最適制御理論について[1)]

――経済・地域・都市計画の基礎理論として――

井　原　健　雄

V

つぎに，タイプ２の問題に対する最大原理を考察しよう。そのために，まず，II 章の第５節で与えた最適制御問題の分類にもとづき，本章で考察の対象となるタイプ２の問題を，より一般的な「非オートノマス系」の問題[2)]として定式化する。ついで，その問題の解明に必要となる，非オートノマス系の処理の仕方と「クーン・タッカーの条件」を明らかにする。後者については，非線形計画問題との関連で，方向ベクトルの概念をとくに重視し，制約条件に付される限定，すなわち，Constraint Qualification, の内容を十分に吟味する。そして，最後に，タイプ２の問題に対する最大原理を〔定理４〕として導出し，タイプ１の問題に対する最大原理，すなわち，〔定理３〕[3)]，との比較を試みる。

§1.　問題の定式化

タイプ２の問題は，つぎのように定式化される。

タイプ２の問題

つぎの評価基準

---

1)　本稿は，前稿の冒頭に記した目次のうち，V. タイプ２の問題に対する最大原理，とVI. タイプ２の問題の応用，について言及したものである。なお，本誌の編集委員である土田哲也氏の寛容と忍耐がなければ，この機会にこのような形でまとめることなど到底不可能であったことをここに記して，同氏に心より謝意を表明したい。また宍戸栄徳氏からは，有益な助言を頂き，小野玉恵さんには，清書の労を煩わした。合わせて，お礼を申し上げたい。

2)　オートノマス系については，II 章，第１節の脚注15)，および，II 章，第４節の脚注39)，参照。

3)　III 章，第５節の〔定理３〕，参照。

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\, dt \tag{5.1}$$

を，以下の制約に従って最大にする制御 $\boldsymbol{u}(t)$, ($t_0 \leqq t \leqq t_1$) を求めよ。[4)]

（i） 状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{X}} = f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t) \tag{5.2}$$

（ii） 初期条件

$$\boldsymbol{X}(t_0) \in \theta^0(t_0) \tag{5.3}$$

（iii） 終端条件

$$\boldsymbol{X}(t_1) \in \theta^1(t_1) \tag{5.4}$$

（iv） 制御制約

$$\boldsymbol{u}(t) \in U(\boldsymbol{X}(t), t) \tag{5.5}$$

ただし，

$$\boldsymbol{X} \in E^n,\ \boldsymbol{u} \in E^m,\ \theta^0 \subset E^n,\ \theta^1 \subset E^n$$

t_0, t_1 は所与，または未知であり，さらに，

$$U(\boldsymbol{X}(t), t) = \{\boldsymbol{u} \mid \phi_\alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t) \geqq 0,\ \alpha = 1, 2, \ldots, l';\ \phi_\alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t) = 0,\ \alpha = l'+1, l'+2, \ldots, l\} \tag{5.6}$$

を表わすものとする。[5)]

この場合，われわれは，以下に示す4つの仮定を設けることにする。[6)]

---

4) III 章，第5節で示されたタイプ1の問題は，最小化問題として定式化されたが，ここでは，最大化問題として定式化されている。しかし，目的関数の符号をかえることによって，両者の変換はきわめて容易になされうる結果，その差異に重要な意味があるわけではない。IV 章，第1節の脚注171)，参照。

5) ここでは，非オートノマス系を対象としている結果，叙上の式がすべて時刻 t の明示的な関数となっている点に注意せよ。

6) これらの仮定を，III 章，第5節で定式化されたタイプ1の問題に対する（仮定1）〜（仮定3）と比較せよ。

（仮定１）

$f_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t), \partial f_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)/\partial x_j, \partial f_i(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)/\partial t, (i=0, 1, \ldots, n; j=1, 2, \ldots, n)$ は，$E^{n+1}\times U$ 内で定義され，かつ連続である。ただし，E^{n+1} は，$(\boldsymbol{X}, t)$ の空間である。

（仮定２）

最適制御 $\boldsymbol{u}^*(t)$，$(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ は，許容制御のなかから選ばれるものとする。

（仮定３）

θ^0，および θ^1 は，それぞれ適当な次元をもった，なめらかな多様体である。

（仮定４）

$\phi_\alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t), \partial\phi_\alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)/\partial x_j, \partial\phi_\alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)/\partial u_i, \partial\phi_\alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)/\partial t$，$(\alpha=1, 2, \ldots, l; i=1, 2, \ldots, m; j=1, 2, \ldots, n)$ は，E^{n+m+1} 内で定義され，かつ連続である。

叙上の定式化で，もっとも重要な点は，(iv) の制御制約 (5.5) に求められる。すなわち，これをタイプ１の問題における制御制約[7]と比較すれば，後者の制御 $\boldsymbol{u}$ が，状態変数 $\boldsymbol{X}$ とは独立に与えられているのに対して，前者の制御 $\boldsymbol{u}$ は，状態変数 $\boldsymbol{X}$ とある関係をもって与えられている。[8] したがって，この状態変数 $\boldsymbol{X}$ と関係する制御 $\boldsymbol{u}$ の領域 $U(\boldsymbol{X}(t), t)$ を明示的に表わしたものが，(5.6) に他ならない。

なお，この制御制約 (5.6) が，

$$\left.\begin{aligned} &\phi_\alpha(\boldsymbol{u}, t) \geqq 0, \ \alpha=1, 2, \ldots, l' \\ &\phi_\alpha(\boldsymbol{u}, t) = 0, \ \alpha=l'+1, l'+2, \ldots, l \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

をその特殊な場合として含むことは，いうまでもない。その結果，このことは，すでに検討したタイプ１の問題[9]が，本章で取り上げるタイプ２の問題に包摂されることを意味している。しかし，この同じ制御制約であっても，それが

7) II 章，第５節の (2.31)，または，III 章，第１節の (3.5)，参照。
8) この一例として，II 章，第５節の (2.35)，および図14，を参照せよ。
9) III 章，および IV章，参照。

$$\left.\begin{array}{l}\phi_\alpha(\boldsymbol{X},t)\geqq 0,\ \alpha=1,2,\ldots,l' \\ \phi_\alpha(\boldsymbol{X},t)=0,\ \alpha=l'+1,l'+2,\ldots,l\end{array}\right\} \qquad (5.8)$$

を，その特殊な場合としてそのうちに含んではいないということに，注意を払う必要がある。なぜなら，(5.8) の示す関係は，状態変数 $\boldsymbol{X}$ 自体についての制約であって，それが制御 $\boldsymbol{u}$ についての制約ではないからである。そして，この場合を，すでにわれわれは，タイプ３の問題[10]として類形化し，すでに検討したタイプ１の問題と本章で検討するタイプ２の問題とから明確に区別したわけである。

タイプ２の問題に対する叙上の定式化で，さらに留意すべき点として，それが，これまでのような時間軸 t に沿ったシステムの移動によって法則の性質が変らない，いわゆるオートノマス系，を扱っているのではなく，その検討の対象としてより一般的な非オートノマス系を扱っているということが指摘される。すなわち，ここでは，評価基準の被積分関数[11]や状態方程式,[12] さらに，また，初期条件，および終端条件に含まれる多様体[13]が，すべて時刻 t の明示的な関数として与えられている。これは，もとより，タイプ２の問題に固有の性質ではない。したがって，タイプ１の問題についても，それをオートノマス系に限定する必要はなく，さらに，端点の多様体が時刻 t に関係する非オートノマス系について，タイプ１の問題を考察することも，また可能となる。そこで，このような場合に，すでに導出したオートノマス系についての最大原理——すなわち，タイプ１の問題に対するわれわれの理論的帰結としての〔定理３〕——がどのように修正されるかを，タイプ２の問題に対する最大原理を導出するまえに検討しておくことにしよう。

§2.　非オートノマス系の処理[14]

いま，つぎの状態方程式

10)　II 章，第５節の (2.33)，参照。また，その内容の検討については，後の VII 章，および VIII 章で試みられる。

11)　(5.1) の $f_0(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{u}(t),t)$ を指す。

12)　ベクトル関数 (5.2) を指す。

13)　(5.3)，および (5.4) の右辺を指す。

14)　本節の展開は，〔A〕3, pp. 97-102, に負うところが多い。

$$\dot{\boldsymbol{X}}=f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{u},t) \tag{5.9}$$

で表わされるシステムを，許容制御 $\boldsymbol{u}(t)$, $(t_0\leqq t\leqq t_1)$ によって，時刻 t に関係する初期多様体 $\theta^0=\theta^0(t)$ から終端多様体 $\theta^1=\theta^1(t)$ へ移す問題を考えてみよう。ここで，両端点の多様体が時刻 t に関係するというのは，つぎのことを意味している。まず，$(\boldsymbol{X},t)$ の $(n+1)$ 次元空間に，次式によって定義される，2つのなめらかな多様体 $\tilde{\theta}^0$, $\tilde{\theta}^1$ を想定する。[15)]

$$\tilde{\theta}^0:\ \tilde{\theta}^0_i(\boldsymbol{X},t)=0,\qquad i=1,2,\dots,p+1 \tag{5.10}$$

$$\tilde{\theta}^1:\ \tilde{\theta}^1_j(\boldsymbol{X},t)=0,\qquad j=1,2,\dots,q+1 \tag{5.11}$$

さらに，関数 $\tilde{\theta}^0_i(\boldsymbol{X},t)$，および $\tilde{\theta}^1_j(\boldsymbol{X},t)$ は，$\boldsymbol{X}$，および t に関して連続な偏導関数をもち，つぎの行列関数，

$$\begin{bmatrix} \nabla\tilde{\theta}^0_1(\boldsymbol{X},t) \\ \nabla\tilde{\theta}^0_2(\boldsymbol{X},t) \\ \vdots \\ \nabla\tilde{\theta}^0_{p+1}(\boldsymbol{X},t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_{p+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_{p+1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_{p+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^0_{p+1}}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

および，

$$\begin{bmatrix} \nabla\tilde{\theta}^1_1(\boldsymbol{X},t) \\ \nabla\tilde{\theta}^1_2(\boldsymbol{X},t) \\ \vdots \\ \nabla\tilde{\theta}^1_{q+1}(\boldsymbol{X},t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_{q+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_{q+1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_{q+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}^1_{q+1}}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

のランクが，それぞれ $p+1$，および $q+1$ であるものと仮定しよう。したがって，(5.10)，および (5.11) によって規定される初期多様体 $\tilde{\theta}^0$，および終端多

15) III 章，第5節，参照。

様体 $\tilde{\theta}^1$ の次元は，それぞれ

$$(n+1)-(p+1)=n-p \tag{5.14}$$

$$(n+1)-(q+1)=n-q \tag{5.15}$$

となる。[16)]

ここで，2つの場合を分けて考察することにしよう。いま，$p<n$ ならば，任意の与えられた時刻（たとえば，$t=t'$）に対して，(5.10) は，n 次元の状態空間 E^n 内に，初期多様体 $\theta^0(t')$ を定義し，その次元は，$n-(p+1)$ となる。[17)] したがって，時刻 t の値を変化させれば，それに応じて，(5.10) より，E^n 内に初期多様体 $\theta^0(t)$ の1径数族 $\{\theta^0(t)\}$ が形成されることになる。その一例を示したものが，つぎの図57である。

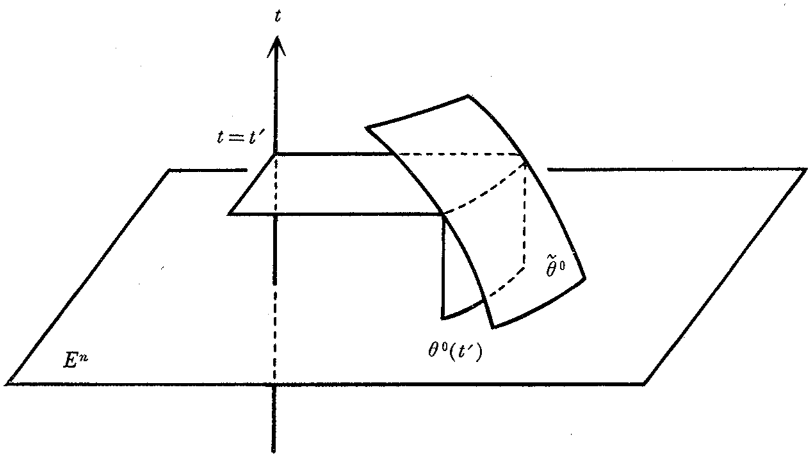


図 57. 初期多様体の1径数族

16) III 章，第5節の (3.100)，参照。

17) ここでは，n 次元の状態空間に議論を限定しているため，多様体の次元が (5.14) で示されたものよりも小さくなっている点に注意せよ。

つぎに，$p=n$ の場合には，時刻 t は固定されてしまうことが (5.10) によって明らかとなる。すなわち，$t=t_0$ をその固定された時刻とすれば，初期多様体 $\tilde{\theta}^0$ は，$n+1$ 次元の状態—時間空間内の点となり，その結果，その点に対応する初期状態 $\boldsymbol{X}(t_0)$ は，図58の点 $\theta^0(t_0)$ として，また固定されることになる。

