K_2(t_0) = K_2^0 > 0 \quad (4.9)$$

をみたすものとする。また、配分パラメーター  $\beta$  は、

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad (4.10)$$

をみたす範囲のなかから選択されるものとする。

最後に、この  $\beta$  を選ぶ場合の評価基準として、ラーマンは、将来のあらかじめ与えられた最終時点 ( $T$ ) における総所得 (すなわち、 $Y(T) = Y_1(T) + Y_2(T)$ ) を最大にすることを提案している。<sup>167)</sup> すなわち、計画主体にとって最大化すべき目的関数は、つぎのように示される。<sup>168)</sup>

$$Y(T) = b_1 K_1(T) + b_2 K_2(T) \quad (4.11)$$

かくして、地域間投資配分の問題を取り扱うラーマン・モデルは、つぎのように定式化される。

#### ラーマン・モデル (その1)

つぎの目的関数

$$\int_0^T \{b_1 \dot{K}_1(t) + b_2 \dot{K}_2(t)\} dt \quad (4.12)$$

を、以下の制約に従って最大にする配分パラメーター  $\beta(t)$ 、( $0 \leq t \leq T$ ) を求めよ。

$$\dot{K}_1(t) = \beta(t) \{g_1 K_1(t) + g_2 K_2(t)\} \quad (4.13)$$

$$\dot{K}_2(t) = (1 - \beta(t)) \{g_1 K_1(t) + g_2 K_2(t)\} \quad (4.14)$$

167) このような目的関数をもった問題は、一般に、“Final state problem” とよばれる。

168) もとより、目的関数は (4.11) に限らない。たとえば、いま  $c_i$ 、( $i=1,2$ ) を、計画主体によって各地域所得に付加されるウエイトとすれば、 $c_1 Y_1(T) + c_2 Y_2(T)$  を最大化するように配分パラメーター  $\beta$  を決定する問題として定式化することも可能であろう。ただし、この場合は、以下で展開される分析結果と全く同じ帰結をもたらすことになる。

$$K_i(0) = K_i^0 (> 0), \quad i=1,2 \tag{4.15}$$

$$0 \leq \beta(t) \leq 1 \tag{4.16}$$

まず、(4.12) の目的関数に注目しよう。この積分形の評価基準を最大化することは、最終時点 (T) における2地域全体の総所得、すなわち、(4.11) を最大化することと同じになることが、次式によって明らかとなる。

$$\begin{aligned} \text{Max } Y(T) &= \text{Max } \{b_1 K_1(T) + b_2 K_2(T)\} \\ &= \text{Max } \int_0^T \{b_1 \dot{K}_1(t) + b_2 \dot{K}_2(t)\} dt + C \end{aligned} \tag{4.17}$$

ただし、C は定数で、 $b_1 K_1(0) + b_2 K_2(0)$  とする。

したがって、(4.12) の被積分関数 (すなわち、 $b_1 \dot{K}_1(t) + b_2 \dot{K}_2(t)$ ) がタイプ1の問題における評価基準 (3.118) の関数  $f_0$  に対応することになる。

つぎに、各地域ごとの資本ストック (すなわち、 $K_1, K_2$ ) を状態変数と考えれば、(4.13) および (4.14) は、(3.119) に対応する状態方程式であると考えられる。<sup>169)</sup> また、初期時点における各地域別資本ストックは、(4.15) によって与えられており、したがって、これが、さきの初期条件、すなわち (3.120) に対応する。そして、最後に、(4.16) は、さきの制御制約 (3.122) に対応することがわかる。<sup>170)</sup> 以上のことから、われわれは、叙上のラーマン・モデルを、タイプ1の問題であるとみなすことができる。<sup>171)</sup>

169) したがって、状態空間  $E^n$  は、この場合、2次元空間  $E^2$  となる。

170) 制御領域  $U$  は、この場合、1次元の開区間  $[0, 1]$  となり、したがって  $E^m = E^1$  となる。

171) なお、Ⅲ章、第5節で示されたタイプ1の問題は、最小化問題として定式化されているが、これをつぎのようにして、本節でのラーマン・モデルのような最大化問題についても適用可能なように変換できる。すなわち、(3.118) について、

$$\text{Max } \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t)) dt \iff \text{Min } \int_{t_0}^{t_1} -f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

の関係が成立することから、被積分関数にマイナスの符号をつけることにより、最大化問題は最小化問題に変換される。その結果、[定理3] は、(a), (i) の条件、すなわち (3.124) のみが、 $\lambda_0(t) = \text{定数} \geq 0, t_0 \leq t \leq t_1$  と変更を受けるだけで、他の条件は、もとのままで成立する。

また、最終時刻  $t_1$  は、ラーマン・モデルにあっては、T で表わされ、所与と仮定される。

そこで、この問題に対して、〔定理3〕を適用してみよう。いま、 $\lambda_0 = 1$ とおき、<sup>172)</sup>(3.123)にしたがってハミルトニアン関数を構成すれば、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=0}^2 \lambda_i f_i \\ &= (b_1 \dot{K}_1 + b_2 \dot{K}_2) + \lambda_1 \dot{K}_1 + \lambda_2 \dot{K}_2 \\ &= (b_1 + \lambda_1) \dot{K} + (b_2 + \lambda_2) \dot{K}_2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

簡単化のため、

$$b_i + \lambda_i = p_i, \quad i=1,2 \quad (4.19)$$

とおき、(4.13)、(4.14)を(4.18)に代入すれば、

$$H = \{\beta p_1 + (1 - \beta) p_2\} (g_1 K_1 + g_2 K_2) \quad (4.20)$$

を得る。

また、ハミルトニアン関数の構成の際に導入された $\lambda_i$  ( $i=1,2$ )は、〔定理3〕の条件(a)、(ii)によって、つぎの随伴方程式の解でなければならない。

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial K_i} = -\{\beta p_1 + (1 - \beta) p_2\} g_i, \quad i=1,2 \quad (4.21)$$

他方、(4.19)の関係式で、 $b_i$  ( $i=1,2$ )が仮定により定数であることから、

$$\dot{\lambda}_i = \dot{p}_i, \quad i=1,2 \quad (4.22)$$

が成立する。したがって、新しく導入された補助変数 $p_i$  ( $i=1,2$ )は、つぎの常微分方程式(4.23)の解でなければならない。

$$\dot{p}_i = -\{\beta p_1 + (1 - \beta) p_2\} g_i, \quad i=1,2 \quad (4.23)$$

さらに、また、この補助変数 $p_i$  ( $i=1,2$ )は、〔定理3〕の条件(d)により、つぎに示す終端条件をみたさねばならない。すなわち、与えられた問題におい

172) 脚注171)、および $\lambda_i(t)$  (ただし、この場合、 $i=0,1,2$ )は線形同次の随伴方程式の解である結果、その1つが自由に選択できることに注意せよ。

て、最終時刻 ( $T$ ) における資本ストックの状態  $\theta^1$  は、前以って何ら指定されていないので、その状態が任意に変化する方向を示すベクトルとつねに直交する放線ベクトルの成分 (すなわち、 $\lambda_i(T)$ ,  $i=1,2$ ) は、ゼロでなければならないことになる。したがって、 $\lambda_i$ , ( $i=1,2$ ) に関する終端条件は、

$$\lambda_i(T) = 0, \quad i=1,2 \tag{4.24}$$

となる。これを新しい補助変数  $p_i$ , ( $i=1,2$ ) について書きかえれば、(4.19) より、

$$p_i(T) = b_i, \quad i=1,2 \tag{4.25}$$

を得る。

最後に、最適条件は、[定理3] の条件 (b) によって、つぎのように示される。

$$\text{Max}_{\beta \in (0,1)} H = \{\beta p_1 + (1 - \beta) p_2\} (g_1 K_1 + g_2 K_2) \tag{4.26}$$

すなわち、最大原理は、この場合、(4.20) で定義されたハミルトニアン関数  $H$  が最大となるように、制御変数  $\beta(t)$  を許容された制御領域  $[0, 1]$  のなかから選択すべきことを、われわれに教えている。<sup>173)</sup>

したがって、われわれは、最適条件として、つぎの帰結を得る。<sup>174)</sup>

$$\beta = \begin{cases} 1 & ; \text{ただし、} p_1 > p_2 \text{ の場合} \\ 0 & ; \text{ただし、} p_1 < p_2 \text{ の場合} \\ [0, 1] & ; \text{ただし、} p_1 = p_2 \text{ の場合} \end{cases} \tag{4.27}$$

つぎに、この最適条件を手がかりとして、ラーマン・モデルの最適解を吟味

173) すでに述べたとおり、[定理3] は、最適性の必要条件を与えるものである。しかし、ここでは、状態方程式 (4.13), (4.14) の右辺が  $\beta(t)$ ,  $K_1(t)$  および  $K_2(t)$  に関して線形である (したがって、凹関数である) ことから、最大原理が最適性の十分条件にもなっている。

174)  $p_i$ , ( $i=1,2$ ) は、 $i$  地域における投資の影の価格 (Shadow price) と解釈できる。したがって、最適条件 (4.27) は、投資についての影の価格がより高い地域に投資をすべしという命題を表わしている。

しておこう。いま、補助変数  $p_i, (i=1,2)$  に関する方程式 (4.23) とその終端条件 (4.25) とを合わせ用いることにより、つぎの方程式 (4.28) が導かれる。<sup>175)</sup>

$$p_1(t) = \frac{g_1}{g_2} p_2(t) + \frac{b_1 b_2}{g_2} (s_2 - s_1) \quad (4.28)$$