さらに，(5.11) で定義される終端多様体 $\tilde{\theta}^1$ についても，同様の議論が成り立つことはいうまでもない。

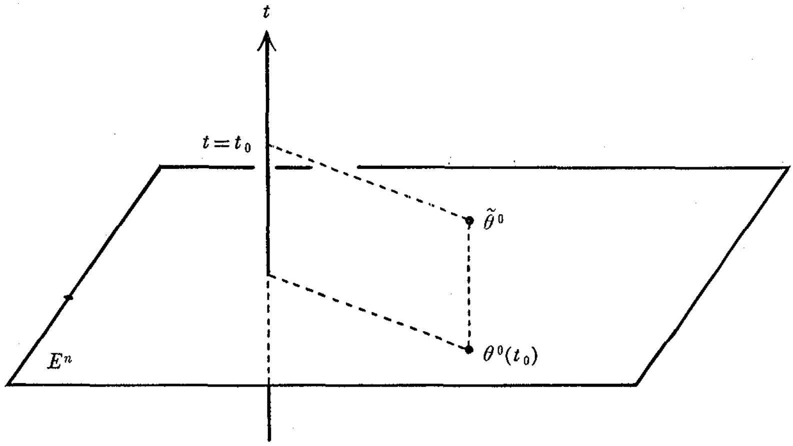


図 58. 固定された初期時刻と初期状態

さて，つぎに，当該システムを初期多様体 $\tilde{\theta}^0(t_0)$ 上の点から終端多様体 $\tilde{\theta}^1(t_1)$ 上へ移し，しかもそのときの評価基準

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(\boldsymbol{X}(t),\ u(t),\ t)\,dt \tag{5.16}$$

が最大となる許容制御 $\boldsymbol{u}^*(t)$，$(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ を決定する問題を考えよう。この場合，$(n+1)$ 次元の空間内におけるトラジェクトリー方程式[18] は，非オートノ

18) II 章，第 4 節の (2.24)，または (2.25)，参照。

マスなベクトル方程式

$$\{f_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t), f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)\} = \{f_0(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t), f_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t), \ldots, f_n(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)\} \tag{5.17}$$

によって与えられる。[19]

この問題に対して，すでに導出した〔定理3〕を適用せんがために，状態空間の次元を1だけ高めることによって，当該問題をオートノマス系に変換してみよう。いま，時刻の変数 t を1つの新しい状態変数とみなして，

$$x_{n+1} \triangleq t \tag{5.18}$$

とおくことにする。その結果，拡張されたシステムの状態方程式は，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \boldsymbol{u}), \quad i=1, 2, \ldots, n \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

また，これに対応する評価基準は，

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \boldsymbol{u})\,dt \tag{5.20}$$

となる。そのとき，初期多様体 $\tilde{\theta}^0$ は，つぎの $p+1$ 個のなめらかな曲面の交わりとして与えられる。[20]

$$\tilde{\theta}^0 : \tilde{\theta}_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0, \; i=1, 2, \ldots, p+1 \tag{5.21}$$

同様に，終端多様体 $\tilde{\theta}^1$ は，つぎの $q+1$ 個のなめらかな曲面の交わりとして与えられる。[21]

$$\tilde{\theta}^1 : \tilde{\theta}_j^1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0, \; j=1, 2, \ldots, q+1 \tag{5.22}$$

---

19) このトラジェクトリー方程式について，すでに導入した（仮定1）が妥当することは，いうまでもない。

20) $\tilde{\theta}^0 \subset E^{n+1}$。

21) $\tilde{\theta}^1 \subset E^{n+1}$。

このように問題を再定式化することによって，われわれは，非オートノマス系の問題をオートノマス系の問題として書き換えることができる。したがって，オートノマス系の問題をその対象とする〔定理3〕を，ここでの問題に適用することが可能となる。その適用結果を示せば，つぎのようになる。

いま，

$$\tilde{X} \triangleq (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = (X, x_{n+1}) \tag{5.23}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \triangleq (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = (\boldsymbol{\lambda}, \lambda_{n+1}) \tag{5.24}$$

とおき，[22] このハミルトニアン関数を，

$$\tilde{H} \triangleq \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \cdot f(\tilde{X}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i f_i(\tilde{X}, \boldsymbol{u}) \tag{5.25}$$

と定義[23]すれば，

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(X, \boldsymbol{u}, t) + \lambda_{n+1} f_{n+1}(X, \boldsymbol{u}, t) = H + \lambda_{n+1} \tag{5.26}$$

となる。[24]

したがって，随伴方程式は，つぎのようになる。[25]

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1 \tag{5.27}$$

すなわち，

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\lambda}_0 = 0 \\ &\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \ldots, n \\ &\dot{\lambda}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}} \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

---

22) ここでは，$X=(x_0, \boldsymbol{X})$ を表わす $(n+1)$ 次元ベクトルであることに注意せよ。

23) III 章，第5節の (3.123)，参照。

24) (5.19) の第2式，参照。なお，ここでの H は，$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(X, u, t)$ を表わすものとする。

25) III 章，第5節の (3.125)，および脚注162)，参照。

となる。[26]これより，〔定理３〕の条件 (a) は，つぎのように書き換えられる。[27]

(a) (i) $\lambda_0(t)=$定数$\geqq 0,\ t_0\leqq t\leqq t_1$ (5.29)

(ii) $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)),\ t_0\leqq t\leqq t_1$ は，つぎの方程式の解である。

$$\dot{\lambda}_i=-\partial H(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t, \boldsymbol{\lambda}(t))/\partial x_i,\ i=1, 2, \ldots, n \tag{5.30}$$

つぎに，〔定理３〕の条件 (b)，および (c) は，つぎのようになる。

$$\tilde{H}(\tilde{X}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t))=\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{u}\in U}\tilde{H}(\tilde{X}^*(t), \boldsymbol{u}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)),$$
$$t_0\leqq t\leqq t_1 \tag{5.31}$$

および，

$$\tilde{H}(\tilde{X}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t))=0 \tag{5.32}$$

ここで，(5.18) と (5.26) の関係を用いれば，〔定理３〕の条件 (b)，すなわち，(5.31)，は，結局つぎのように変形される。[28]

(b) $$H(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t, \boldsymbol{\lambda}(t))=\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{u}\in U}H(X^*(t), \boldsymbol{u}, t, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$
$$t_0\leqq t\leqq t_1 \tag{5.33}$$

また，〔定理３〕の条件 (c)，すなわち，(5.32) は，(5.26) の関係より，

$$H(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t, \boldsymbol{\lambda}(t))=-\lambda_{n+1}(t) \tag{5.34}$$

となる。さらにまた，これは，(5.18)，および (5.28) の最後の関係を用いることにより，結局つぎのように書き換えられる。[29]

(c) $$H(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t, \boldsymbol{\lambda}(t))=H(X^*(t_0), \boldsymbol{u}^*(t_0), t_0, \boldsymbol{\lambda}(t_0))$$
$$+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H(X^*(\tau), \boldsymbol{u}^*(\tau), \tau, \boldsymbol{\lambda}(\tau))}{\partial\tau}d\tau,\quad t_0\leqq t\leqq t_1 \tag{5.35}$$

---

26) (5.19)，(5.20)，および (5.26)，参照。

27) III 章，第５節の〔定理３〕(a)，参照。ただし，ここでは最大化問題を考察している結果，$\lambda_0(t)=$定数$\geqq 0,\ t_0\leqq t\leqq t_1$ となっている点に注意せよ。脚注171)，参照。

28) III 章，第５節の〔定理３〕(b)，参照。

29) III 章，第５節の〔定理３〕(c)，参照。

最後に，横断条件である〔定理3〕の条件（d）は，つぎのように述べられる。すなわち，ベクトル $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_{n+1}(t))$ は，$t=t_0$，および $t=t_1$ でそれぞれに対応する端点の多様体 $\tilde{\theta}^0$，および $\tilde{\theta}^1$ に直交する，と。[30)]

これを詳述すれば，つぎのようになる。まず，初期点における横断条件は，

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^0 + \lambda_{n+1}\eta_{n+1}^0 = 0 \tag{5.36}$$

として表わされる。[31)] ただし，$(\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_{n+1}^0)$は，初期多様体 $\tilde{\theta}^0$ の点 $X^*(t_0)$ における接線ベクトルを表わすものとする。そのとき，接線ベクトルに関する（性質1）[32)] より，(5.36) は，勾配ベクトル $\nabla\theta_i^0(X^*(t_0))$ の各成分を用いて，つぎのように示される。

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\theta}_i^0}{\partial x_j}\eta_j^0 + \frac{\partial \tilde{\theta}_i^0}{\partial x_{n+1}}\eta_{n+1}^0 = 0, \qquad i=1, 2, \ldots, p+1 \tag{5.37}$$

したがって，初期点における横断条件は，(5.18)，および (5.34) の関係を用いて，結局つぎのようになる。

（初期点における横断条件）

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^0 = H(X^*(t_0), \boldsymbol{u}^*(t_0), t_0, \boldsymbol{\lambda}(t_0))\eta_{n+1}^0 \tag{5.38}$$

ただし，

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\theta}_i^0}{\partial x_j}\eta_j^0 = -\frac{\partial \tilde{\theta}_i^0}{\partial t}\eta_{n+1}^0, \qquad i=1, 2, \ldots, p+1 \tag{5.39}$$

を表わすものとする。

同様にして，終端点における横断条件は，つぎのように表わされる。[33)]

（終端点における横断条件）

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta_j^1 = H(X^*(t_1), \boldsymbol{u}^*(t_1), t_1, \boldsymbol{\lambda}(t_1))\eta_{n+1}^1 \tag{5.40}$$

---

30) これが，III章，第5節の〔定理3〕(d) に対応する。
31) III章，第5節の (3.115) に対応する。
32) III章，第5節の（性質1），参照。
33) III章，第5節の (3.107)，参照。

ただし，

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\theta}_i^1}{\partial x_j}\eta_j^1=-\frac{\partial\tilde{\theta}_i^1}{\partial t}\eta_{n+1}^1,\qquad i=1,2,\ \ldots,q+1 \tag{5.41}$$

を表わすものとする。

以上より明らかなように，非オートノマス系の問題といえども，状態空間の次元を n から $n+1$ に高めることによってその問題を再定式化し，それに対して〔定理３〕を適用することが可能となった。この場合，その導出された条件には，x_{n+1}，および λ_{n+1} がいずれも含まれていないことに，とくに注意する必要がある。

§3. クーン・タッカーの条件[34)]

つぎに，タイプ２の問題に対する最大原理を導出するのに必要とされる，クーン・タッカーの条件を明らかにしておこう。いうまでもなく，クーン・タッカーの条件とは，いわゆる非線形計画問題の最適解がみたすべき必要条件を意味するものである。したがって，本節では，まず最初に数多くの具体的形式をもつ**非線形計画問題** (Nonlinear Programming Problem) の一般形が定式化され，その内容の吟味が試みられる。ついで，その最適解を求めるうえで重要な意味をもつ，方向ベクトルと**勾配**概念との関係が明らかにされ，それによって実現可能な方向ベクトルの集合が定義される。以上の準備を踏まえたうえで，制約条件のみたすべき性質，すなわち "Constraint Qualification" の内容が明らかにされ，そして最後に，その成立を前提として，クーン・タッカーの条件が導出される。

〔非線形計画問題〕

最適制御問題[35)]をはじめとして，２次計画問題[36)]や幾何計画問題[37)]をその対

---

34) 本節の展開は，W. I. Zangwill, "Nonlinear Programming," 1969, Prentice-Hall, pp. 2–79 に負うところが多い。

35) II 章，第５節の最適制御問題（一般形），参照。

36) Quadratic Programming Problem とは，２次形式の目的関数と線形の制約式とからなる問題を指しており，一般には，つぎのように表わされる。

象とする**非線形計画問題**の一般形は，つぎのように定式化される。

非線形計画問題

目的関数

$$f(\boldsymbol{X}) \tag{5.42}$$

の値を，つぎの制約のもとで最大にする変数ベクトル $\boldsymbol{X}$ を求めよ。

$$g_i(\boldsymbol{X}) \geqq 0, \qquad i=1, 2, \ldots, m \tag{5.43}$$

ただし，

関数 f, および g_i は，$f: E^n \to E^1$, および $g_i: E^n \to E^1$, $(i=1, 2, \ldots, m)$ を表わし，そのいずれも，微分可能であるものとする。

このとき，すべての制約式（5.43）をみたす n 次元空間（E^n）内の点 $\boldsymbol{X}$ は，**実現可能**（Feasible）であるとよばれ，その点 $\boldsymbol{X}$ のすべての集合（これを F で表わす）は，**実現可能領域**（Feasible Region）とよばれる。ここで，必要以上の複雑化を避けるため，

$$F \neq \emptyset \tag{5.44}$$

を仮定しよう。いうまでもなく，$\emptyset$ は，空集合を表わすものとする。

つぎの課題は，以上のように定式化された非線形計画問題を実際に解いてい

Max. $\boldsymbol{q}'\boldsymbol{X}+\frac{1}{2}\boldsymbol{X}'Q\boldsymbol{X}$

s.t. $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{X} \geqq \boldsymbol{0}$

ただし，

$\boldsymbol{X}$, および $\boldsymbol{q}$ は n 次元の列ベクトル，Q は n 行 n 列の対称行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元の列ベクトル，A は m 行 n 列の行列を表わすものとする。

37) Geometric Programming Problem とは，工学や自然科学の分野でとくに有効と認められる問題形式で，つぎのように定式化される。

Min. $h_0(\boldsymbol{X})$

s.t. $h_i(\boldsymbol{X}) \leqq 1, \ i=1, 2, \ldots, p, \quad \boldsymbol{X} > \boldsymbol{0}$

ただし，

$h(\boldsymbol{X})$ は Polynomial な関数，すなわち，$h(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{k} C_i\left[\prod_{j=1}^{n} X_j^{A_{ij}}\right]$, $(C_i>0, X_j>0)$ として表わされるものとする。

くことである。しかし，問題が実際に解かれるまえに，当該問題の解，すなわち最適点 $\boldsymbol{X}^*$ の認定が必要である。[38] そこで，まず，最適点 $\boldsymbol{X}^*$ の認定を容易ならしめる，1つの判定基準を考察することにしよう。その際，重要な役割りをになうものとして，**勾配ベクトル** (Gradient Vector) があり，クーン・タッカーの条件は，これを用いて導出される。

〔方向ベクトルと勾配〕

非線形計画問題に対する勾配ベクトルの重要性は，けっして過少評価されるべきではない。というのは，ある所与の非最適点 ($\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{X}^*$) について，その点における勾配ベクトルは，通常，より優れた点を得る指標として役立つからである。[39] しかしながら，勾配ベクトルについて説明するまえに，われわれは，**方向** (Direction) の概念を明らかにしておく必要がある。なぜなら，勾配は，それ自身，方向を意味するからである。

いうまでもなく，任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ は，方向を示すものとして用いることができる。[40] そこで，いま，n 次元空間内のある点 $\boldsymbol{X}$ と方向 $\boldsymbol{d}$ が与えられたものと想定しよう。[41] そのとき，スカラー τ の値を，0 から $+\infty$ までの範囲内で変えることによって，次式

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \tau \boldsymbol{d} \tag{5.45}$$

で規定される n 次元空間内の点 $\boldsymbol{Y}$ は，点 $\boldsymbol{X}$ を起点とし，$\boldsymbol{d}$ の方向へ向かってのびる半直線を表わすことになる。図 59 は，これを例示したものである。[42] さらに，スカラー τ の値を，$-\infty$ から $+\infty$ までの範囲内で変えることにすれば，(5.45) で規定される点 $\boldsymbol{Y}$ は，点 $\boldsymbol{X}$ を通る全直線を表わすことになる。

38) いうまでもなく，$\boldsymbol{X}^*$ が当該問題の解であるということは，この $\boldsymbol{X}^*$ が (5.43) の制約条件をみたし，しかも，(5.42) で与えられる目的関数の値を最大にするということを意味する。

39) 関数 $f(\boldsymbol{X})$ の勾配について，すでにわれわれは，2つの重要な性質を明らかにした。III 章，第 5 節の (3.93)，および図31を参照せよ。

40) 以下，ベクトルは，とくに断わらないかぎり，列ベクトルで与えられるものとする。

41) ただし，$\boldsymbol{d} \neq 0$ であるものとする。

42) III 章，第 2 節の図21における $\boldsymbol{X} + \xi \boldsymbol{\eta}$ に対応する。

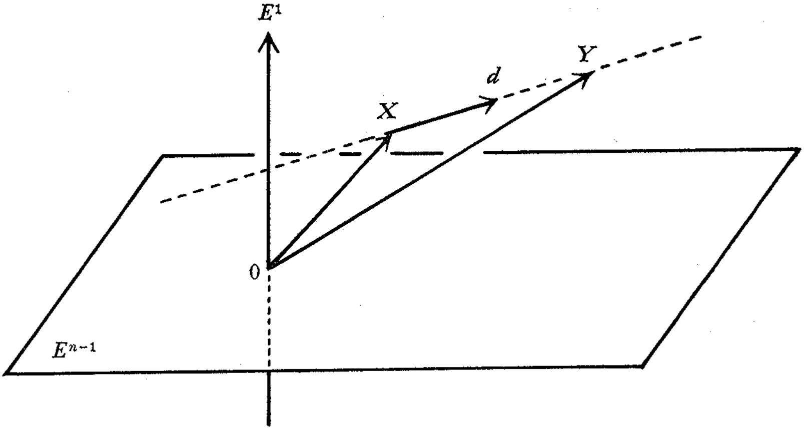


図 59. n 次元空間内の点 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ と方向ベクトル $\boldsymbol{d}$

つぎに，関数 $f(\boldsymbol{X})$ の勾配について言及しよう。すでに述べたように，任意の微分可能な関数 $f(\boldsymbol{X})$ の勾配とは，点 $\boldsymbol{X}$ において評価したつぎの偏微分を要素とするベクトル

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) \triangleq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)' \tag{5.46}$$

によって定義される。[43]

さて，この関数 $f(\boldsymbol{X})$ の勾配は，ただ単に方向を示すばかりでなく，さらに重要な意味をもっている。それは，つぎのとおりである。いま，任意の方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ が与えられたものとすれば，次式によって示される $\nabla f(\boldsymbol{X})'\boldsymbol{d}$ は，方向 $\boldsymbol{d}$ に沿った関数 $f(\boldsymbol{X})$ の瞬間変化率[44] を表わしている。

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(\boldsymbol{X}+\tau\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{X})}{\tau} = \nabla f(\boldsymbol{X})'\boldsymbol{d} \tag{5.47}$$

---

43) III 章，第 5 節の (3.93)，参照。ただし，(5.46) は，列ベクトルを表わす。

44) Instantaneous rate of change of f along the direction $\boldsymbol{d}$. いま，$\|\boldsymbol{d}\|=1$ にとり，$\nabla f(\boldsymbol{X})$ と $\boldsymbol{d}$ との成す角を θ とすれば，(5.47) は，$\|\nabla f(\boldsymbol{X})\|\cos\theta$ となる。III 章，第 2 節の (3.39)，参照。

そして，この変化率の値が正である場合，つぎに示す重要な性質がある。

（性質１）

関数 $f(\boldsymbol{X})$ が，点 $\boldsymbol{X}$ において微分可能であり，さらに，つぎの条件，

$$\nabla f(\boldsymbol{X})'\boldsymbol{d}>0 \tag{5.48}$$

をみたす方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ の存在を仮定すれば，$\sigma \geqq \tau > 0$ をみたすすべての τ について，

$$f(\boldsymbol{X}+\tau\boldsymbol{d})>f(\boldsymbol{X}) \tag{5.49}$$

の成立を保証する正のスカラー σ が存在する。

この性質は，つぎのようにして検証される。まず，仮定により，

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{f(\boldsymbol{X}+\tau\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{X})}{\tau}>0 \tag{5.50}$$

が成立する。したがって，極限の定義により，$|\sigma|$ よりも小さいゼロではない τ について，

$$\frac{f(\boldsymbol{X}+\tau\boldsymbol{d})-f(\boldsymbol{X})}{\tau}>0 \tag{5.51}$$

の関係をつねに保証する正のスカラー σ が存在する。それゆえ，この不等式関係の成立を保証する $\tau>0$ を選べば，（性質１）の帰結をうる。

これを端的に述べれば，つぎのようになる。すなわち，その勾配は，もしそれがゼロではないとすれば，僅かな動きでも関数 $f(\boldsymbol{X})$ の値を増加させるような方向をさしているということである。さらに，いま，(5.48) の条件をみたす勾配 $\nabla f(\boldsymbol{X})$ と同じ方向をさしている方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ が与えられたと想定しよう。そのとき，叙上の（性質１）より，その方向への僅かな動きでも，それがまた関数 $f(\boldsymbol{X})$ の値を増加させることが明らかとなる。

かくして，われわれは，制約条件のない非線形計画問題について，その最適解の必要条件を導出することが可能となる。これを（性質２）として述べれば，つぎのようになる。

（性質２）

微分可能な関数 $f(\boldsymbol{X})$ について，点 $\boldsymbol{X}^*$ が E^n 空間内で関数 $f(\boldsymbol{X})$ の値を最大にするとき，つぎの関係が成立する。

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)=0 \tag{5.52}$$

この（性質２）は，さきの（性質１）を用いて，容易に確かめられる。すなわち，いま（5.52）の関数が成立していないものと仮定すれば，$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)\neq 0$ となる。そこで，方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ として，この $\nabla f(\boldsymbol{X}^*)$ を選ぶことにすれば，

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)'\boldsymbol{d}=\nabla f(\boldsymbol{X}^*)'\nabla f(\boldsymbol{X}^*)>0 \tag{5.53}$$

となる。この結果，さきの（性質１）により，$f(\boldsymbol{X}^*)$ よりもさらに大きな目的関数 $f(\boldsymbol{X})$ の値を有する点が存在することになり，最初の最適性の仮定と矛盾することになる。したがって，（性質２）が証明される。

〔実現可能な方向ベクトル〕

ところで，（性質２）は，制約条件がない場合について，n 次元空間内の点 $\boldsymbol{X}^*$ で，関数 $f(\boldsymbol{X})$ の値が最大となるための必要条件を与えるものであった。ここで制約条件がないということは，きわめて重要な意味をもっている。というのは，点 $\boldsymbol{X}^*$ を起点として，

$$\boldsymbol{d}=\nabla f(\boldsymbol{X}^*) \tag{5.54}$$

の方向へ移動することが可能であるからに他ならない。しかしながら，もし制約条件がある場合には，（5.54）によって規定される方向への移動が，その制約条件によって許容され得ない場合が生ずることになる。その結果，（5.54）の成立を仮定した（性質２）の証明が不適切なものとなってしまう。換言すれば，制約条件付きの非線形計画問題について，その最適性を吟味することは，きわめて難しいものとなる。つぎに，この課題に答えるべく，（性質２）の一般化を試みることにしよう。[45] その準備として，**実現可能な方向ベクトル**という概念を導入する必要がある。

いま，n 次元空間内の点 $\boldsymbol{X}$ が，実現可能な点であると仮定しよう。[46] そのとき，点 $\boldsymbol{X}$ における**実現可能な方向ベクトル**とは，十分に小さいスカラー τ

45）これが，いわゆるクーン・タッカーの条件に他ならない。

46）すなわち，この点 $\boldsymbol{X}$ が，制約式（5.43）のすべてをみたすことを意味する。

のすべてについて $\boldsymbol{X}+\tau\boldsymbol{d}$ を構成すれば，それがまた実現可能領域 F のなかに含まれる性質をもった任意の方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ であると定義される。すなわち，$\sigma\geqq\tau\geqq0$ をみたす任意の τ について $\boldsymbol{X}^1+\tau\boldsymbol{d}\in F$ となる正のスカラー σ が存在すれば，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^1$ の点において，方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ は実現可能であるといえる。そこで，点 $\boldsymbol{X}^1$ におけるすべての実現可能な方向ベクトルの集合を $D(\boldsymbol{X}^1)$ で表わせば，それは，つぎのように定義される。

$$D(\boldsymbol{X}^1)\triangleq\{\boldsymbol{d}:\sigma\geqq\tau\geqq0\Longrightarrow\boldsymbol{X}^1+\tau\boldsymbol{d}\in F\text{をみたす}\ \sigma>0\ \text{が存在する}\}\tag{5.55}$$

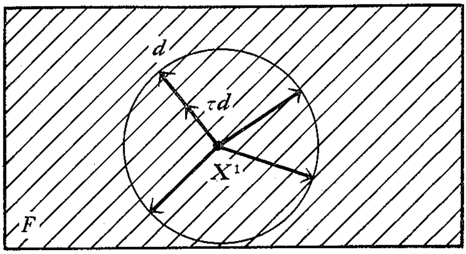
それゆえ，もしわれわれが，点 $\boldsymbol{X}^1$ からごく僅かばかり $\boldsymbol{d}$ の方向へ移動したとしても，その点が依然としてもとの実現可能領域内にとどまる限り，方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ は，実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X}^1)$ のなかにあると述べることができる。

また，これによって明らかなように，(5.55) で定義される実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X}^1)$ は，つねに錐体 (Cone) を形成する。[47] ただし，その錐体が閉集合の場合もあれば，また開集合の場合もありうる。そこで，これを例示したものが，つぎの図60である。

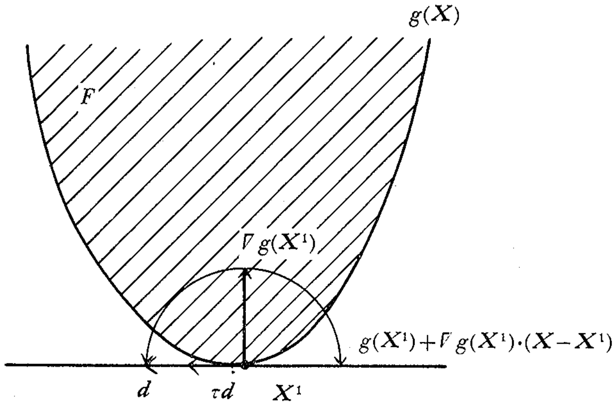
この図60において，制約条件をみたす実現可能領域 F は，いずれも斜線部分で表わされているものとする。そのとき，例１では，点 $\boldsymbol{X}^1$ をこの実現可能領域 F の内点とするとき，その内点 $\boldsymbol{X}^1$ における実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X}^1)$ が，(5.55) の定義により，n 次元の全空間 E^n と一致し，したがって閉集合となっている。これに対して，例２，例３，および例４では，いずれも点 $\boldsymbol{X}^1$ を F の端点としたときの集合 $D(\boldsymbol{X}^1)$ が例示されている。ただし，例３では，$D(\boldsymbol{X}^1)$ が閉集合の錐体を形成しているのに対比して，例２，および例４では，$D(\boldsymbol{X}^1)$ が端点 $\boldsymbol{X}^1$ の接線方向を含まない[48] という意味で，開集合の錐

47)　いま，$D(\boldsymbol{X}^1)$ に含まれるベクトル $\boldsymbol{d}$ について，それをスカラー倍した $\alpha\boldsymbol{d}$ (ただし $\alpha\geqq0$) が，またもとの $D(\boldsymbol{X}^1)$ に含まれるとき，われわれは，この $D(\boldsymbol{X}^1)$ を錐体とよぶ。

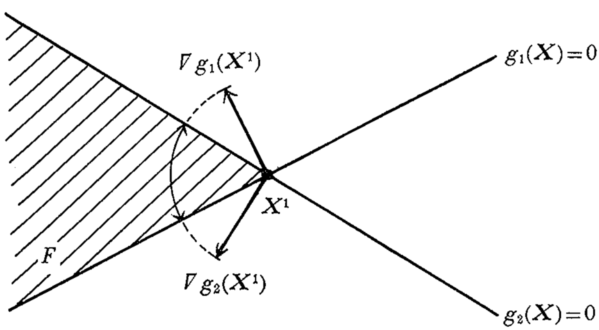
48)　例２では，$\nabla g(\boldsymbol{X}^1)\cdot\boldsymbol{d}=0$ をみたす方向 $\boldsymbol{d}$ が実現可能領域 F から排除されている。同様に，例４では，$\nabla g_1(\boldsymbol{X}^1)\cdot\boldsymbol{d}=0$，または，$\nabla g_2(\boldsymbol{X}^1)\cdot\boldsymbol{d}=0$ をみたす方向 $\boldsymbol{d}$ が実現可能領域 F から排除されている。