したがって、われわれが求める ラーマン・モデルの最適解は、(4.27) の最適条件により、地域別資本ストック  $K_i, (i=1,2)$  に対応する補助変数、すなわち、地域別投資の影の価格<sup>176)</sup>  $p_i, (i=1,2)$  の相対的大小関係によって規定される。ところが、この  $p_i, (i=1,2)$  の相対関係は、(4.28) によって拘束されている結果、(4.28) をみたす  $p_i, (i=1,2)$  の時間的態様 (すなわち、価格経路) に応じて、最適な投資配分パラメーター  $\beta^*(t)$  をきめる必要が生ずることになる。

そこで、まず、一般性を失なうことなく、つぎの仮定を導入する。<sup>177)</sup>

$$g_1 > g_2 \quad (4.29)$$

この仮定のもとで、便宜上、つぎの2つに場合を分類して、逐次、最適解の吟味を試みることにしよう。

#### 1. $s_1 < s_2$ の場合

第1地域の平均貯蓄性向  $s_1$  が、第2地域のそれ  $s_2$  よりも低い場合には、(4.29) の仮定により、第1地域の産出資本比率  $b_1$  は、第2地域のそれ  $b_2$

175) (4.23) に変数分離法を適用すれば、 $\dot{p}_1/g_1 = \dot{p}_2/g_2$  より、 $\int \frac{\dot{p}_1}{g_1} dt = \int \frac{\dot{p}_2}{g_2} dt + C$  (ただし、 $C$  は積分定数) を得る。したがって、 $p_1(t)/g_1 = p_2(t)/g_2 + C$  となり、積分定数  $C$  の値は、 $p_i, (i=1,2)$  に関する終端条件 (4.25) より、 $\frac{b_1 b_2}{g_1 g_2} (s_2 - s_1)$  として求まる。かくして、(4.28) が導出される。

なお、 $\beta(t)$  が最適値をとるとき、区間  $0 \leq t \leq T$  に対して、補助変数  $p_i(t), (i=1, 2)$  はつねに正となることが、(4.23) と (4.25) によって示される。

176) 補助変数  $p_i, (i=1,2)$  の経済学的解釈については、脚注174)、参照。

177) これは、(4.5) により、 $b_1 s_1 > b_2 s_2$  の成立を意味する。



よりも逆に高くなっている。いま、縦軸に  $p_1$ 、横軸に  $p_2$  をとって (4.28) をみたと、この場合の価格経路を示せば、つぎの図37のようなになる。

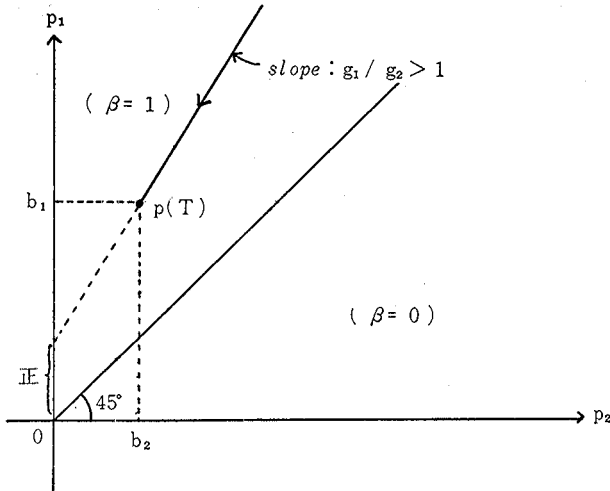


図37. 価格経路 ( $g_1 > g_2 : s_1 < s_2$  の場合)

ただし、この図において45度線をひけば、最適性の条件 (4.27) によって、配分パラメータ  $\beta(t)$  は、その線よりも上側の正領域では、つねに 1 をとり、それよりも下側の正領域では、つねに 0 をとることがわかる。<sup>178)</sup>

したがって、この場合、(4.28) のグラフは、仮定により、勾配が 1 よりも大きく、縦軸上の切片が正であることから、図37のように示される。その結果、任意の時刻  $t \in [0, T]$  について、 $\beta(t)$  は、つねに 1 であることが判明する。すなわち、当該 2 地域より生ずる総貯蓄をつねに第 1 地域のみ に投資配分すれば、最終時点 (T) における総所得  $Y(T)$  を最大にするという結論を得る。<sup>179)</sup>

178) なお、45度線上では、(4.27) より、 $\beta(t)$  は、閉区間  $[0, 1]$  に属する任意の値をとり得る。

179) なお、 $g_1 > g_2$  のもとでは、 $s_1 = s_2$  は、 $b_1 > b_2$  の成立を、また  $b_1 = b_2$  は、 $s_1 > s_2$  の成立を意味することから、そのいずれの場合についても  $\beta(t) = 1$  となり、ここでの結

2.  $s_1 > s_2$  の場合

つぎに、第1地域の平均貯蓄性向  $s_1$  が、第2地域のそれ  $s_2$  よりも高い場合について、解の性質を検討しよう。ただし、この場合には、(4.29)の仮定によって、第1地域の産出資本比率  $b_1$  が、第2地域のそれ  $b_2$  よりも高くなる場合と、逆に低くなる場合とがあり得ることに注意を要する。そこで、(4.28)をみたす  $p_1$ 、 $p_2$  のうち、とくにその両者を等しくする  $p_2$  の値を  $p_2^*$  として、この関係を図示すれば、つぎのようになる。<sup>180)</sup>

この図より明らかなように、もしも

$$b_1 > b_2 \quad (4.30)$$

ならば、 $p_2^*$  は  $b_2$  よりも左側に位置する（すなわち、 $p_2^* < b_2$  を意味する）ことになり、これとは逆に、

$$b_1 < b_2 \quad (4.31)$$

ならば、 $p_2^*$  は  $b_2$  よりも右側に位置する（すなわち、 $p_2^* > b_2$  を意味する）こととなる。<sup>181)</sup>

論は、そのまま妥当する。したがって、われわれは、つぎのように述べることができる。いま、両地域での平均貯蓄性向が同じであれば、資本の生産性のより高い地域に全額投資をした方が、最終時点での総所得を最大にする。これと同様に、両地域での産出資本比率が同じであれば、平均貯蓄性向のより高い地域に全額投資をした方が、最終時点での総所得を最大にする。

とくに、両地域において平均貯蓄性向  $s_i$  も、また産出資本比率  $b_i$  も全く差異がなければ（この場合、 $g_1 = g_2$  が成立する）、計画主体にとって、当該2地域は全く同等なものとなされる結果、地域の選択自体が意味をもたなくなる。すなわち、 $\beta(t) \in [0, 1]$  となる。しかしながら、この場合  $g_1 = g_2$  でも、 $s_1 < s_2$ （または、 $b_1 > b_2$ ）ならば  $\beta(t) = 1$  となり、 $s_1 > s_2$ （または、 $b_1 < b_2$ ）ならば、 $\beta(t) = 0$  となることに注意せよ。

180) いうまでもなく、 $b_1$ 、 $b_2$  の値の与え方次第で、 $p_2^*$  が実現する場合と実現しない場合とがありうる。すなわち、(4.28)をみたす価格経路が、図38の45度線に交叉する場合と交叉しない場合とに対応する。

181) (4.28)において、 $p_1 = p_2$  として、 $p_2^*$  の値を求めれば、 $p_2^* = \frac{s_1 - s_2}{g_1 - g_1} b_1 b_2$  となり、これは、 $g_1 > g_2$  および  $s_1 > s_2$  の仮定によって、つねに正である。さらに、この  $p_2^*$  を(4.5)の関係を用いて変形すれば、 $p_2^* = \frac{s_1 - s_2}{s_1 - (b_2/b_1)s_2} b_2$  となる。したがって、これより  $b_1 \geq b_2$  に応じて、 $p_2^* \leq b_2$  となることがわかる。

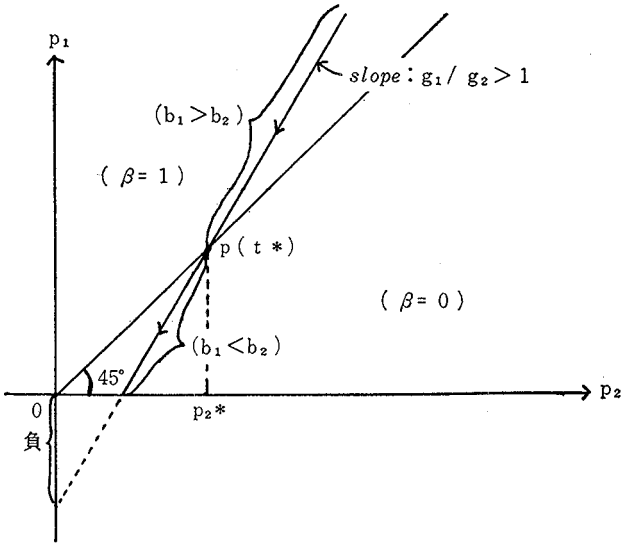


図38. 価格径路 ( $g_1 > g_2 : s_1 > s_2$  の場合)