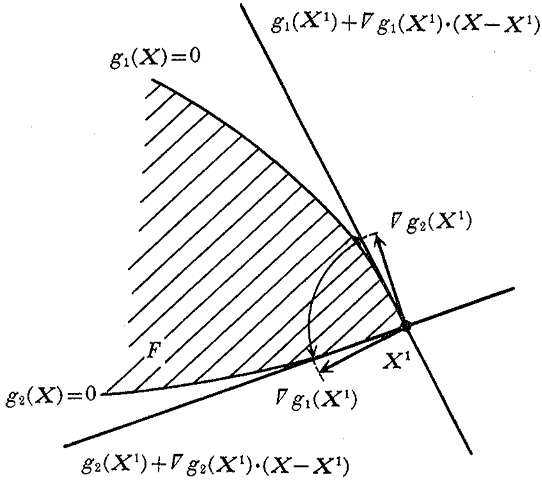
（例 1） $D(X^1)=E^n$



（例 2） $D(X^1)=\{d:\nabla g(X^1)\cdot d>0\}$



（例 3） $D(X^1)=\{d:\nabla g_1(X^1)\cdot d\geqq 0,\ \nabla g_2(X^1)\cdot d\geqq 0\}$



（例４）　$D(X^1)=\{d: \nabla g_1(X^1)\cdot d>0, \nabla g_2(X^1)\cdot d>0\}$

図 60.　実現可能な方向ベクトルの集合

体を形成している。

つぎに，点 X^* が非線形計画問題の最適解であると仮定した場合について，この点 X^* における実現可能な方向ベクトルの集合 $D(X^*)$ によって規定される方向に移動した場合の目的関数の性質を明らかにしておこう。これを（性質3）として述べれば，つぎのようになる。

（性質３）

点 X^* を非線形計画問題の最適解であると仮定すれば，そのとき，$D(X^*)$ に含まれるすべての方向ベクトル d について，つぎの不等式が成立する。

$$\nabla f(X^*)\cdot d \leqq 0 \tag{5.56}$$

この（性質３）は，つぎのようにして検証される。いま，$D(X^*)$ に含まれる方向ベクトル d^* について，(5.56) の不等式が成立しないものと仮定しよう。したがって，その場合には，つぎの不等式

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}^*>0 \tag{5.57}$$

が成立していることになる。これは，さきの（性質１）により，点 $\boldsymbol{X}^*$ を起点として，方向ベクトル $\boldsymbol{d}^*$ の方向に沿った僅かな動きでも，それがまた目的関数 $f(\boldsymbol{X}^*)$ の値を増加させることを意味している。したがって，$\boldsymbol{d}^*$ は，仮定により点 $\boldsymbol{X}^*$ における実現可能な方向ベクトルであることから，その方向に沿った叙上の僅かな動きを認めたとしても，その動かされた点が，またもとの実現可能領域 F に含まれることになる。しかし，これは，点 $\boldsymbol{X}^*$ が最適解であるとした仮定と矛盾することになり，その結果（性質３）が証明される。

つぎに，点 $\boldsymbol{X}^*$ における実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X}^*)$ の閉包 (Closure) を，$\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ で表わすことにしよう。[49] このとき，叙上の（性質３）は，この $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれるすべての方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ についても，やはり成立することが容易に確かめられる。これを（性質４）として述べれば，つぎのようになる。

（性質４）

点 $\boldsymbol{X}^*$ を非線形計画問題の最適解であると仮定すれば，そのとき，$D(\boldsymbol{X}^*)$ の閉包，すなわち $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$，に含まれるすべての方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ について，つぎの不等式が成立する。

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}\leqq 0 \tag{5.58}$$

いうまでもなく，集合 $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ が集合 $D(\boldsymbol{X}^*)$ の閉包であるということは，$\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれる任意の点が，$D(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれる点系列の極限であることを意味する。したがって，$D(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれる任意の点は，つねに $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれるが，その逆は必ずしも成立しない。すなわち，$D(\boldsymbol{X}^*)$ と $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ とが一致するのは，$D(\boldsymbol{X}^*)$ が閉集合である場合に限られるのである。[50]

（性質４）は，（性質３）を用いて，つぎのように証明される。いま，$\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれる方向ベクトル $\boldsymbol{d}^\infty$ によって，$D(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれる方向ベクトル $\boldsymbol{d}^k$ の極限ベクトルを表わすものと想定しよう。すなわち，極限ベクトル $\boldsymbol{d}^\infty$ は，次

49) すなわち，$\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ は，$D(\boldsymbol{X}^*)$ を含んだ最小の閉集合となる。
50) 図60を参照せよ。

式によって定義される。

$$\boldsymbol{d}^{\infty} \triangleq \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{d}^{k} \tag{5.59}$$

仮定により，$\boldsymbol{d}^k$ は $D(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれることから，さきの（性質３）を用いて，すべての k について，つぎの不等式が成立する。

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}^k \leqq 0 \tag{5.60}$$

そこで，方向ベクトル $\boldsymbol{d}^k$ の極限をとれば，

$$\lim_{k\to\infty} \nabla f(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}^k = \nabla f(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}^{\infty} \leqq 0 \tag{5.61}$$

となり，また方向ベクトル $\boldsymbol{d}^{\infty}$ が $D(\boldsymbol{X}^*)$ の閉包，すなわち $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$，に含まれていたこととを合わせ考えれば，（性質４）が明らかとなる。

以上により，われわれは，非線形計画問題の最適点 $\boldsymbol{X}^*$ について，その勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{X}^*)$ と，$D(\boldsymbol{X}^*)$，および $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれる方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ との内積がつねに非正であることを，（性質３），および（性質４）として，それぞれ明らかにした。いまや，われわれは，クーン・タッカーの条件を導出する立場に立ち至っている。その場合，さらに重要な２つの課題が残されている。その１つは，実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X}^*)$ の閉包，すなわち $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$，を非線形計画問題の制約式[51]によって表現することであり，他の１つは，「ファルカスの補題」を用いて，叙上の（性質４）を書き換える[52]ことである。以下，順を追って，これらの課題を解明していくことにしよう。

まず最初に，$\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ を非線形計画問題の制約式によって明示的に表わすことを試みよう。いま，実現可能領域 F に属する点 $\boldsymbol{X}$ について，当該問題の m 個の制約式は，つぎの２つのグループに分けられる。その１つは，点 $\boldsymbol{X}$ において実際にその拘束がきいている[53]制約式のグループで，これを $g_i(\boldsymbol{X})=0$ で表わすことにする。他の１つは，点 $\boldsymbol{X}$ においてその拘束がきいていない[54]制

51）（5.43），参照。
52）すなわち，（性質４）に当該問題の制約条件を明示的に導入することを意味する。
53）すなわち，制約式（5.43）が等号で成立している場合にあたる。
54）すなわち，制約式（5.43）が不等号で成立している場合にあたる。

約式のグループで，これを $g_i(\boldsymbol{X})>0$ で表わすことにする。そこで，点 $\boldsymbol{X}$ において実際にその拘束がきいている制約式の添字の集合を $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})$ で表わすことにすれば，以上の議論はつぎのようにまとめられる。

$$\left.\begin{array}{ll} g_i(\boldsymbol{X})=0, & i\in\mathscr{A}(\boldsymbol{X}) \\ g_i(\boldsymbol{X})>0, & i\notin\mathscr{A}(\boldsymbol{X}) \end{array}\right\} \tag{5.62}$$

つぎの図61は，この関係を例示したものである。

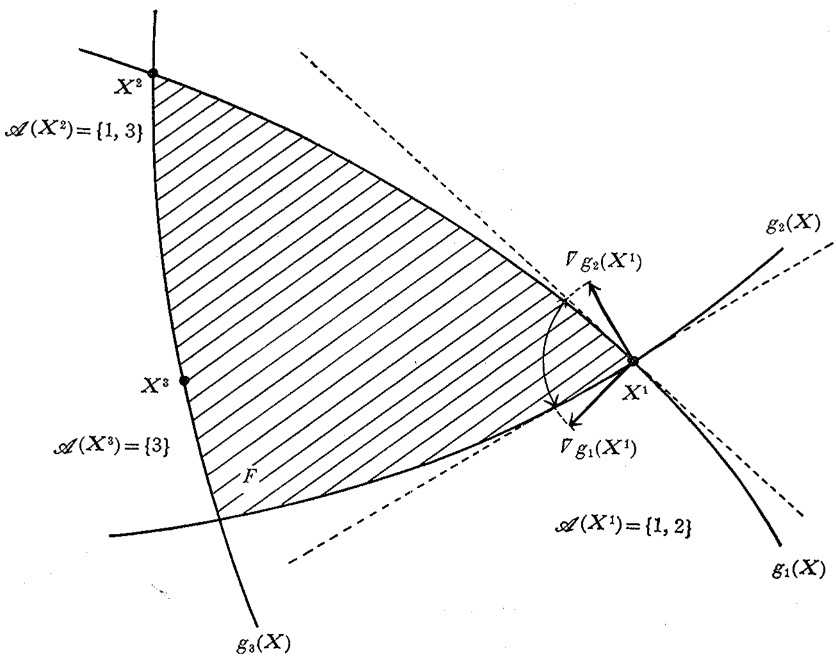


図 61. 実際に拘束する制約式の添字の集合 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})$

したがって，われわれは，集合 $\bar{D}(\boldsymbol{X})$ を当該問題の制約式によって表わす場合，ある点 $\boldsymbol{X}$ に関して実際に拘束がきいている制約式のみを考慮すればよいことになる。なぜなら，いま点 $\boldsymbol{X}$ において $g_i(\boldsymbol{X})>0$ であるものと想定し

よう。そのとき，関数 $g_i(\boldsymbol{X})$ の連続性の仮定によって，点 $\boldsymbol{X}$ から任意の方向へ，その制約条件[55] を破ることなく，僅かばかり移動することが可能となる。それゆえに，点 $\boldsymbol{X}$ に関して実際に拘束がきいていない制約式 $g_i(\boldsymbol{X})$ は，集合 $\bar{D}(\boldsymbol{X})$ になんらの影響も及ぼさないことが明らかとなる。

ところで，いま，もしも方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ が，点 $\boldsymbol{X}$ における実現可能な方向ベクトル——あるいは，$\bar{D}(\boldsymbol{X})$ に含まれる方向ベクトル——を表わすものとすれば，その点において実際に拘束がきいている制約式 $g_i(\boldsymbol{X})$ に関して，つねに

$$\nabla g_i(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{d}\geqq 0 \tag{5.63}$$

の不等式が成立することになる。換言すれば，与えられた方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ と最大の率で増加する方向を示す[56] 勾配ベクトル $\nabla g_i(\boldsymbol{X})$ との成す角度が，つねに鋭角（すなわち，90度以内）であることを意味する。このことは，たとえば，図61の点 $\boldsymbol{X}^1$ において容易に確かめられる。[57]

そこで，いま，ある点 $\boldsymbol{X}$ において実際に拘束がきいている制約式 $g_i(\boldsymbol{X})$ の勾配ベクトル $\nabla g_i(\boldsymbol{X})$ のすべてと鋭角を成す方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ の集合を $\mathscr{D}(\boldsymbol{X})$ として，つぎのように定義しよう。

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{X})\triangleq\{\boldsymbol{d}:\nabla g_i(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{d}\geqq 0,\ \text{ただし，すべての}\ i\in\mathscr{A}(\boldsymbol{X})\} \tag{5.64}$$

そのとき，つぎの性質を得る。

（性質５）

点 $\boldsymbol{X}$ において実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X})$ の閉包，すなわち $\bar{D}(\boldsymbol{X})$，は，その点 $\boldsymbol{X}$ において実際に拘束がきいている制約式 $g_i(\boldsymbol{X})$ の勾配ベクトル $\nabla g_i(\boldsymbol{X})$ のすべてと鋭角を成す方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ の集合，すなわち，$\mathscr{D}(\boldsymbol{X})$，に含まれる。すなわち，つぎの関係が成立する。

---

55)　$g_i(\boldsymbol{X})>0$ を意味する。

56)　なぜなら，もとの制約式が非負，すなわち，$g_i(\boldsymbol{X})\geqq 0$，として与えられているからである。

57)　図61，参照。

$$\bar{D}(\boldsymbol{X}) \subset \mathscr{D}(\boldsymbol{X}) \tag{5.65}$$

この（性質５）は，つぎのようにして検証される。まず最初に，実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X})$ について，方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ がこの集合 $D(\boldsymbol{X})$ に含まれており，さらに，i 番目の制約式の拘束がきいている[58] ものと想定しよう。そこで，もしも $\nabla g_i(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{d}<0$ の関係が成立しているものと仮定すれば，さきの（性質１）によって，十分小さいスカラー τ のすべての値について，次式が成立することになる。

$$g_i(\boldsymbol{X}+\tau\boldsymbol{d}) < g_i(\boldsymbol{X}) = 0 \tag{5.66}$$

ところが，そのような方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ は，もはや実現可能なベクトルとはなり得ない[59] ことから，$\nabla g_i(\boldsymbol{X})\cdot\boldsymbol{d}\geqq 0$ でなければならないことになる。その結果，

$$D(\boldsymbol{X}) \subset \mathscr{D}(\boldsymbol{X}) \tag{5.67}$$

となり，[60] しかも，集合 $\mathscr{D}(\boldsymbol{X})$ が，定義によって閉集合であることから，われわれは，(5.65) の関係を得る。