そこで、この各々の場合について、考察を加えることにしよう。

(a)  $b_1 > b_2$  の場合

第1地域の出産資本比率  $b_1$  が、第2地域のそれ  $b_2$  よりも高い場合には、最終時点(T)における価格の状態  $p(T)$ が、45度線よりも上側の正領域に属することになる。したがって、第1地域への投資に対する影の価格  $p_1$  は、第2地域へのそれ  $p_2$  よりもつねに高くなり、その結果、最適性の条件(4.27)によって、配分パラメータ  $\beta(t)$  は、つねに1をとることが判明する。

図39は、この状況を示している。すなわち、つねに第1地域のみにも全額投資配分すべきであるとする、この場合の結論は、容易に肯定されるであろう。なぜなら、第1地域は、第2地域よりも相対的に高い、平均貯蓄性向と出資資本比率を有しているからである。

(b)  $b_1 < b_2$  の場合

つぎに、第1地域の出産資本比率  $b_1$  が、第2地域のそれ  $b_2$  よりも低い場合を、検討することにしよう。

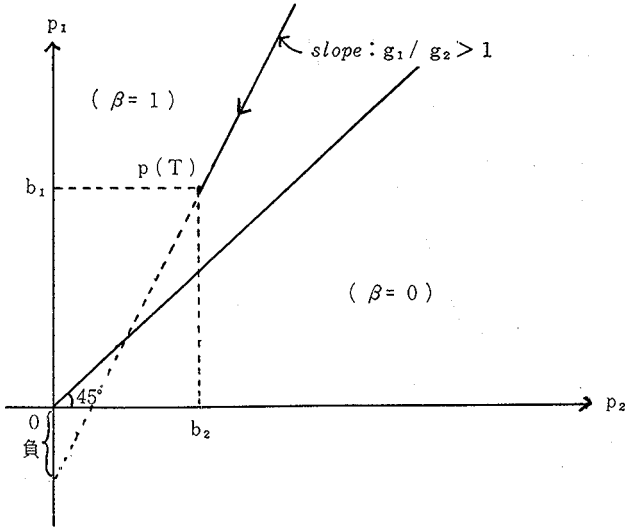


図39. 価格径路 ( $g_1 > g_2 : s_1 > s_2, b_1 > b_2$  の場合)

いま、 $p_2(t)$  が  $p_2^*$  の値をとるときの時刻を  $t^*$  で表わすことにする。この場合、 $p_1(t)$  と  $p_2(t)$  は、(4.23) によって、いずれも時刻  $t$  の単調減少関数であることがわかる。したがって、時刻  $t^*$  は一意的にきめられる。そこで、初期時点  $t_0$  が、この  $t^*$  よりも大きい場合と小さい場合とに分けて、それぞれの場合について、最適解を吟味しておこう。

(b-1)  $t_0 < t^*$  の場合<sup>182)</sup>

この場合の最適投資配分は、つぎのようになる。

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & ; \text{ただし, } t \in [0, t^*) \text{ のとき} \\ 0 & ; \text{ただし, } t \in (t^*, T] \text{ のとき} \\ [0, 1] & ; \text{ただし, } t = t^* \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.32)$$

すなわち、 $t = t^*$  の点で  $\beta(t) = 1$  から  $\beta(t) = 0$  への“切換え” (Switch) が

182) 以下において、われわれは、簡単化のため、 $t_0 = 0$  を仮定している。

生ずることになる。<sup>183)</sup> つぎの図40は、この関係を示している。

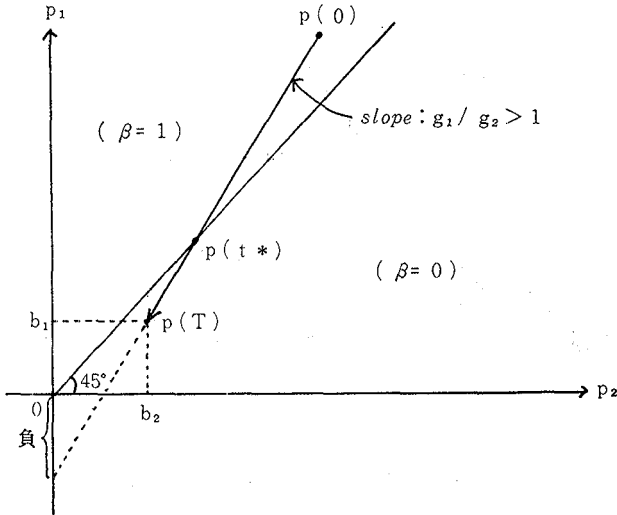


図40. 価格経路 ( $g_1 > g_2 : s_1 > s_2, b_1 < b_2, t_0 < t^*$  の場合)

(b-2)  $t_0 > t^*$  の場合<sup>184)</sup>

この場合には、最適投資配分の切換えはなく、 $\beta(t)$  はつねにゼロの値をとることになる。図41は、この関係を示している。

以上において、われわれは、投資の地域間配分を問題とするラーマン・モデルをとりあげ、その最適解の理論分析を試みてきた。そのなかでも、とくに注目すべき帰結は、ある状況（すなわち、第1地域の平均貯蓄性向と産出資本比率との積は、第2地域のそれよりも大きい、産出資本比率のみについては、第1地域の方が、第2地域よりも低い場合）のもとでは、ある時刻  $t=t^*$  を境

183) とくに、このような場合（すなわち、 $\beta(t)$  が制御領域の極端なケース、つまり0または1をとる場合）を、“Bang-bang” 制御であるという。[A]3, p.54, 参照。

184) とくに、 $k_1=k_2$  のとき  $\beta(t)=0$  と定義すれば、これを  $t_0 \geq t^*$  の場合と規定しても、以下の結論は、そのまま妥当する。

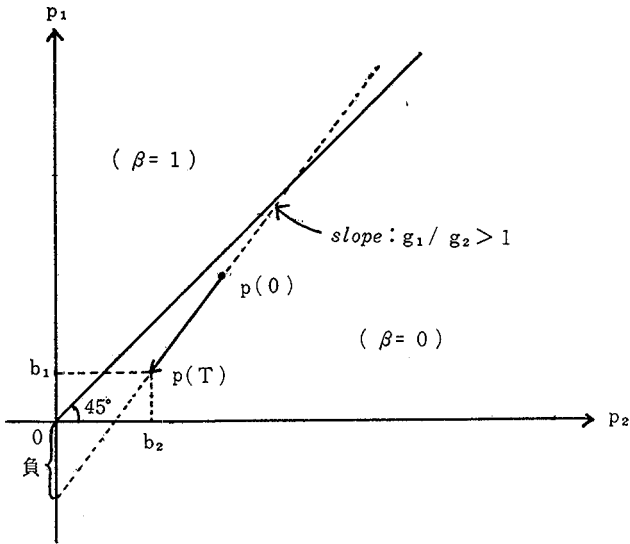


図41. 価格径路 ( $g_1 > g_2 : s_1 > s_2, b_1 < b_2, T < t^*$  の場合)

として、投資配分に関して、 $\beta(t) = 1$ から、 $\beta(t) = 0$ への、いわゆる“切換え”現象が生ずるといふ点に求められる。

このような帰結をもたらす理論的根拠は、つぎのとおりである。すなわち、与えられた状況のもとでは、第1地域の平均貯蓄性向が第2地域のそれよりもつねに大きくなっている。<sup>185)</sup>したがって、最終時点での総所得  $Y(T)$  を最大にするため、まず第1局面では、迂回したかたちで  $Y(T)$  を高めるべく、貯蓄のより大きい第1地域へ投資を全額配分し、つぎに第2局面では、生産に対する直接的な効果をねらって、投資の生産性がより高い第2地域へ投資を全額配分するという提言が生ずることになる。

なお、この場合に注意を要することは、 $T - t^*$  を固定しておいて、計画期間  $T$  を長くすればするほど、叙上の第2局面での効果は、相対的に漸次小さくなるという点である。なぜなら、 $p_1(t^*) = p_2(t^*)$  とおき、(4.23)、(4.25)、およ

185) すなわち、 $g_1 > g_2, b_1 < b_2$  の場合には、つねに  $s_1 > s_2$  となる。(4.5)、参照。

び (4.28) を用いて、切換え時刻  $t^*$  を求めれば、

$$t^* = T - \frac{1}{g_2} \log \left( \frac{s_1 - s_2}{g_1 - g_2} b_1 \right) \tag{4.33}$$

となり、さらに、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{t^*}{T} = 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{const}}{T} = 1 \tag{4.34}$$

となるからである。

§2. ラーマン・モデル (その2)

つぎに、評価基準がかわれば、それに応じて最適解もまた変更を余儀なくされることを明らかにしておこう。そのために、前節で用いた目的関数 (4.12) とはやや異なった、新しい目的関数をラーマン・モデルに導入し、その場合に得られる最適解の性質を、以下で吟味することにしよう。<sup>186)</sup>

いま、計画期間の全体にわたって、1人当たり消費量を最大にすることを考える。すなわち、2地域全体の消費水準を  $C$ 、人口を  $P$  とすれば、

$$C = (1 - s_1) b_1 K_1 + (1 - s_2) b_2 K_2 \tag{4.35}$$

となり、<sup>187)</sup> したがって、計画全体について1人当たり消費量を最大にするというわれわれの目的関数は、つぎのように示される。

$$\int_0^T \frac{C}{P} dt = \int_0^T \frac{1}{P} \{ (1 - s_1) b_1 K_1 + (1 - s_2) b_2 K_2 \} dt \tag{4.36}$$

さらに、人口  $P$  の成長率を  $n$  とし、<sup>188)</sup> また将来時点での消費水準  $C$  の現

186) 本節で、われわれが用いる目的関数は、イントリグイターによって最初に導入されたものである。[K] b, 2, 参照。なお、最終時点で「切換え」が生ずるといふ彼の結論は、ラーマンの当初の帰結と直ちになじむものではなく、この点を究明したのが、前節でとりあげた高山氏による理論分析である。[K] b, 3, 参照。

187) 本章、第1節、(4.2), および (4.11), 参照。

188) すなわち、初期時点での人口を  $P(0) = P_0$  とすれば、時刻  $t$  における人口  $P(t)$  は、 $P_0 e^{nt}$  として表わされる。

在割引率を  $\rho$  とすれば、さきの目的関数 (4.36) は、つぎのように変形される。

$$\int_0^T \frac{1}{P_0} e^{-(\rho+n)t} \{ (1-s_1)b_1K_1 + (1-s_2)b_2K_2 \} dt \quad (4.37)$$

ここで、簡単化のため、

$$w = \rho + n > 0 \quad (4.38)$$

とおき、

$$\rho \geq 0 \quad (4.39)$$

を仮定しよう。

このとき、新しい目的関数 (4.37) を最大にするラーマン・モデルは、つぎのように定式化できる。<sup>189)</sup>

#### ラーマン・モデル (その2)

つぎの目的関数

$$\int_0^T e^{-wt} \{ (1-s_1)b_1K_1 + (1-s_2)b_2K_2 \} dt \quad (4.40)$$

を、以下の制約に従って最大にする配分パラメータ  $\beta(t)$ , ( $0 \leq t \leq T$ ) を求めよ。

$$\dot{K}_1(t) = \beta(t) \{ g_1K_1(t) + g_2K_2(t) \} \quad (4.41)$$

$$\dot{K}_2(t) = (1-\beta(t)) \{ g_1K_1(t) + g_2K_2(t) \} \quad (4.42)$$

$$K_i(0) = K_i^0 (> 0), \quad i=1,2 \quad (4.43)$$

$$0 \leq \beta(t) \leq 1 \quad (4.44)$$

そこで、前と同様に、 $\lambda_0 = 1$  とおき、(3.123) にしたがって、ハミルトニアン

189)  $P_0$  が所与であることにより、(4.37) を最大にすることは、(4.40) を最大にすることと同じ結果をもたらす。なお、ここでの制約条件 (4.41) ~ (4.44) は、前節でのラーマン・モデル (その1) の制約条件 (4.13) ~ (4.16) と全く同じものである。



関数を構成すれば、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=0}^2 \lambda_i f_i \\
 &= e^{-\omega t} \{ (1-s_1)b_1K_1 + (1-s_2)b_2K_2 \} + \lambda_1 \dot{K}_1 + \lambda_2 \dot{K}_2 \\
 &= e^{-\omega t} (b_1K_1 + b_2K_2) + \{ \beta(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2 - e^{-\omega t} \} (g_1K_1 + g_2K_2)
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

つぎに、

$$\lambda_i = p_i, \quad i=1,2 \tag{4.46}$$

とおき、これを (4.45) に代入すれば、次式を得る。

$$H = e^{-\omega t} (b_1K_1 + b_2K_2) + \{ \beta(p_1 - p_2) + p_2 - e^{-\omega t} \} (g_1K_1 + g_2K_2) \tag{4.47}$$

ここで、新しく導入された補助変数  $p_i, (i=1,2)$  は、[定理3] の条件 (a), (ii) により、つぎの随伴方程式をみたさなければならない。

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial K_i} = -e^{-\omega t} b_i - \{ \beta(p_1 - p_2) + p_2 - e^{-\omega t} \} g_i, \quad i=1,2 \tag{4.48}$$

さらに、また [定理3] の条件 (d) に対応する、この補助変数  $p_i, (i=1,2)$  の終端条件は、

$$p_i(T) = 0, \quad i=1,2 \tag{4.49}$$

となる。<sup>190)</sup>

したがって、最適条件は、[定理3] の条件 (b) により、つぎのように示される。

$$\begin{aligned}
 \text{Max}_{\beta \in (0,1)} H &= e^{-\omega t} (b_1K_1 + b_2K_2) \\
 &\quad + \{ \beta(p_1 - p_2) + p_2 - e^{-\omega t} \} (g_1K_1 + g_2K_2)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

190) (4.48) と (4.49) との関係により、 $\beta(t)$  が最適値をとる場合には、 $p_1(t)$  および  $p_2(t)$  は、与えられた区間  $0 \leq t \leq T$  に対して、つねに正であることが示される。

これより、われわれは、つぎの帰結を得る。<sup>191)</sup>

$$\beta = \begin{cases} 1 & ; \text{ただし, } p_1 > p_2 \text{ の場合} \\ 0 & ; \text{ただし, } p_1 < p_2 \text{ の場合} \\ \{0, 1\} & ; \text{ただし, } p_1 = p_2 \text{ の場合} \end{cases} \quad (4.51)$$

前と同様に、この最適条件 (4.51) を手がかりとして、当該問題の最適解に対する理論分析を、つぎに与えておくことにしよう。補助変数  $p_i$ , ( $i=1,2$ ) に関する方程式 (4.48) とその終端条件 (4.49) とを合わせ用いることにより、われわれは、つぎの方程式 (4.52) を導くことができる。<sup>192)</sup>

$$p_1(t) - p_2(t) = \frac{g_1 - g_2}{g_2} p_2(t) + \frac{b_1}{ws_2} (e^{-wt} - e^{-wT}) (s_2 - s_1) \quad (4.52)$$

さらに、(4.5) を用いて、これを変形すれば、

$$p_1(t) = \frac{g_1}{g_2} p_2(t) + \frac{b_1}{ws_2} (e^{-wt} - e^{-wT}) (s_2 - s_1) \quad (4.53)$$

となる。<sup>193)</sup>

そこで、前との比較を容易にするべく、つぎの仮定

$$g_1 > g_2 \quad (4.54)$$

を導入しよう。<sup>194)</sup>

#### 1. $s_1 < s_2$ の場合

第1地域の平均貯蓄性向  $s_1$  が、第2地域のそれ  $s_2$  よりも低い場合には、

191) ハミルトニアン関数 (4.47) が、 $p_1$ ,  $p_2$  に関して線形であることに注意せよ。なお、得られた帰結 (4.51) は、さきの (4.27) と同じ条件を与えることになっている。

192) この式の導出に関して、高山氏は誤りを犯している。[K] b, 3, p.335 の (17), 参照。

193) いうまでもなく、 $t \leq T$  より、 $e^{-wt} \geq e^{-wT}$  となっている。

194) (4.29), および脚注 177), 参照。

(4.52) によって,

$$p_1(t) > p_2(t), \quad t \in [0, T] \tag{4.55}$$

となっている。したがって、この場合には、最適性の条件 (4.51) によって、任意の時刻  $t \in [0, T]$  における  $\beta(t)$  は、つねに 1 であることが判明する。しかしながら、この場合の価格径路は、図42に示されるように、[定理3]の条件 (d) に対応する終端条件 (4.49) をみたさないことがわかる。<sup>195)</sup> それゆえ、 $g_1 > g_2$  と  $s_1 < s_2$  のもとで最適解が存在すると仮定した、その仮定自体が誤りであることになる。<sup>196)</sup>

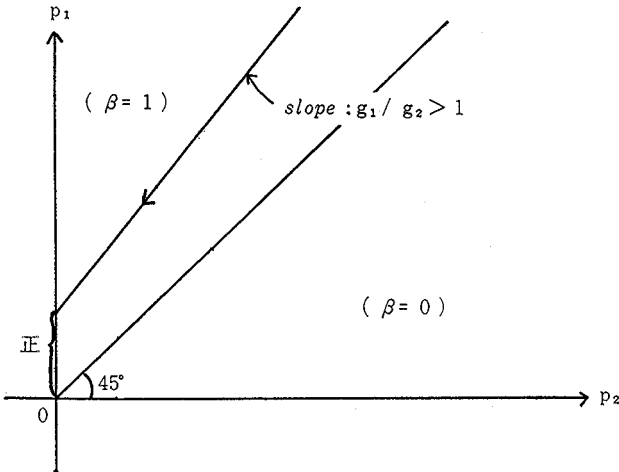


図42. 終端条件をみたさない価格径路 (その1)

2.  $s_1 > s_2$  の場合

つぎに、第1地域の平均貯蓄性向  $s_1$  が、第2地域のそれ  $s_2$  よりも高い場合について考えてみよう。この場合の価格径路は、(4.53) より、つぎの図

195) (4.49), および脚注 190), 参照。

196) [定理3] は、最適トラジェクトリーの存在を保証するものではないことに注意せよ。

43のように示される。なぜなら、この価格径路を含む直線の勾配は、(4.54)の仮定によって1よりも大きく、また縦軸上の切片は、 $s_1 > s_2$ の仮定によって負となるからである。