〔制約条件の限定〕

さて，（性質５）で，われわれは，集合 $\bar{D}(\boldsymbol{X})$ が集合 $\mathscr{D}(\boldsymbol{X})$ の部分集合であること，すなわち，(5.65) の関係がつねに成立すること，を明らかにした。しかし，このことは，(5.64) で定義される集合 $\mathscr{D}(\boldsymbol{X})$ に含まれる方向ベクトルであっても，それが (5.55) で定義される集合 $D(\boldsymbol{X})$ の閉包，すなわち，$\bar{D}(\boldsymbol{X})$，につねに含まれるとは限らないことを意味している。その一例をあげたものが，つぎの図62である。

この場合，実現可能領域 F は，２つの制約式 $g_1(\boldsymbol{X})\geqq 0$，および $g_2(\boldsymbol{X})\geqq 0$ をともにみたす斜線を施した部分として示されており，しかもその F に含まれる実現可能な点 $\boldsymbol{X}^1$ においては，その２つの制約式 $g_1(\boldsymbol{X})$，および $g_2(\boldsymbol{X})$ が接しており，その意味でまた拘束がともにきいている制約条件となってい

---

58) すなわち，点 $\boldsymbol{X}$ において $g_i(\boldsymbol{X})=0$ であることを意味する。
59) (5.63)，参照。
60) (5.64)，参照。

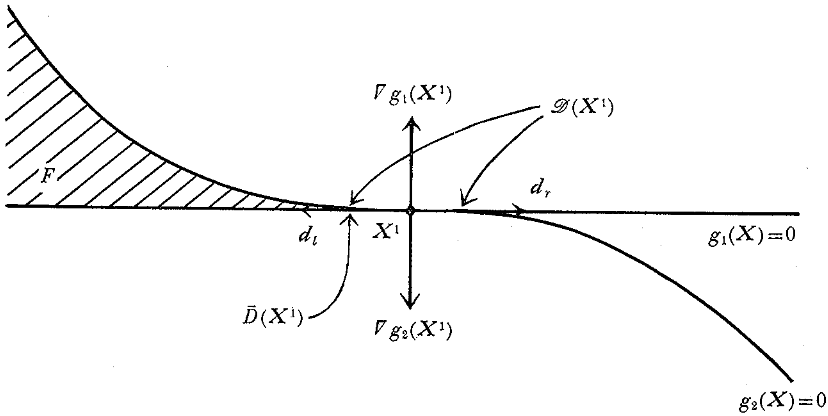


図 62. 集合 $\bar{D}(\boldsymbol{X}^1)$ と集合 $\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^1)$ とが一致しない場合

る。[61) そこで，この点 $\boldsymbol{X}^1$ について，まず $\bar{D}(\boldsymbol{X}^1)$ をその定義により求めれば，それは点 $\boldsymbol{X}^1$ を起点とする左向きのただ１つの方向ベクトル $\boldsymbol{d}_l$ であることが明らかとなる。つぎに，$\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^1)$ を求めれば，それは（5.64）の定義により，点 $\boldsymbol{X}^1$ を起点とする左向きと右向きの２つの方向ベクトル（$\boldsymbol{d}_l$, および $\boldsymbol{d}_r$）となる。したがって，この場合，点 $\boldsymbol{X}^1$ を起点とする右向きの方向ベクトル $\boldsymbol{d}_r$ は，$\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^1)$ に含まれる方向ベクトルではあるが，$\bar{D}(\boldsymbol{X}^1)$ には含まれないことになり，その結果，点 $\boldsymbol{X}^1$ において，

$$\bar{D}(\boldsymbol{X}^1) \neq \mathscr{D}(\boldsymbol{X}^1) \tag{5.68}$$

となることが判明する。

とはいえ，現実の具体的な問題において，このような場合が生ずることはめったにないものと思われる。[62) そこで，われわれは，一般性を失なうことなく，叙上の（性質５）に加えて，さらに $\mathscr{D}(\boldsymbol{X}) \subset \bar{D}(\boldsymbol{X})$ の関係が成立するものと仮

61）　すなわち，$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}^1)=\{1, 2\}$ を意味する。図61，参照。
62）　もし，あったとしても，それは数学上の産物（Mathematical fabrications）にすぎないことが，叙上の例より推測されよう。

定することにしよう。しかし，以下でみるように，この仮定は，具体的問題の解明にとっては，きわめて重要な意味をもっているので，これを制約条件の限定として，明確に定義しておくことにする。

Constraint Qualification の定義

もしも点 $\boldsymbol{X}$ において，

$$\bar{D}(\boldsymbol{X})=\mathscr{D}(\boldsymbol{X}) \tag{5.69}$$

の関係が成立するとき，点 $\boldsymbol{X}$ において Constraint Qualification がみたされている，と定義する。

ちなみに，図60の例2，例3，および例4のそれぞれで示された点 $\boldsymbol{X}^1$ においては，いずれも（5.69）の関係が成立しており，したがって，叙上の定義により，Constraint Qualification がみたされていることが明らかとなる。[63)]

また，点 $\boldsymbol{X}^*$ が非線形計画問題の最適点を表わすものとし，さらにその点において叙上の Constraint Qualification がみたされるということは，その最適点 $\boldsymbol{X}^*$ において，次式の関係が成立することを意味している。

$$\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)=\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^*) \tag{5.70}$$

そこで，この関係が成立することを前提とすれば，第1の課題，すなわち，実現可能な方向ベクトルの集合 $D(\boldsymbol{X}^*)$ の閉包 $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$ を当該問題の制約式によって表わすことは，結局つぎのようにして可能となる。

$$\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)=\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^*)=\{\boldsymbol{d}\colon \nabla g_i(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}\geqq 0,\ \text{ただし,}\ \text{すべての}\ i\in\mathscr{A}(\boldsymbol{X}^*)\} \tag{5.71}$$

したがって，以上の帰結をまとめれば，つぎの（性質6）を得る。[64)]

（性質6）

点 $\boldsymbol{X}^*$ を非線形計画問題の最適解であると仮定する。そのとき，点 $\boldsymbol{X}^*$ において Constraint Qualification がみたされているならば，$\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^*)$ に含まれるすべての方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ について，つぎの不等式が成立する。

63）図60の例2，例3，および例4，参照。
64）（性質4），参照。

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}\leqq 0 \tag{5.72}$$

ただし，集合 $\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^*)$ は，

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{X}^*)=\{\boldsymbol{d}:\ \nabla g_i(\boldsymbol{X}^*)\cdot\boldsymbol{d}\geqq 0,\ \text{ただし，すべての } i\in\mathscr{A}(\boldsymbol{X}^*)\} \tag{5.73}$$

によって与えられるものとする。

〔クーン・タッカーの条件〕

いうまでもなく，この（性質６）は，非線形計画問題の最適点 $\boldsymbol{X}^*$ において Constraint Qualification がみたされていることを前提として，（性質４）の内容を書き換えたものに他ならない。そこで，つぎに，クーン・タッカーの条件を導出する際，残されていたもう１つの課題，すなわち，ファルカスの補題を用いて，（性質４）を書き換えること[65]を試みよう。そのために，まずファルカスの補題を述べれば，つぎのようになる。

ファルカスの補題

A を m 行 n 列の行列とし，$\boldsymbol{q}$ を n 次元の列ベクトルとする。そのとき，

$$A\boldsymbol{X}\geqq\boldsymbol{0} \tag{5.74}$$

をみたすすべての n 次元の列ベクトル $\boldsymbol{X}$ に対して

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{X}\leqq 0 \tag{5.75}$$

が成立するということは，n 次元の列ベクトル $-\boldsymbol{q}$ が，行列 A の各行の非負の１次結合で表わされるということ，すなわち，

$$\boldsymbol{q}+A'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{5.76}$$

をみたす非負の m 次元の列ベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在する，ということと同等である。[66]

65) したがって，（性質６）を当該問題の制約式によって再定式化することを意味する。

66) ただし，ここでは，後で試みる応用のために，一部表現をかえている。したがって，通常の表現によるファルカスの補題は，(5.75) の不等号の向きを逆にし，また n 次元の列ベクトル $-\boldsymbol{q}$ を $\boldsymbol{q}$ と置き換え，その結果，(5.76) を $\boldsymbol{q}=A'\boldsymbol{u}$ とすること

このファルカスの補題は，錐体の理論の基礎をなすもので，計画問題にとって，ことのほか重要な意味をもっている。そこで，この補題の内容を検討することにしよう。

いま，(5.74) の制約条件のもとで，(5.75) の左辺 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{X}$[67] を最大にする線形計画問題を考えれば，つぎのようになる。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Max.} & \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{X} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{X}\geqq\boldsymbol{0}\end{array}\right\} \tag{5.77}$$

また，この線形計画問題に対する双対問題は，双対変数のベクトルを $\boldsymbol{u}$ で表わせば，つぎのようになる。[68]

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Min.} & \boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{u} \\ \text{s.t.} & -A'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q} \\ & \boldsymbol{u}\geqq\boldsymbol{0}\end{array}\right\} \tag{5.78}$$

そこで，もしも (5.74) の制約条件をみたすベクトル $\boldsymbol{X}$ に対して (5.75) が成立する場合には，$\boldsymbol{X}$ をゼロベクトルとおくことによって (5.77) の線形計画問題が有限な最適解をもち，そのときの値はゼロとなることが明らかとなる。さらに，この線形計画問題が最適解をもつということは，双対定理[69]によってその双対問題[70]もまた最適解をもつことになり，それゆえ (5.76) の関係をみたす非負ベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在することになる。

によって与えられる。たとえば，R. Dorfman, P. Samuelson & R. Solow; "Linear Programming and Economic Analysis," 1958. McGraw-Hill, p. 191, pp. 502-506, 参照。

67) すなわち，n 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{X}$ との内積である。

68) 一般に，「$\boldsymbol{X}$ を無制約な変数ベクトルとし，$A\boldsymbol{X}\leqq\boldsymbol{b}$ のもとで $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{X}$ を最大にする」線形計画問題の双対問題は，「$A'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{q}$, および $\boldsymbol{u}\geqq\boldsymbol{0}$ のもとで $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}$ を最小にする」問題として与えられる。それゆえ，表の問題で $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{0}$ とし，また A を $-A$ とおくことによって，(5.77) が導かれ，それに対応する双対問題は，その裏の問題として，(5.78) が直ちに導かれる。Zangwill, *op. cit.*, pp. 328-329.

69) 双対定理 (Duality Theorem) については，たとえば，W. J. Baumol; "Economic Theory and Operations Analysis," 2nd ed. 1961, Prentice-Hall, pp. 103-128, 参照。

70) すなわち，(5.78) によって与えられる問題を指す。

逆に，(5.76) の関係をみたす非負ベクトル $\boldsymbol{u}$ の存在を仮定してみよう。そのとき，(5.76) の関係をみたす非負ベクトル $\boldsymbol{u}$ は，(5.78) の問題に対する有限な最適解を与えることになり，またその値はゼロであることが明らかとなる。それゆえ，(5.78) と双対の関係にある (5.77) の問題も，それと同じゼロの最適解をもつことが双対定理によって保証される。しかし，(5.77) の問題がゼロの最適解をもつということは，とりもなおさず，(5.74) の制約条件をみたすベクトル $\boldsymbol{X}$ に対して (5.75) が成立することを意味しており，その結果，ファルカスの補題が証明されたことを意味する。

つぎに，このファルカスの補題を（性質6）に適用してみよう。そのために，(5.74) の行列 A は，すべての $i\in\mathscr{A}(\boldsymbol{X}^*)$ に対応する制約式 $g_i(\boldsymbol{X})\geqq 0$, の点 $\boldsymbol{X}^*$ における勾配ベクトル $\nabla g_i(\boldsymbol{X}^*)$ を各行としてもつ行列であるとみなし，また，(5.74) の制約条件をみたすベクトル $\boldsymbol{X}$ を，（性質6）における方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ とみなせば，（性質6）の内容は，結局つぎのように言い換えることができる。すなわち，つぎの等式

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^*)+\sum_{i\in\mathscr{A}(\boldsymbol{X}^*)}\lambda_i\nabla g_i(\boldsymbol{X}^*)=0 \tag{5.79}$$

をみたす，非負の乗数 λ_i, ただし $i\in\mathscr{A}(\boldsymbol{X}^*)$, が存在する，と。[71)]

かくして，クーン・タッカーの条件は，ただちに導出される。

クーン・タッカーの条件

つぎの非線形計画問題

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Max.} & f(\boldsymbol{X}) \\ \text{s.t.} & g_i(\boldsymbol{X})\geqq 0,\ i=1,\ 2,\dots,\ m\end{array}\right\} \tag{5.80}$$

ただし，

関数 f, および g_i, $i=1,2,\dots,m$ は，微分可能であるものとする，

に対する最適解を $\boldsymbol{X}^*$ で表わすことにする。そのとき，もしも点 $\boldsymbol{X}^*$ においてConstraint Qualification がみたされているならば，つぎの3つの条件をみたす非負乗数 λ_i, $i=1,2,\dots,m$ が存在する。

---

71) したがって，(5.79) の λ_i は，ファルカスの補題における非負ベクトル $\boldsymbol{u}$ の各要素を表わすことになる。

1) $g_i(\boldsymbol{X}^*) \geqq 0,\ i=1, 2, \ldots, m$ (5.81)

2) $\lambda_i g_i(\boldsymbol{X}^*)=0,\ i=1, 2, \ldots, m$ (5.82)

3) $\nabla f(\boldsymbol{X}^*)+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{X}^*)=0$ (5.83)