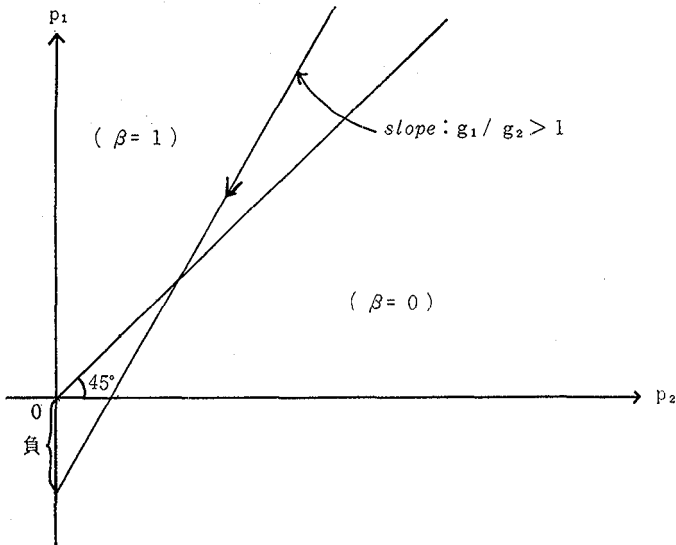


図43. 終端条件をみたさない価格径路 (その2)

しかしながら、この場合にも、[定理3]の条件(d)に対応する終端条件(4.49)が満たされていないことが、図43によって明らかとなる。それゆえ、 $g_1 > g_2$ と $s_1 > s_2$ のもとで、最適解があるものとして分析した、その仮定自体が誤りであることになる。

したがって、(4.54)の仮定のもとで、残されているのは、第1地域と第2地域の平均貯蓄性向がともに等しい場合(すなわち、 $s_1 = s_2$ )にかぎられる。

### 3. $s_1 = s_2$ の場合

この場合には、(4.54)によって、第1地域の産出資本比率  $b_1$  は、つねに第2地域のそれ  $b_2$  よりも大きくなっているはずである。そこで、(4.53)と上記の仮定をふまえて、この場合の価格径路を図示すれば、つぎの図44のように示される。

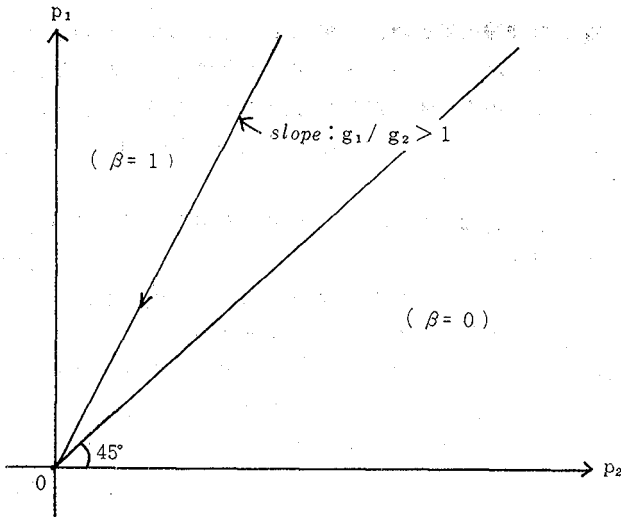


図44. 終端条件  $p_i(T) = 0, (i=1,2)$  をみたす価格経路

したがって、この場合は、終端条件 (4.45) をみたしており、最適政策は (4.51) によって、つねに  $\beta(t)$  を 1 とするものとなる。すなわち、当該 2 地域より生ずる総貯蓄をつねに第 1 地域のみ投資配分すれば、計画期間全体にわたっての 1 人当たり消費量を最大にするという結論を得る。<sup>197)</sup>

以上において、われわれは、当初のラーマン・モデルをもとにして、その目的関数のみに変更を加えた場合における、最適解の性質を吟味してきた。そこで得られた理論的帰結は、当該 2 地域での平均貯蓄性向が等しい場合にかぎり、産出資本比率の相対的に大きい地域に全額投資をすべきであるとするものであった。したがって、(4.40) を目的関数とするラーマン・モデルにあっては、つねに第 1 地域にのみ全額投資をすべしという命題のみが導かれることになり、これは、前節で検討した (4.12) を目的関数とするラーマン・モデルの場合に生ずる“切換え”現象の可能性を否定する結果となっている。<sup>198)</sup>

197) 将来時点での消費は、 $\rho$  で割引かれていることに注意せよ。

198) 前節で明らかにしたように、いわゆる“切換え”の可能性が生ずるのは、 $s_1 > s_2$  と  $b_1 < b_2$  が同時に成立する（したがって、 $s_1/b_1 > s_2/b_2$  が成立する）場合にかぎられる。

もとより、叙上の理論的帰結は、大胆に単純化された仮定のもとで導出されたものである。たとえば、ラーマン・モデルに関するいずれの定式化にあっても、資本ストック  $K_i$  のみが唯一の稀少資源であると考えられており、しかもその生産性を表わす地域別産出資本比率  $b_i$  は、時間を通じて不変であると想定されている。

しかし、一層重要な問題として、このモデルの現実妥当性に関するつぎの2点を、あらためて問いただしてみる必要があるであろう。まず、その第1の点は、産出資本比率  $b_i$  が不変であるとするわれわれの仮定が、はたして許されるかどうかという設問である。なぜなら、収穫逓減の法則が作用する状況下では、資本蓄積の進行とともに、産出資本比率の値が通常低下するからである。つぎに、その第2の点は、特定の1地域のみに全額投資配分すべしとするわれわれの最適政策が、はたしていかなる意味を含んでいるかという設問である。

このうち、第1の点については、つぎのようなコメントが可能である。すなわち、産出資本比率を不変に保つことができるほど十分に利用可能な労働力が存在する経済を考えれば、モデルの現実妥当性はいささかも失なわれないとする主張である。しかし、この主張の成立根拠として、労働力の供給が資本と同じ比率で増加しなければならないような経済を想定しており、したがって完全雇用経済の場合には、むしろ不可能に近い。さらに、また、労働力の供給になんらの制約もないような経済を想定したとしても、総雇用労働力を決定し、しかも地域別産出資本比率が不変に保たれるようにそれを各地域に配分するようなメカニズムを頭に描くことは、決して容易なことではない。

つぎに、第2の点を補足すれば、つぎのようになる。すなわち、いま、第1地域の所得は増加傾向にあるが、第2地域の所得は沈滞傾向にある場合には、当然、第2地域から第1地域への労働力の移動が行なわれることになるであろう。しかしながら、この労働力の移動を阻止するメカニズムが、はたして存在するの否か、全く不明のままである。また、労働力の地域間移動が生じたとしても、それが各地域ごとの産出資本比率ならびに平均貯蓄性向に対してどのような効果を及ぼすかについては、なんら明らかにされていないのである。

ここに、ラーマン・モデルの改良が強く望まれる所以がある。次節では、その方向に沿った1つの例示を与えることにしよう。

§3. ラーマン・モデル (その3)

ここでは、地域開発において規模の経済 (Scale economy) のもつ意味を分析するため、ラーマン・モデルの生産関数 (4.1) については、これを一般化し、平均貯蓄性向 (4.2) については、これを単純化した、つぎのモデルを考察する。<sup>199)</sup>

ラーマン・モデル (その3)

つぎの目的関数

$$Y_1(T) + Y_2(T) \tag{4.55}$$

を、以下の制約に従って最大にする 配分パラメーター  $\beta(t)$ , ( $0 \leq t \leq T$ ) を求めよ。

$$\dot{K}_1(t) = \beta(t)s\{(Y_1(t) + Y_2(t))\} \tag{4.56}$$

$$\dot{K}_2(t) = (1 - \beta(t))s\{(Y_1(t) + Y_2(t))\} \tag{4.57}$$

$$Y_i(t) = F(K_i(t)), \quad i=1,2 \tag{4.58}$$

$$K_i(0) = K_i^0 (> 0), \quad i=1,2 \tag{4.59}$$

$$0 \leq \beta(t) \leq 1 \tag{4.60}$$

まず、注意を要することは、当初のラーマン・モデルにおける生産関数 (4.1) が、ここでは、(4.58) として一般化されている点にある。ただし、この生産関数は、任意の時刻  $t \in [0, T]$  に関して、つぎに示す2つの仮定

$$F(K(t)) > 0 \tag{4.67}$$

$$F'(K(t)) = dF(K(t))/dK(t) > 0 \tag{4.68}$$

をみたすものとする。<sup>200)</sup>

199) 本節でのモデルは、藤田氏担当のクラスにおける演習問題として、最初に提起されたものである。その意味で、これを、「ラーマン・モデル」とよぶよりも、「藤田モデル」とよぶべきであろうが、これまでとの関連で、標題のように、ラーマン・モデル (その3) としてまとめることにした。

200) (4.67) の仮定は、資本の投下によって生ずる生産物が、つねに正であることを意味しており、また (4.68) の仮定は、資本の限界生産力が、つねに正であることを意味している。

しかし、当初のラーマン・モデルにおける地域別平均貯蓄性向  $s_1$ 、および  $s_2$  については、これらを全く同じものとみなす単純化によって、ここでは、これが共通の記号  $s$  で表わされている。<sup>201)</sup> けだし、ここでの分析の主眼は、生産関数の差異にもとづく最適解の吟味に求められるからである。

そこで、上記の問題の一般解を、生産関数の差異に応じて、つぎの4つの場合に分類してそれぞれ求め、かつ検討を加えることにしよう。

まず、第1の場合は、規模に関して収穫逓増が作用する場合である。すなわち、任意の  $K^1, K^2$  に関して、

$$K^1 > K^2 \Leftrightarrow F'(K^1) > F'(K^2) \quad (4.69)$$

が成立する場合が、これに当る。このとき、生産関数は、図45のように示される。

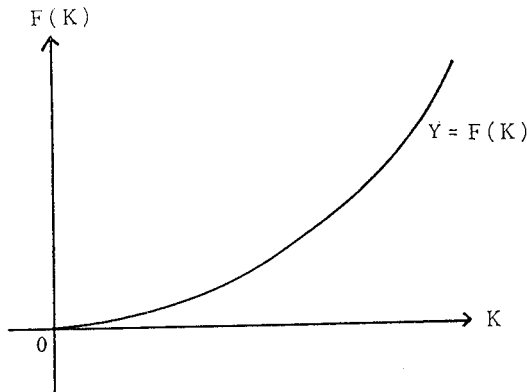


図45. 規模に関して収穫逓増の生産関数

つぎに、第2の場合は、規模に関して収穫不変が作用する場合である。すなわち、この場合、資本の限界生産力は、つねに一定値をとることになる。したがって、次式が成立する。

$$F'(K) \equiv \alpha \quad (4.70)$$

201) すなわち、 $s_1 = s_2 \equiv s > 0$  を意味する。



図46は、この場合の生産関数を示したものである。

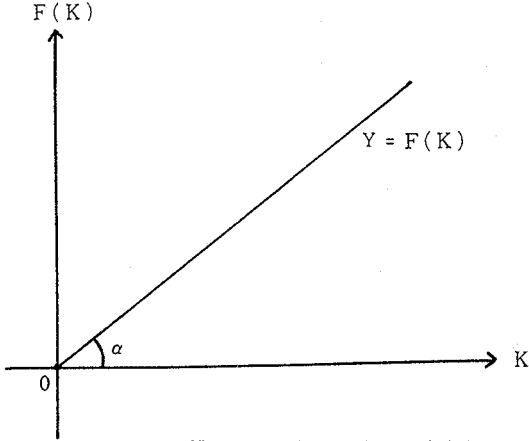


図46. 規模に関して収穫不変の生産関数

第3の場合は、規模に関して収穫逓減が作用する場合である。すなわち、任意の  $K^1, K^2$  に関して、

$$K^1 > K^2 \Leftrightarrow F'(K^1) < F'(K^2) \tag{4.71}$$

が成立する場合であり、このときの生産関数は、図47のように示される。

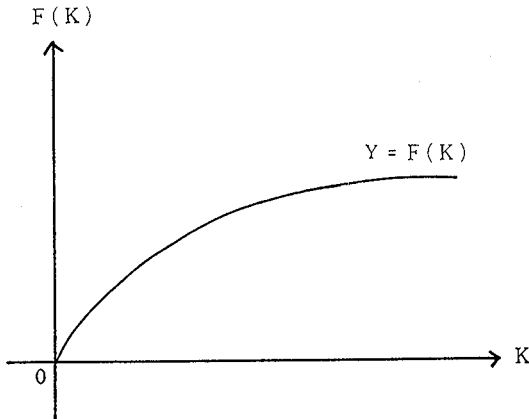


図47. 規模に関して収穫逓減の生産関数

最後に、第4の場合には、規模に関して収穫が可変的に作用する場合である。すなわち、 $K^*( > 0 )$  において与えられた生産関数に変曲点をもつと仮定すれば、この  $K^*$  よりも大きい任意の  $K^1, K^2$  に関しては、

$$K^1 > K^2 (\geq K^*) \Rightarrow F'(K^1) < F'(K^2) \tag{4.72}$$

が成立し、またこれとは逆に、 $K^*$  よりも小さい任意の  $K^1, K^2$  に関しては、

$$(K^* \geq) K^1 > K^2 \Rightarrow F'(K^1) > F'(K^2) \tag{4.73}$$

が成立する場合である。図48は、この場合の生産関数を示している。

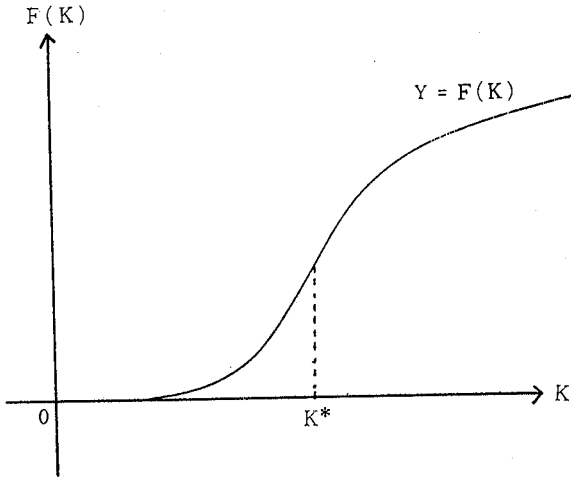


図48. 規模に関して収穫が可変的に作用する生産関数

そこで、まず (4.55) の目的関数に注目しよう。これを [定理3] の適用が可能となるように、積分形の評価基準に変換すれば、つぎの関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \text{Max} \{Y_1(T) + Y_2(T)\} \\ & = \text{Max} \{F(K_1(t)) + F(K_2(t))\} \\ & = \text{Max} \int_0^T \{F'(K_1) \cdot \dot{K}_1 + F'(K_2) \cdot \dot{K}_2\} dt + C \end{aligned} \tag{4.74}$$

ただし、 $C$  は積分定数で、 $F(K_1(0)) + F(K_2(0))$  とする。

したがって、(4.74) の被積分関数が、タイプ1の問題における評価基準 (3.118) の関数  $f_0$  に対応することになる。<sup>202)</sup>

つぎに、状態変数を資本ストック  $K_i, (i=1,2)$  のみに限定して、 $\lambda_0=1$  とおき、(3.123) にしたがってハミルトニアン関数を構成すれば、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=0}^2 \lambda_i f_i \\ &= \{F'(K_1) \cdot \dot{K}_1 + F'(K_2) \cdot \dot{K}_2\} + \lambda_1 \dot{K}_1 + \lambda_2 \dot{K}_2 \\ &= [\{F'(K_1) + \lambda_1\} \beta + \{F'(K_2) + \lambda_2\} (1 - \beta)] s \{F(K_1) + F(K_2)\} \end{aligned} \quad (4.75)$$

そこで、簡単化のため、

$$F'(K_i) + \lambda_i = p_i, \quad i=1,2 \quad (4.76)$$

とおき、これを (4.75) に代入すれば、次式を得る。

$$H = \{\beta p_1 + (1 - \beta) p_2\} s \{F(K_1) + F(K_2)\} \quad (4.77)$$

また、[定理3] の条件 (a), (ii) により、 $\lambda_i, (i=1,2)$  は、つぎに示す随伴方程式をみたさねばならないことから、

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H}{\partial K_i} \\ &= -\{F''(K_i) \cdot \dot{K}_i + \{\beta p_1 + (1 - \beta) p_2\} s F'(K_i)\}, \\ & \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (4.78)$$

を得る。

他方、(4.76) より、

$$\dot{p}_i = F''(K_i) \cdot \dot{K}_i + \dot{\lambda}_i, \quad i=1,2 \quad (4.79)$$

が成立する。したがって、新しく導入された補助変数  $p_i, (i=1,2)$  は、(4.78)

202) Ⅲ章、第5節、(3.118)、参照。

を考慮することによって、つぎに示す常微分方程式 (4.80) の解となる。

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= F''(K_i) \cdot \dot{K}_i + \dot{\lambda}_i \\ &= \{\beta p_1 + (1-\beta)p_2\} s F'(K_i), \quad i=1,2\end{aligned}\quad (4.80)$$

さらに、[定理3] の条件 (d) に対応する終端条件は、

$$\lambda_i(T) = 0, \quad i=1,2 \quad (4.81)$$

となる。これを新しい補助変数  $p_i, (i=1,2)$  について書きかえれば、(4.76) より

$$p_i(T) = F'(K_i(T)), \quad i=1,2 \quad (4.82)$$

を得る。

最後に、最適条件は、[定理3] の条件 (b) により、つぎのように示される。

$$\text{Max}_{\beta \in (0,1)} H = \{ \{\beta p_1 + (1-\beta)p_2\} s \{F(K_1) + F(K_2)\} \} \quad (4.83)$$

これより、われわれは、つぎの帰結を得る。<sup>203)</sup>

$$\beta = \begin{cases} 1 & ; \text{ただし, } p_1 > p_2 \text{ の場合} \\ 0 & ; \text{ただし, } p_1 < p_2 \text{ の場合} \\ [0, 1] & ; \text{ただし, } p_1 = p_2 \text{ の場合} \end{cases} \quad (4.84)$$

以上をまとめれば、つぎのようになる。まず、状態変数  $K_i, (i=1,2)$  は、つぎの状態方程式、

$$\left. \begin{aligned}\dot{K}_1 &= \beta s \{F(K_1) + F(K_2)\} \\ \dot{K}_2 &= (1-\beta) s \{F(K_1) + F(K_2)\}\end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

をみたまものとする。ただし、この状態変数に関しては、つぎの初期条件、

$$\left. \begin{aligned}K_1(0) &= K_1^0 (> 0) \\ K_2(0) &= K_2^0 (> 0)\end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

203) 形式的にみれば、(4.27)、(4.51)、および (4.84) は、いずれも同じ条件を与えることになっている。

が与えられている。

また、補助変数  $p_i, (i=1,2)$  は、つぎの随伴方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1 &= \{\beta p_1 + (1-\beta)p_2\} sF'(K_1) \\ \dot{p}_2 &= \{\beta p_1 + (1-\beta)p_2\} sF'(K_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.87)$$