したがって，いわゆるクーン・タッカーの条件とは，上記３つの条件に対する総称であり，点 $\boldsymbol{X}^*$ が当該問題の最適解であるということをこれら３つの条件によって置き換えたものに他ならない。そのうち，第１の条件，すなわち (5.81)，は，点 $\boldsymbol{X}^*$ が実現可能であることを意味しているのに過ぎない。つぎに，第２の条件，すなわち (5.82)，は，もしも点 $\boldsymbol{X}^*$ において $g_i(\boldsymbol{X}^*)$ が正であれば，[72] その制約条件 $g_i(\boldsymbol{X}^*)$ にかかる乗数 λ_i は，ゼロであることを意味している。そして，最後に，第３の条件，すなわち (5.83)，は，目的関数の勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{X}^*)$ に負の符号をつけたものが，各制約式の勾配ベクトル $\nabla g_i(\boldsymbol{X}^*)$ の非負の１次結合によって表わされることを意味している。ただし，$i \notin \mathscr{A}(\boldsymbol{X}^*)$ に対する $g_i(\boldsymbol{X}^*)$ はつねに正である[73] ことから，(5.82) によって，その制約式にかかる乗数 λ_i はゼロとなっている。したがって，第３の条件は，ファルカスの補題を（性質６）に適用した理論的帰結，すなわち (5.79) そのものに他ならない。

最後に，クーン・タッカーの条件の幾何学的な意味を検討しておくことにしよう。簡単化のため，実現可能領域 F が３つの制約式 $g_i(\boldsymbol{X}) \geqq 0,\ i=1, 2, 3,$ によって構成され，目的関数 $f(\boldsymbol{X})$ の値を最大にする最適解がつぎの図63の点 $\boldsymbol{X}^*$ で与えられるものと想定する。[74] このとき，点 $\boldsymbol{X}^*$ において実際に拘束がきいている制約式は，$g_1(\boldsymbol{X})$ と $g_2(\boldsymbol{X})$ の２つであり，[75] その結果，

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}^*)=\{1, 2\} \quad (5.84)$$

となる。[76]

---

72) 点 $\boldsymbol{X}^*$ において実際にその拘束がきいていないことを意味する。(5.62)，参照。

73) (5.62)，参照。

74) 図63において，目的関数 $f(\boldsymbol{X})$ の値が最大の率で増加する方向が $\nabla f(\boldsymbol{X}^*)$ として示されていることに注意せよ。

75) したがって，$g_1(\boldsymbol{X}^*)=0$, および $g_2(\boldsymbol{X}^*)=0$ を意味する。

76) (5.62)，および図61，参照。

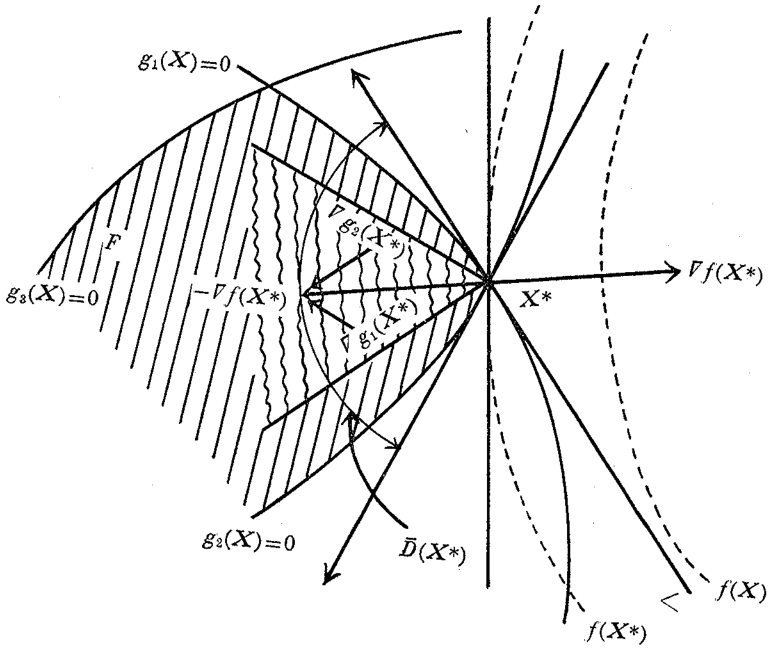


図 63. クーン・タッカーの条件の幾何学的な意味

この図63によって明らかなように，最適点 X^* についての目的関数 $f(X)$ の負の勾配ベクトル $-\nabla f(X^*)$ は，その点で実際に拘束がきいている制約式[77]の勾配ベクトル，すなわち $\nabla g_1(X^*)$，および $\nabla g_2(X^*)$，によって張られる錐体[78]のなかに含まれている。換言すれば，当該問題の最適点 X^* において，$-\nabla f(X^*)$ が $\nabla g_1(X^*)$ と $\nabla g_2(X^*)$ との非負の１次結合で表わされること，すなわち，

$$-\nabla f(X^*)=\lambda_1\nabla g_1(X^*)+\lambda_2\nabla g_2(X^*) \tag{5.85}$$

ただし，

$$\lambda_1,\ \lambda_2\geqq 0$$

77）すなわち，$g_1(X)$，および $g_2(X)$ を意味する。

78）$\{Y\colon Y=\lambda_1\nabla g_1(X^*)+\lambda_2\nabla g_2(X^*),\ \lambda_1\geqq 0,\ \lambda_2\geqq 0\}$ として定義され，図63では，波線部分によって示されている。

が成立することを意味している。そして，この関係が，すでに指摘した（5.83）の具体的内容であり，[79] それがまた，クーン・タッカーの条件の幾何学的な意味を付与するものである。

また，この図63を用いて，すでに述べた（性質4）を検証することができる。[80] すなわち，点 $\boldsymbol{X}^*$ を非線形計画問題の最適点であると仮定すれば，$D(\boldsymbol{X}^*)$ の閉包，すなわち $\bar{D}(\boldsymbol{X}^*)$，に含まれるすべての方向ベクトル $\boldsymbol{d}$ と，目的関数 $f(\boldsymbol{X})$ が最大の率で増加する方向を示すベクトル $\nabla f(\boldsymbol{X}^*)$ とが成す角度がつねに鈍角であること[81] が明らかとなる。さらに，当該問題の制約式に関して Constraint Qualification がみたされておれば，（5.69）の関係が成立する結果，（性質6）もまた同時に検証される。しかし，Constraint Qualification がみたされていない場合には，図62によって明らかなように，点 $\boldsymbol{X}^1$ を最適点 $\boldsymbol{X}^*$ とし，またベクトル $\boldsymbol{d}_r$ を $\nabla f(\boldsymbol{X}^*)$ とみなしたとしても，目的関数 $f(\boldsymbol{X})$ の負の勾配ベクトル $-\nabla f(\boldsymbol{X}^*)$[82] を，$\nabla g_1(\boldsymbol{X}^*)$ と $\nabla g_2(\boldsymbol{X}^*)$ との非負の1次結合として表わすことができないわけである。[83]

§4. 最大原理の導出

以上の検討結果にもとづき，本節ではタイプ2の問題に対する最大原理の導出を試みることにしよう。すでに述べたように，タイプ2の問題では，制御 $\boldsymbol{u}$ に対する拘束が状態変数 $\boldsymbol{X}$ に関係している。[84] すなわち，（5.5），および（5.6）を制御制約とする場合が明示的に取り扱われる。そこで，この制御制約に注目し，（5.6）に関する正則点の定義を，つぎのように与えることにしよう。

正則点の定義

いま，点$(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*, t)\in E^{n+m+1}$ に対して

79） ただし，（5.83）は，当該問題に対するすべての制約式を包含している。しかし $g_3(\boldsymbol{X}^*)$ に対応する乗数 λ_3 は，（5.82）によりゼロとなるため，（5.83）で $g_3(\boldsymbol{X}^*)$ を考慮することが不要となる。

80） （性質4），参照。

81） （性質4）において，（5.58）の不等式が成立することを意味する。

82） すなわち，図62における $\boldsymbol{d}_l$ を意味する。

83） クーン・タッカーの条件のうち，（5.83）の関係をみたす非負乗数 λ_i, $i=1, 2$ が存在しないことを意味する。

84） 本章，第1節，参照。

$$\phi_\alpha(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*, t)=0,\ \alpha=1, 2, \ldots, s \tag{5.86}$$

$$\phi_\alpha(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*, t)>0,\ \alpha=s+1, s+2, \ldots, l \tag{5.87}$$

となるものとする。[85] ただし，$s \leqq m$ とし，つぎの行列関数

$$\begin{bmatrix} \nabla_u \phi_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t) \\ \nabla_u \phi_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t) \\ \vdots \\ \nabla_u \phi_s(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_s}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \phi_s}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_s}{\partial u_m} \end{bmatrix} \tag{5.88}$$

の点 $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ におけるランクが s であるとき，この点 $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ を正則点と定義する。[86]

そこで，もしもこの正則性の条件がみたされている[87]とき，われわれは，

$$\phi_\alpha(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}, t)=0,\ \alpha=1, 2, \ldots, s \tag{5.89}$$

を解くことによって，制御 $\boldsymbol{u}$ の s 個の成分を状態変数 $\boldsymbol{X}$ と制御 $\boldsymbol{u}$ の残りの $(m-s)$ 個の成分の関数として一意的に表わすことができる。すなわち，このことは，点 $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ における制約式 ϕ_α, $\alpha=1, 2, \ldots, s$, の勾配ベクトルの集合 $\{\nabla_u\phi_1, \nabla_u\phi_2, \ldots, \nabla_u\phi_s\}$ が1次独立である結果，われわれが $\boldsymbol{u}$ を動かすことにより，対象を十分に制御できることを意味している。

この正則性の条件が成立していることを前提として，これまでに導いた結果をまとめれば，つぎの〔定理4〕を得る。

〔定理4〕

$\boldsymbol{u}^*(t)$, $(t_0 \leqq t \leqq t_1)$ を，タイプ2の問題における最適制御，$X^*(t)$, $(t_0 \leqq$

---

85) もしも必要ならば，(5.6) の各制約式に与えられている添字の番号をつけかえることによって (5.86)，および (5.87) を得ることができる。それゆえ，$l \geqq s \geqq l-l'$ をみたしている。

86) その結果，正則点$(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ において，接平面が定義されることになる。III 章，第2節の (3.35)，および，III 章，第5節の図32，参照。

87) すなわち，(5.88) のランクが s である。

$t \leqq t_1$) を，対応する最適トラジェクトリー上の点とし，各点 ($X^*(t)$, $\boldsymbol{u}^*(t)$, t) は，**正則点**であるとする。このとき，つぎの条件をみたす乗数 $\lambda_0 \geqq 0$, $\lambda_i(t)$, $\mu_\alpha(t)$, ($i=1, 2, \ldots, n$; $\alpha=1, 2, \ldots, l$; $t_0 \leqq t \leqq t_1$) が存在し，これらは同時にすべてゼロとはならない。

(a) $\lambda_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ は，つぎの方程式の解であり，t に関して連続である。

$$\dot{\lambda}_i = -\partial L(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}(t), t)/\partial x_i, \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{5.90}$$

ただし，

$$L(X, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, t) = H(X, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) + \sum_{\alpha=1}^{l} \mu_\alpha \phi_\alpha(X, \boldsymbol{u}, t) \tag{5.91}$$

$$H(X, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(X, \boldsymbol{u}, t) \tag{5.92}$$

(b) $$H(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{u} \in U(X(t), t)} H(X^*(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), t) \tag{5.93}$$

(c) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*(t)$ において，

$$\partial L(X^*(t), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\mu}(t), t)/\partial u_i = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n;\ t_0 \leqq t \leqq t_1 \tag{5.94}$$

(c′) $$\mu_\alpha(t)\phi_\alpha(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t) = 0, \ \alpha=1, 2, \ldots, l' \tag{5.95}$$

$$\mu_\alpha(t) \geqq 0, \ \alpha=1, 2, \ldots, l' \tag{5.96}$$

ただし，

$\mu_\alpha(t)$ は区分的に連続であり，$\boldsymbol{u}^*(t)$ の連続区間では連続である。

(c″) $$\phi_\alpha(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t) \geqq 0, \ \alpha=1, 2, \ldots, l' \tag{5.97}$$

$$\phi_\alpha(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t) = 0, \ \alpha=l'+1, l'+2, \ldots, l \tag{5.98}$$

(d) ベクトル $\boldsymbol{\lambda}(t)$ は，$t=t_0$，および $t=t_1$ でそれぞれ対応する端点の多様体 θ^0，および θ^1 に直交する。

この〔定理4〕について，とくに留意すべき事項を述べれば，つぎのとおりである。まず，その第1は，定理の前提となる正則性の条件に関するものである。すなわち，点 $(X^*(t), \boldsymbol{u}^*(t), t)$ が正則点であるということは，その点において Constraint Qualification がみたされていることを意味しており，またそれは，〔定理4〕が成立するための十分条件ではあっても，必要条件ではないということである。したがって，いま，点$(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)$において実際に拘束がきいている s 個の制約条件，すなわち（5.86）のうち，偶然にもその2つが全く同じ式であったと仮定してみよう。すなわち，

$$\phi_i(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)=\phi_j(X^*, \boldsymbol{u}^*, t),\ i\neq j \tag{5.99}$$

の関係が成立しているものと仮定しよう。そのとき，行列関数(5.88)のランクは，当然 s よりも小さくなり，それゆえに，点 $(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ は正則性の条件をみたさないことになる。しかし，この場合でも，その同一な式がいずれもゼロである条件をみたしている結果，そのうちの1つを取り除くことによって，当該問題の最適解を求めることが可能となる。したがって，(5.86) をみたす制約式の間に，もしも1次従属の関係があるとすれば，ただそれだけで正則性の条件がみたされないことになる。その意味で，正則性の条件は，〔定理4〕が成立するための十分条件ではあっても，必要条件ではないといえる。