をみたすものとする。ただし、この補助変数に関しては、つぎの終端条件

$$\left. \begin{aligned} p_1(T) &= F'(K_1(T)) \\ p_2(T) &= F'(K_2(T)) \end{aligned} \right\} \quad (4.88)$$

が与えられている。

かかる制約条件のもとで、(4.84) が、いわゆる最適性の条件を与えることになる。

最後に、この最適条件 (4.84) を手がかりとして、生産関数の差異に応じて分類された上記4つの場合について、それぞれ最適解の性質を吟味すれば、つぎのようにまとめられる。<sup>204)</sup>

1. 規模に関して収穫逓増の場合

この場合における資本径路、および価格径路は、図49、および図50のようにまとめられる。

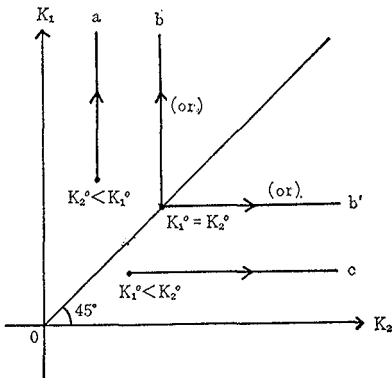


図49. 資本径路 (規模に関して収穫逓増の場合)

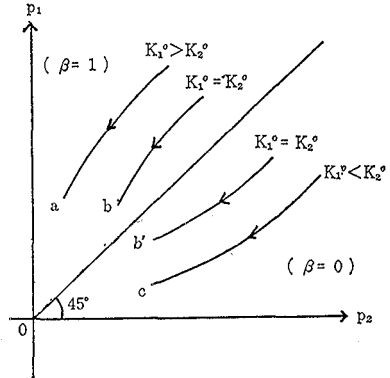


図50. 価格径路 (規模に関して収穫逓増の場合)

204) とくに、以下の分析では、(4.87) より導出される、つぎの式

したがって、この場合、投資はつねに先進地域のみ配分され、両地域の差は、ますます拡大される。すなわち、空間における活動の集中が惹起されることになる。

2. 規模に関して収穫不変の場合

この場合における資本径路、および価格径路は、図51、および図52のようにまとめられる。

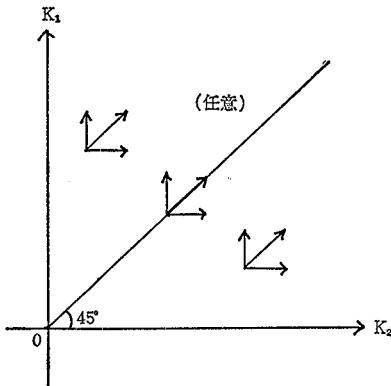


図51. 資本径路（規模に関して収穫不変の場合）

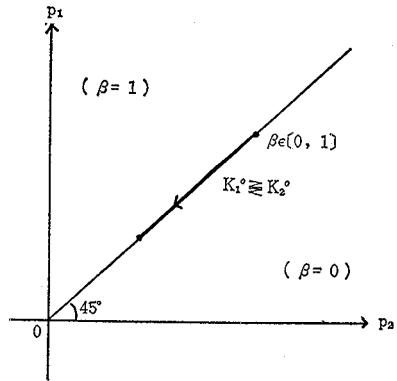


図52. 価格径路（規模に関して収穫不変の場合）

したがって、規模に関して収穫不変の場合には、活動の集積に対して、いかなる影響も及ぼさないことになる。

3. 規模に関して収穫逓減の場合

この影響における資本径路、および価格径路は、図53、および図54のようにまとめられる。

$$\dot{p}_2/\dot{p}_1 = F'(K_2)/F'(K_1)$$

したがって、

$$dp_2/dp_1 = F'(K_2)/F'(K_1)$$

および、(4.88)より導出される、つぎの式

$$p_2(T)/p_1(T) = F'(K_2(T))/F'(K_1(T))$$

の変化に注目する必要がある。

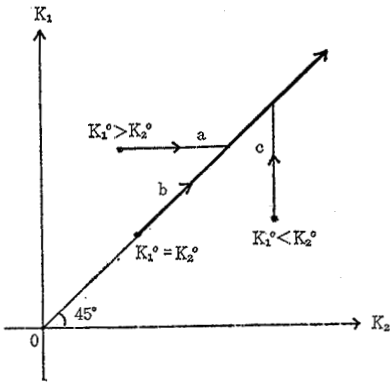


図53. 資本径路 (規模に関して収穫逓減の場合)

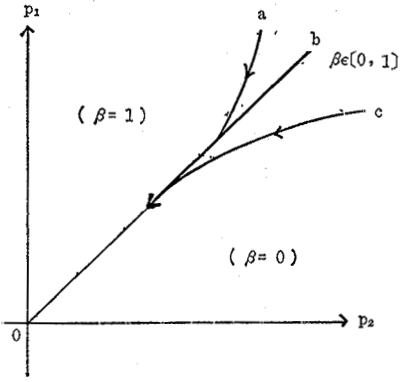


図54. 価格径路 (規模に関して収穫逓減の場合)

この場合、投資は、地域間の格差がなくなるまで、つねに後進地域に配分される。したがって、空間における活動の分散が惹起されることになる。

4. 規模に関して収穫可変の場合

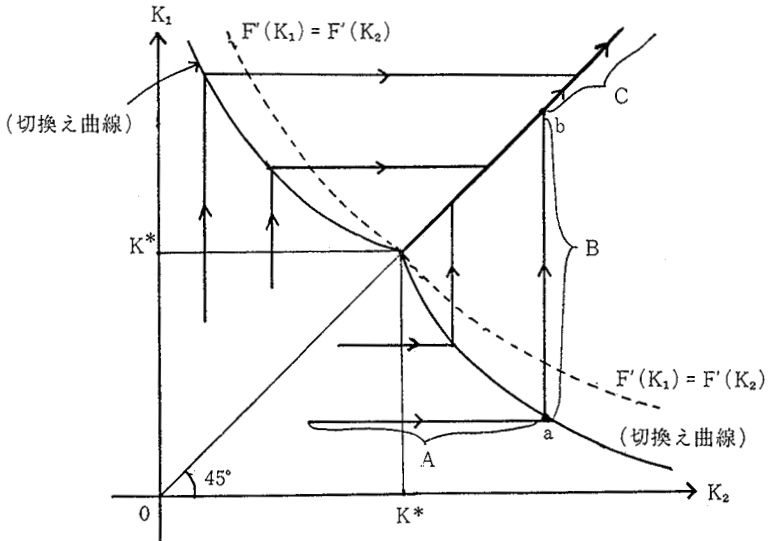


図55. 資本径路 (規模に関して収穫可変の場合)

この場合における資本径路、および価格径路は、図55、および図56のようにまとめられる。

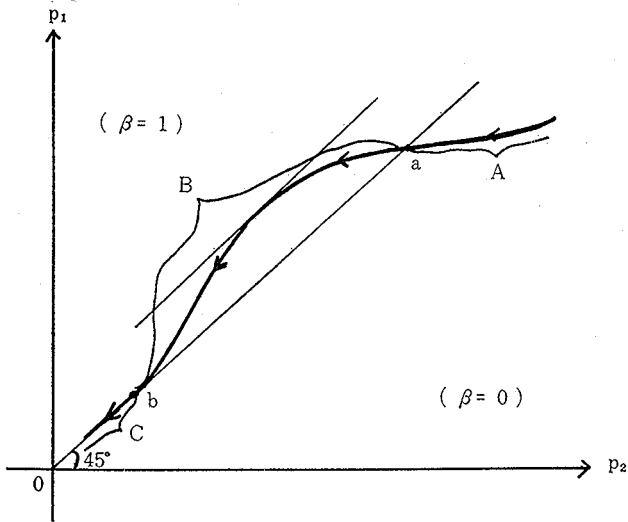


図56. 価格径路 (規模に関して収穫可変の場合)

したがって、この場合、生産関数が規模に関して可變的に作用する結果から、地域間の投資配分に関して、いわゆる“切换え”現象が生ずることになる。なぜなら、資本蓄積の進行が、通常、産出資本比率  $Y/K$  の低下を随伴させるからである。

[未完]



## 参 考 文 献

- [A] 最適制御理論 (主として連続型最大原理)
1. 宇野利雄・菊池豊彦『最大原理入門』, 共立, 1967.
  2. Athans, M. and P. L. Falb, *Optimal Control, An Introduction to the Theory and its Applications*, McGraw-Hill, 1966.
  3. ライトマン (示村悦二郎訳)『最適制御概論』, コロナ社, 1972.
  4. ボルチャンスキー (坂本実訳)『最適制御の数学的方法』, 総合図書, 1968.
  5. リィ・マーカス (占部実, 古川長太, 伊藤久美子訳)『現代の最適制御理論 (上), (下)』, 吉岡書店, 1973.
  6. 北川敏男編『最適制御過程 I』, 共立, 1970.
  7. Hestenes, M. R., *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley, 1966.
  8. ポントリャーギン他 (関根智明訳)『最適過程の数学的理論』, 総合図書, 1967.
- [B] 離散型最大原理
1. Fan, L. T. & C. S. Wang, (高松武一郎・范良政, 范良信訳)『離散形最大原理』, コロナ社, 1972.
  2. ファン (中谷貴寿・和泉陽平訳)『最大原理とその応用』, コロナ社, 1968.
- [C] 偏微分型最大原理
1. Sage, A. P., *Optimum System Control*, Prentice-Hall, 1968, ch.7.
  2. リオン (黒田義輝・牧野昭訳)『偏微分方程式と最適制御』, 東京図書, 1974.
- [D] 最適制御におけるその他の手法, 最適制御問題の数値解法
1. Boudarel, R. and others, *Dynamic Programming and Its Application to Optimal Control*, Academic Press, 1971.
  2. 坂和愛幸『最適制御過程 II——確定系における諸解法——』, 共立, 1967.
  3. フェリドバウム (篠原慶邦・須田信英訳)『最適制御理論』, 東京図書, 1972.
  4. Dyer, P. and S. R. McReynolds, *The Computation and Theory of Optimal Control*, Academic Press, 1970.
- その他, DPの本を参照.
- [E] 最適理論における統一的アプローチ
1. ルーエンバーガ (増淵正美・嘉納秀明訳)『関数解析による最適理論』, コロナ社, 1973.
  2. Canon and others, *Theory of Optimal Control and Mathematical Programming*, McGraw Hill, 1970.
  3. Fujita, M., *Optimum Growth in Monotone Space Systems*, Ph. D. Dissertation, University of Pennsylvania, 1972, ch.2.
  4. Fujita, M., "Duality and Maximum Principle in Multi-period Convex Programming", *Journal of Mathematical Economics*, 1974, pp.295—326.
- [F] 最大原理の十分条件について
1. Kamien, M. I. and N. L. Schwartz, "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory," *Journal of Economic Theory* 3, 1971, pp.207—214.

その他, [A], 3, ch.5, [K], a, 3, 参照

[G] 最大原理の幾何学的解釈

1. 市川邦彦, “最大原理の幾何学的意味について,” 『計測と制御』, 第5巻4号, 1966, pp.235—241.
  2. 大槻芳孝, “資本蓄積の最適経路と Pontryagin の最大原理,” 『季刊理論経済学』, Vol.21, No. 1, 1970, pp.32—40.
  3. ドーフマン・サミュエルソン・ソロー (安井琢磨, 福岡正夫, 渡部経彦, 小山昭雄訳) 『線型計画と経済分析Ⅱ』, 岩波, 1959, ch.12.
- その他, [A], 3, [E], 3, ch.2, 参照.

[H] 最大原理の経済学的意味

1. Dorfman, R., “An Economic Interpretation of Optimal Control Theory,” *The American Economic Review*, 1970, pp.817—831.
  2. Peterson, D. W., “The Economic Significance of Auxiliary Functions in Optimal Control,” *International Economic Review*, Vol.14, No.1, 1973, pp.234—252.
2. その他, [E], 3, ch.2, [K], 3, 参照.

[I] 状態変数に Jump のある場合

1. Vind, K., “Control Systems with Jumps in the State Variables”, *Econometrica*, Vol.35, No.2, 1967.
2. [K], a, 3.

[J] 最適制御とゲームの理論

1. ガブリロフ, ポントリャーギン(坂本実訳) 『競争の場の最適過程』, 東京図書, 1971.
2. Friedman, A., *Differential Games*, Wiley-Interscience, 1971.

[K] 最適制御理論の経済, 地域, 都市, 交通計画への応用

- a. 経済
  1. Shell, K. (ed.), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, M. I. T. Press, 1967.
  2. Kuhn, H. W. and G. P. Szego (ed.), *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics*, No.11, *Mathematical Systems Theory and Economics I*, Part II, Optimal Control of Economic Systems, pp.143—241, Springer-Verlag, 1969.
  3. Arrow, J. K. and M. Kurz, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, The Johns Hopkins Press, 1970.
  4. Inagaki, M., *Optimal Economic Growth*, North-Holland Publishing Company, 1970.
  5. Keeler, E. and others, Optimal Control of Pollution, *Journal of Economic Theory* 4, 1971, pp.19—34.

その他, 多数。とくに, Burmeister, E. and A.R. Dobell, *Mathematical Theory of Economic Growth*, Macmillan, 1970, ch.11の Reference, 参照。

また,

坂口実『経済分析と動的計画』, 東洋経済, 1970, 参照。

最近のは, *Journal of Economic Theory* に多い。

b. 地域

1. Rahman, A., "Regional Allocation of Investment," *Quarterly Journal of Economics*, 77, 1963, pp.36-39. (J. Friedman and W. Alonso (ed.), *Regional Development and Planning*, pp.654-667, に再録)
2. Intriligator, M. D., "Regional Allocation of Investment: Comment," *Quarterly Journal of Economics*, 78, 1964, pp.659-662.
3. Takayama, A., "Regional Allocation of Investment: A Further Analysis," *Quarterly Journal of Economics* 81, 1967, pp.330-337.
4. Sakashita, N., "Regional Allocation of Public Investment," *Papers and Proceedings of the Regional Science Association*, Vol.19,1967, pp.161-182.
5. Ohtsuki, Y., "Regional Allocation of Public Investment in a N-region Economy," *Journal of Regional Science*, Vol.11, 1971, pp.225-233.
6. [D], 3, ch.3,4, and 5.
7. [D], 4, ch.6.
8. Yamamura, E., "A Basic Study on Regional Income Disparity Arising from Regional Allocation of Public Investment," 『土木学会論文集』, No.203, 1972.
9. Isard, W. and P. Liossatos, "Space-Time Development and a General Transfer Principle," *Papers of the Regional Science Association*, Vol. 30, 1973, pp.17-38.
10. Isard, W. and P. Liossatos, "On Location Analysis for Urban and Regional Growth Situations," *The Annals of Regional Science*, 1972. pp. 1-27.
11. Isard, W. and P. Liossatos, "Some Simple Air Pollution and Urban-Regional Growth Models," *Papers of the Regional Science Association*, Vol. 29,1972, pp.1-24.
12. Fujita, M., "Optimum Growth in Two-region, Two-Good Space Systems: The Final State Problem," *Journal of Regional Science*, Vol. 13, No. 3, 1973, pp.385-407.
13. Fujita, M., "On Optimal Development in a Multi-Commodity Space System," (forth-coming in *Urban and Regional Economics*).

c. 都市

1. Mills, E. S., "The Efficiency of Spatial Competition," *Papers of the Regional Science Association*, Vol.25,1970, pp.71-82.
2. Solow, R. M. and W. S. Vickrey, "Land Use in a Long Narrow City," *Journal of Economic Theory*, 3, 1971, pp.430-447.
3. Walter, G. R., "Intertemporally Optimal Urban Pollution," *Papers of the Regional Science Association*, Vol.28,1972. pp.237-254.

4. 坂下昇, “都市経済分析の計量的手法について,” 『季刊・現代経済』 5, 1972. pp. 152-165.
  5. Sheshinski, E., “Congestion and the Optimum City Size,” *The American Economic Review*, 1973, pp.61-70. (『高速道路と自動車』 Vol. 27. No. 2, 1974, に訳あり)
  6. Oron, Y. and others, “Optimum vs. Equilibrium Land Use Pattern and Congestion Toll,” *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No.2, 1973, pp.619-635.
  7. Dixit, A., “The Optimum Factory Town,” *The Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol.4, No.2, 1973, pp.637-651.
  8. Mills, E. S., “Markets and Efficient Resource Allocation in Urban Areas,” *Swedish Journal of Economics*, Vol.74, No.1, 1972, pp.100-117.
  9. Yellin, J., Urban Population Distribution, Family Income, and Social Prejudice 1. The Long, Narrow City,” *Journal of Urban Economics* 1, 1974, pp.21-47.
  10. Fisch, O., “Impact Analysis on Optimal Urban Densities and Optimal City Size,” *Journal of Regional Science*, Vol.14, No.2, 1974, pp.233-246.
  11. Legly, L., M. Ripper, and P. Varaiya, “Effects of Congestion on the Shape of a City,” *Journal of Economic Theory* 6, 1973, pp.162-179.
  12. Livesey, D. A., “Optimal City Size: A Minimum Congestion Cost Approach,” *Journal of Economic Theory* 6, 1973, pp.144-161.
  13. Riley, J. G., “Gammaville: An Optimal Town,” *Journal of Economic Theory* 6, 1973, pp.471-482.
  14. Riley, J. G., “Optimal Residential Density and Road Transportation,” *Journal of Urban Economics* 1, 1974, pp.230-249.
  15. Fujita, M., “Spatial Patterns of Urban Growth: Optimal and Market,” Submitted to *Journal of Urban Economics*.
  16. 藤田昌久, “都市空間の最適成長過程,” 『日本地域学会第10回大会報告要旨』, 1973, pp.90-109.
  17. 藤田昌久, “都市施設の長期的最適配置過程に関する研究,” 『土木学会論文報告集』 No.222, 1974.
  18. 藤田昌久, “都市空間拡大過程の動学分析,” 『日本交通政策研究会シリーズ』, A-13-2, 1974.
  19. 藤田昌久, “都市空間の最適拡大過程,” 『地域学研究』, 第四巻, 1973.
  20. 藤田昌久, 柏谷増男, “住宅立地論へのプログラミング・アプローチ,” 『地域学研究』, 第五巻 1974.
  21. 金本良嗣, “混雑と費用便益分析一扇状都市アプローチ,” 『日本交通政策研究会シリーズ』, A-18, 1975.
- d. 交通
1. 奥谷巖, 『街路網における信号機のオフセット最適化に関する基礎的研究』, 京都大学博士論文, 1973.