つぎに，第2の留意すべき点として，問題の定式化が，定理の適用にとってとくに重要な意味をもつことが指摘できる。すでに，われわれは，制御制約の差異にもとづき最適制御問題を3つのタイプに分類[88]し，さらにそれに応じてタイプ1の問題を解く手段として〔定理3〕[89]を，またタイプ2の問題を解く手段として〔定理4〕[90]を，それぞれ導出した。しかし，とくに注意を要することは，同じ内容の問題であっても，取り上げる変数の定義の仕方によって，それをタイプ1の問題として定式化することもできる場合があることである。

---

88) II 章，第5節，参照。
89) III 章，第5節の〔定理3〕，参照。
90) 本章，第4節の〔定理4〕，参照。

換言すれば，本来タイプ2の問題として定式化されるべきものであっても，その多くは，制御変数を適当に定義しなおすことによってタイプ1の問題に変換できるということである。その一例をあげれば，つぎのようになる。

いま，タイプ1の問題例として与えたラーマン・モデル（その1）に注目しよう。[91] その状態方程式は，地域別の資本ストック，K_1，および K_2 を状態変数として，次式によって与えられた。[92]

$$\dot{K}_1(t)=\beta(t)\{g_1K_1(t)+g_2K_2(t)\} \tag{5.100}$$

$$\dot{K}_2(t)=(1-\beta(t))\{g_1K_1(t)+g_2K_2(t)\} \tag{5.101}$$

また，制御制約は，配分パラメター β を制御変数として，

$$0\leqq\beta(t)\leqq1 \tag{5.102}$$

によって与えられた。[93] したがって，この制御 β は，状態，K_1，および K_2 に関係しない E^1 の部分集合 U に属している結果，タイプ1の問題とみなされる。[94]

しかし，この同じ投資の地域間配分を問題とするラーマン・モデルについて，地域別の投資を新たな制御変数とみなせば，まえと同じ K_1，および K_2 を状態変数とする状態方程式は，

$$\dot{K}_1=u_1 \tag{5.103}$$

$$\dot{K}_2=u_2 \tag{5.104}$$

として与えられ，また，u_1，および u_2 を制御変数とする制御制約は，

$$u_1\geqq0,\quad u_2\geqq0 \tag{5.105}$$

$$u_1+u_2=g_1K_1+g_2K_2 \tag{5.106}$$

として与えられる。これを書き換えれば，

---

91) IV章，第1節，参照。
92) (5.100) が (4.13) に，(5.101) が (4.14) に，それぞれ対応する。
93) (5.102) が (4.16) に対応する。
94) II章，第5節の (2.31)，あるいは，またIII章，第5節の (3.122) に対応する。

$$\phi_1 = u_1 \geqq 0 \tag{5.107}$$

$$\phi_2 = u_2 \geqq 0 \tag{5.108}$$

$$\phi_3 = u_1 + u_2 - g_1 K_1 - g_2 K_2 = 0 \tag{5.109}$$

となる。[95] その結果，(5.109) より明らかなように，制御 u_i, $(i=1, 2)$ は，状態変数 K_i, $(i=1, 2)$ に関する E^2 の部分集合 $U(K(t))$ に属するものと考えられる。[96] したがって，同じ内容の問題であっても，それがこのように定式化されれば，それをわれわれは，タイプ２の問題であるとみなさねばならなくなるのである。[97]

最後に，〔定理３〕と〔定理４〕との比較を試みることによって，〔定理３〕とは異なる〔定理４〕の特徴を要約的に明らかにしておこう。まず，その形式的な差異に注目すれば，〔定理３〕での随伴方程式は，ハミルトニアン関数 H を

$$H \triangleq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(X, \boldsymbol{u}) \tag{5.110}$$

と定義する[98] ことによって，

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\nabla_x H, \qquad i=1, 2, \ldots, n \tag{5.111}$$

として与えられた。[99] しかるに，〔定理４〕での随伴方程式は，このハミルトニアン関数 H に加えて，新たに関数 L を

$$L \triangleq H + \sum_{\alpha=1}^{l} \mu_\alpha \phi_\alpha(X, \boldsymbol{u}, t) \tag{5.112}$$

---

95) 本章，第１節の (5.6)，参照。

96) II 章，第５節の (2.32)，あるいは，また本章，第１節の (5.5) に対応する。

97) もとより，両問題の解が同じになることはいうまでもない。その検討を，次章で試みることにする。

98) II 章，第５節の (3.123) に対応する。

99) II 章，第５節の (3.125) に対応する。〔定理３〕の (a)，参照。

と定義する[100] ことによって，

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\left\{ \nabla_x H + \sum_{\alpha=1}^{l} \mu_\alpha \nabla_x \phi(X, \boldsymbol{u}, t) \right\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad (5.113)$$

として与えられた。[101] したがって，限界面に対する放線ベクトルの変換にとって，とくに重要な意味をもつ随伴方程式[102] が，〔定理 3〕の (5.111) から〔定理 4〕の (5.113) へと変更されている点に注意を払う必要がある。

つぎに，第 2 の形式的な差異として，〔定理 3〕の条件 (b) では，U に属する制御 $\boldsymbol{u}$ に関してハミルトニアン関数 H の最大化が試みられているのに対して，〔定理 4〕の条件 (b) では，$U(X, t)$ に属する制御 $\boldsymbol{u}$ に関してその最大化が試みられていることが指摘される。[103] すなわち，前者は，

$$\max_{\boldsymbol{u} \in U} H(X^*, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) \qquad (5.114)$$

を求めているのに対して，後者は，

$$\max_{\boldsymbol{u} \in U(X, t)} H(X^*, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \qquad (5.115)$$

を求めている。[104] これが，〔定理 3〕と〔定理 4〕との比較により明らかにされる第 2 の形式的な差異である。

そこで，この第 2 の差異がもつ意味をさらに立ち入って検討してみよう。なぜなら，そうすることによって，2 つの定理における条件 (c) の違いもおのずと明らかにされ，またそれが，第 1 の差異とも密接な関連をもっているからである。そのために，まず後者の制御領域 $U(X, t)$ が (5.6) によって規定され

---

100) (5.91) に対応する。なお，(5.112) は，Lagrange form を与えるものである。

101) (5.90) に対応する。〔定理 4〕の (a)，参照。ただし，ここでのハミルトニアン関数 H は，非オートノマス系を処理するために導入された変数 t を除けば，〔定理 3〕のそれと同じ内容のものである。

102) III 章，第 3 節，参照。

103) 〔定理 3〕の条件 (b) と〔定理 4〕の条件 (b) とを比較せよ。

104) すなわち，(5.114) が (3.126) に，(5.115) が (5.93) に，それぞれ対応する。

ていることを想起して，(5.115) の**条件付き最大化問題**を書き換えれば，つぎのようになる。

$$\left.\begin{array}{l}\text{Max } H(X, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \\ \text{s.t. } \phi_\alpha(X, \boldsymbol{u}, t) \geqq 0, \alpha=1, 2, \ldots, l' \\ \quad\phi_\alpha(X, \boldsymbol{u}, t)=0, \alpha=l'+1, l'+2, \ldots, l\end{array}\right\} \tag{5.116}$$

これは，制約条件の一部が等式である場合の非線形計画問題そのものに他ならない。[105)]

したがって，いま点 $(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ によってこの問題の最適解を表わし，しかもその点で Constraint Qualification がみたされているものと仮定すれば，すでに明らかにしたように，その最適点についていわゆるクーン・タッカーの条件が成立する[106)] ことになる。すなわち，その第1条件は，点 $(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ が実現可能であることを意味するものであり，ここでは，それがつぎのようになる。

$$\left.\begin{array}{ll}\phi_\alpha(X^*, \boldsymbol{u}*, t) \geqq 0, & \alpha=1, 2, \ldots, l' \\ \phi_\alpha(X^*, \boldsymbol{u}*, t)=0, & \alpha=l'+1, l'+2, \ldots, l\end{array}\right\} \tag{5.117}$$

いうまでもなく，これは〔定理4〕の条件 (c″) に他ならない。[107)]つぎに，クーン・タッカーの第2条件は，不等式制約にかかる乗数がゼロであることを意味するが，ここでは，制約条件の一部が等式である結果，それをつぎのように表わすことができる。すなわち，つぎの条件

$$\mu_\alpha \phi_\alpha(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)=0, \alpha=1, 2, \ldots, l' \tag{5.118}$$

をみたす非負乗数 μ_α, $\alpha=1, 2, \ldots, l'$, および無制約乗数 μ_α, $\alpha=l'+1, l'+2, \ldots, l$ が存在する，と。[108)] これより明らかなように，乗数 μ_α が非負となるのは不等

105) 本章，第3節の (5.42)，および (5.43)，参照。ただし，等式による制約 $g_i(X)=0$ は，2つの不等式による制約 $g_i(X) \geqq 0$, および $-g_i(X) \geqq 0$ が同時にみたされることと同じである。

106) (5.81)，(5.82)，および (5.83) を同時にみたす非負乗数 λ_i, $i=1, 2, \ldots, m$ が存在する。

107) 〔定理4〕の条件 (c″)，参照。

108) $\alpha=l'+1, l'+2, \ldots, l$ に関して乗数 μ_α が無制約であるというのは，その μ_α が正，ゼロ，負のいずれの値もとりうることを意味する。なお，$\alpha=l'+1, l'+2, \ldots, l$ に関

式制約にかかるものであって，等式制約にかかる乗数は正，ゼロ，負のいずれかをとることになる。[109] そして，これが〔定理４〕の条件 (c′) を構成する。[110]
最後に，クーン・タッカーの第３条件は，目的関数の勾配ベクトルに負の符号をつけたものが，各制約式の勾配ベクトルの非負の１次結合として表わされることを意味しており，ここでは，それがつぎのように表わされる。[111]

$$-\nabla_u H(X^*, \boldsymbol{u}* \boldsymbol{\lambda}, t)=\sum_{\alpha=1}^{l}\mu_\alpha \nabla_u \phi_\alpha(X^*, \boldsymbol{u}*, t) \qquad (5.119)$$

ただし，

$\nabla_u H$ は，ハミルトニアン関数 H を制御 $\boldsymbol{u}$ に関して偏微分したものであり，$\nabla_u\phi_\alpha(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ は，制約式 $\phi_\alpha(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)$ を制御 $\boldsymbol{u}$ に関して偏微分したものである。

これは，いうまでもなく，〔定理４〕の条件 (c) を解いた結果と一致する。[112]

以上により，われわれは，第２の差異がもつ意味を明らかにした。それを踏まえて，つぎに再び第１の差異に立り帰り，その内容の検討を加えておくことにしよう。

すでに，われわれは,〔定理３〕を導出する過程で,最適点 $X^*(t)$ とその近傍 $\Delta(X^*(t))$，および接平面 $T_{\Sigma_c}(X^*(t))$ の変換について重要な理論的帰結を得ている。[113] その帰結とは，もしもわれわれが,もとの点 $X^*(t_0)$，およびその点の近傍 $\Delta(X^*(t_0))$ を最適制御 $\boldsymbol{u}^*(t)$ で動かし，その接平面をトラジェクトリー方程式の変分方程式で規定される線形変換 $A(t, t_0)$ で動かせば，それによって変換された新しい接平面は，最適制御で動かされた点，およびその近傍の同じ接平面になっている，という性質であった。しかし，タイプ２の問題をとり扱

して $\phi_\alpha(X^*, \boldsymbol{u}^*, t)=0$ がつねに成立する結果，(5.118) における l' を l まで延長しても，内容の変更はみられない。

109) その意味で，クーン・タッカーの第２条件，すなわち，(5.82)，は，不等式制約に言及しているものであるともいえる。

110) 〔定理４〕の条件 (c′)，参照。

111) 等式による変更を受けていることに注意せよ。

112) 〔定理４〕の条件 (c)，参照。

113) III 章，第４節の〔補助定理６〕，および図30，参照。

う場合，最適点 $X^*(t)$ の近傍，すなわち，$\Delta(X^*(t))$，を最適制御 $\boldsymbol{u}^*(t)\in U(X(t),t)$ で動かすことがつねにできるという保証はない。換言すれば，$X(t)\neq X^*(t)$ に対しては，$\boldsymbol{u}^*(t)\in U(X(t),t)$ が許容制御であるか否かが全く不明なのである。[114] したがって，最適点の近傍 $\Delta(X^*(t_0))$ を変換するトラジェクトリーが，すべての $t\in[t_0, t_1]$ についてつねに $U(X,t)$ に含まれる許容制御によって形成されるべく，その制御を変更する必要が生ずることになる。

〔定理４〕の前提として導入された正則性の条件が意味をもつのは，このためである。すなわち，点 $X^*(t)$ を正則点であると仮定することによって，われわれは，その近傍 $\Delta(X^*(t))$ を変換する許容制御 $\boldsymbol{u}(t)$ を見つけることが可能となる。これを敷衍すれば，つぎのようになる。いま，m 次元の制御ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，つぎの２つに分けて考えよう。[115]

$$\boldsymbol{u}^c \triangleq (u_1, u_2, \cdots, u_s) \tag{5.120}$$

$$\boldsymbol{u}^a \triangleq (u_{s+1}, u_{s+2}, \cdots, u_m) \tag{5.121}$$

すなわち，

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}^c, \boldsymbol{u}^a) \tag{5.122}$$

として表わされる。そこで，この制御ベクトル $\boldsymbol{u}$ のうち $\boldsymbol{u}^c$ は，(5.89)を解くことにより，残りの $\boldsymbol{u}^a$ の関数として一意的に求められる。したがって，いま，

$$\boldsymbol{u}^a=(u^*_{s+1}, u^*_{s+2}, \cdots, u^*_m) \tag{5.123}$$

とおき，これを $\boldsymbol{u}^{a*}$ で表わせば，(5.89) は，

$$\phi_\alpha(X, \boldsymbol{u}^c, \boldsymbol{u}^{a*}, t)=0 \tag{5.124}$$

となり，その結果，

$$\boldsymbol{u}^c=U^c(X, \boldsymbol{u}^{a*}, t) \tag{5.125}$$

---

114)　実現可能であるとは限らない，ということである。

115)　この考え方は，〔A〕3, pp. 107–112, に負っている。ただし，ここでは，制御ベクトル $\boldsymbol{u}$ を行ベクトルで表わすことにする。

が許容制御になっている。[116] かくして，〔定理４〕における変分方程式は，

$$\dot{\eta}_i=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_i(X,\ U^c(X,\ \boldsymbol{u}^{a*},\ t),\ \boldsymbol{u}^{a*})}{\partial x_j}\bigg|_{X=X^*(t)}\eta_j,\qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n \tag{5.126}$$

となり，[117] またこれに対応する随伴方程式は，

$$\dot{\lambda}_i=-\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f_j(X,\ U^c(X,\ \boldsymbol{u}^{a*},\ t),\ \boldsymbol{u}^{a*})}{\partial x_i}\bigg|_{X=X^*(t)}\lambda_j,\qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n \tag{5.127}$$

となる[118] わけである。そして，この随伴方程式，すなわち，(5.127) が，〔定理４〕の条件 (a)，すなわち，(5.90) と等しくなり，また，それゆえに (5.113) と等しくなるわけである。[119]

VI

この章では，タイプ２の問題の応用として，すでに取り上げた投資の地域間配分を問題とするラーマン・モデル[120] に再度注目し，〔定理３〕を用いて求めた解と，〔定理４〕を用いて求めた解とが，全く同じになることを確かめることにする。[121] いうまでもなく〔定理３〕は，タイプ１の問題を解くために導出されたものであり，また〔定理４〕は，タイプ２の問題を解くために導出されたものである。そのために，同じ内容をもつラーマン・モデルを，タイプ１の問題，およびタイプ２の問題としてそれぞれ定式化しておく必要がある。

まず，IV 章の第１節で取り上げたラーマン・モデル（その１）は，タイプ

---

116) それゆえ，$U(X(t),t)$ に含まれる制御 $\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{u}^c(t),\boldsymbol{u}^{a*}(t))$ を近傍の変換に用いることができる。

117) III 章，第４節の (3.73) と比較せよ。

118) III 章，第４節の (3.85) と比較せよ。

119) ただし，$U^c(X,\boldsymbol{u}^{a*},t)$ には x_0 が明示的に含まれていないことに注意せよ。

120) IV 章，第１節，参照。

121) 脚注97)，参照。

1の問題であり，つぎのように定式化された。[122]

タイプ1のラーマン・モデル

つぎの目的関数，

$$\int_0^T \{b_1\dot{K}_1(t)+b_2\dot{K}_2(t)\}\,dt \tag{6.1}$$

を，以下の制約に従って最大にする配分パラメター $\beta(t)$, $(0\leqq t\leqq T)$ を求めよ。

$$\dot{K}_1(t)=\beta(t)\{g_1K_1(t)+g_2K_2(t)\} \tag{6.2}$$

$$\dot{K}_2(t)=(1-\beta(t))\{g_1K_1(t)+g_2K_2(t)\} \tag{6.3}$$

$$K_i(0)=K_i^0(>0),\ i=1,\ 2 \tag{6.4}$$

$$0\leqq\beta(t)\leqq1 \tag{6.5}$$

しかし，これと同じ内容をもつ投資の地域間配分の問題も，地域別の投資水準を新たな制御変数とみなすことによって，つぎのようなタイプ2の問題に書き換えることができる。[123]

タイプ2のラーマン・モデル

つぎの目的関数，

$$\int_0^T \{b_1\dot{K}_1(t)+b_2\dot{K}_2(t)\}\,dt \tag{6.6}$$

を，以下の制約に従って最大にする投資水準 $u_i(t)$, $(i=1,\ 2;\ 0\leqq t\leqq T)$ を求めよ。

$$\dot{K}_1(t)=u_1 \tag{6.7}$$

$$\dot{K}_2(t)=u_2 \tag{6.8}$$

---

122) IV章，第1節の**ラーマン・モデル**（その1），参照。ただし，$g_i=b_is_i$, $(i=1,2)$ は，いずれも正であるものとする。

123) したがって，β でとらえる率から，u_i, $(i=1,2)$ でとらえる量へと変更していることになる。

$$K_i(0)=K_i^0(>0),\ i=1,\ 2 \tag{6.9}$$

$$u_1 \geqq 0 \tag{6.10}$$

$$u_2 \geqq 0 \tag{6.11}$$

$$u_1+u_2-g_1K_1-g_2K_2=0 \tag{6.12}$$

このうち，前者の問題に対して，すでにわれわれは〔定理3〕を適用して，その最適解の吟味を試みている。[124] そこで，後者の問題をここで具体的に求めることは避け，それに代わって，叙上の2つの問題を最終的に解くことになる常微分方程式とそれに付随した最適制御変数の決定ルールが同値なものになることを確かめることにしよう。

そのために，まず後者の問題，すなわち，タイプ2のラーマン・モデルに対して〔定理4〕を適用してみよう。いま，$\lambda_0=1$ とおき，(5.92) にしたがってハミルトニアン関数を構成すれば，つぎのようになる。[125]

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i f_i \\ &= (b_1\dot{K}_1+b_2\dot{K}_2)+\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 \end{aligned} \tag{6.13}$$

簡単化のため，

$$b_i+\lambda_i=p_i, \qquad i=1,\ 2 \tag{6.14}$$

とおき，[126] (6.7)，および (6.8) を (6.13) に代入すれば，

$$H=p_1u_1+p_2u_2 \tag{6.15}$$

を得る。

さらに，また，このハミルトニアン関数を用いてラグランジュ形式 L を構成すれば，(5.91) より，つぎのようになる。[127]

124) IV章，第1節の展開がこれにあたる。
125) V章，第4節の (5.92)，参照。
126) IV章，第1節の (4.19)，参照。
127) V章，第4節の (5.91)，参照。

$$L=H+\sum_{\alpha=1}^{3}\mu_\alpha\phi_\alpha \tag{6.16}$$

ただし，ここでの制約式 $\phi_\alpha, \alpha=1, 2, 3$ は，叙上の問題における（6.10)，（6.11)，および（6.12）を，それぞれ表わしている。[128] それゆえ，すでに導いた（6.15）を考慮すれば，ラグランジュ形式（6.16）は，結局つぎのようになる。

$$\begin{aligned}L&=H+\mu_1u_1+\mu_2u_2+\mu_3(u_1+u_2-g_1K_1-g_2K_2)\\&=(p_1+\mu_1+\mu_3)u_1+(p_2+\mu_2+\mu_3)u_2-\mu_3(g_1K_1+g_2K_2)\end{aligned} \tag{6.17}$$

また，ハミルトニアン関数の構成の際に導入された乗数 $\lambda_i, (i=1, 2)$ は,〔定理４〕の条件 (a) によって，つぎの随伴方程式の解でなければならない。[129]

$$\dot{\lambda}_i=-\frac{\partial L}{\partial K_i}=\mu_3 g_i, \qquad i=1, 2 \tag{6.18}$$

他方,（6.14）の関係式で，$b_i, (i=1, 2)$ が仮定により定数であることから，

$$\dot{\lambda}_i=\dot{p}_i, \qquad i=1, 2 \tag{6.19}$$

が成立する。[130] したがって，新しく導入された補助変数 $p_i, (i=1, 2)$ は，つぎの常微分方程式（6.20）の解でなければならない。

$$\dot{p}_i(t)=\mu_3 g_i, \qquad i=1, 2 \tag{6.20}$$

さらに，また，この補助変数 $p_i, (i=1, 2)$ は，〔定理４〕の条件（d）により，つぎに示す終端条件をみたさねばならない。まず，与えられた問題において，初期時刻（$t=0$）における地域別資本ストックの状態 θ^0 は，(6.9）によって，つぎのように指定されている。

$$K_i(0)=K_i^0(>0), \qquad i=1, 2 \tag{6.21}$$

しかし，最終時刻（$t=T$）における地域別資本ストックの状態 θ^1 は，前以っ

128) Ｖ章，第４節の（5.107)，（5.108)，および（5.109）に対応する。
129) Ｖ章，第４節の（5.90)，および（6.17)，参照。
130) IV 章，第１節の（4.22)，参照。

て何ら指定されていない。それゆえ，その状態が任意に変化する方向を示すベクトルとつねに直交する放線ベクトルの成分（すなわち，$\lambda_i(T), i=1, 2$）は，ゼロでなければならない。換言すれば，λ_i,（$i=1, 2$）に関する終端条件は，

$$\lambda_i(T)=0, \qquad i=1, 2 \tag{6.22}$$

となる。[131] したがって，これを新しい補助変数 p_i,（$i=1, 2$）について書き換えれば，(6.14) より，

$$p_i(T)=b_i, \qquad i=1, 2 \tag{6.23}$$

を得る。[132]

つぎに，クーン・タッカーの条件である〔定理4〕の条件（c)〜(c″) を，与えられた問題に対して逐一求めれば，以下のように示される。まず，〔定理4〕の条件 (c) は，ラグランジュ形式 L が (6.17) で与えられていることから，つぎのようになる。[133]

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}=p_i+\mu_i+\mu_3=0, \qquad i=1, 2 \tag{6.24}$$

また，双対定理にもとづく〔定理4〕の条件（c′）は，不等式制約に対応する $\alpha=1, 2$ に関して，$\mu_\alpha \phi_\alpha=0$ と $\mu_\alpha \geqq 0$ との2種類から成り立っている。[134] そのうち，前者に対応するものとして，

$$\mu_1 u_1=0 \tag{6.25}$$

$$\mu_2 u_2=0 \tag{6.26}$$

を得，[135] また，後者に対応するものとして，

$$\mu_1 \geqq 0 \tag{6.27}$$

---

131) IV章，第1節の (4.24)，参照。
132) IV章，第1節の (4.25)，参照。
133) V章，第4節の (5.94)，参照。
134) V章，第4節の (5.95)，および (5.96)，参照。
135) さらに，$u_1+u_2-g_1K_1-g_2K_2=0$ である結果，$\mu_3(u_1+u_2-g_1K_1-g_2K_2)$ を加えてもよい。なお，この点については，脚注108)，参照。

$$\mu_2 \geqq 0 \tag{6.28}$$

を得る。さらに，また，実現可能領域内の点であることを保証する〔定理４〕の条件（c''）は，制御変数に関する不等式制約（6.10），および（6.11）と等式制約（6.12）が，そのままの形で生かされる。すなわち，

$$u_1 \geqq 0 \tag{6.29}$$

$$u_2 \geqq 0 \tag{6.30}$$

$$u_1 + u_2 - g_1 K_1 - g_2 K_2 = 0 \tag{6.31}$$

となる。[136]

そして，最後に，与えられた問題の最適条件は，〔定理４〕の条件（b）によって，つぎのように示される。[137]

$$\underset{u \in U(X(t),\, t)}{\mathrm{Max}} \; H = p_1 u_1 + p_2 u_2 \tag{6.32}$$

したがって，最大原理は，この場合，(6.15）のハミルトニアン関数 H が最大となるように，制約変数 u_i,（$i=1, 2$）を許容された——すなわち，〔定理４〕の条件（c)～(c''）をみたす——制御領域 $U(X(t), t)$ のなかから選択すべきことを，われわれに教えている。

そこで，つぎに〔定理４〕の条件（c)～(c''）を考慮しながら，かかる最適性の条件を吟味することにしよう。いま（6.24）により，補助変数 p_i,（$i=1, 2$）と未知乗数 μ_i,（$i=1, 2$）との関係が，つぎのように導かれる。

$$p_1 - p_2 = \mu_2 - \mu_1 \tag{6.33}$$

ここで，一般性を失なうことなく，つぎの仮定を導入することにしよう。

$$p_1 > p_2 \tag{6.34}$$

すなわち，この仮定は，第１地域における投資の影の価格が，第２地域のそれよりも高いことを意味している。[138] その結果，われわれは，(6.33）の関係よ

136）Ｖ章，第４節の（5.97），および（5.98），参照。したがって，$l'=2, l=3$ となる。
137）Ｖ章，第４節の（5.93），および（6.15），参照。
138）IV 章，第１節の脚注174），参照。

り，未知乗数 μ_i, $(i=1, 2)$ に関するつぎの不等式を得る。

$$\mu_2 > \mu_1 \tag{6.35}$$

もとより，この未知乗数 μ_i, $(i=1, 2)$ は，〔定理4〕の条件（c′）の拘束を受けており，それゆえに，いずれも非負でなければならない。[139)]

このとき，つぎに示す2つの場合が考えられる。その第1は，μ_1, および μ_2 がともに正である場合であり，その第2は，μ_1 はゼロであるが，μ_2 は正となる場合である。そこで，この各々の場合について，さらに検討してみよう。

まず，第1の場合には，

$$\mu_2 > \mu_1 > 0 \tag{6.36}$$

が成立する。それゆえ，この関係は，〔定理4〕の条件（c′）によって，

$$u_1 = 0 \tag{6.37}$$

$$u_2 = 0 \tag{6.38}$$

を意味する。[140)] しかしながら，このことは，われわれの最初の仮定と矛盾する。なぜなら，つねに正値をとる g_i, $(i=1, 2)$[141)] と経済学的に有意な地域別初期資本ストックの水準[142)] に関して，(6.12) をみたす許容制御 u_i, $(i=1, 2)$ は，決してゼロにはなり得ないからである。したがって，この第1の場合は，最適条件をみたすものではないことが判明する。

つぎに，第2の場合を検討してみよう。この場合には，

$$\mu_2 > \mu_1 = 0 \tag{6.39}$$

が成立している。そして，μ_2 が正であることは，〔定理4〕の条件（c′）によって，

$$u_2 = 0 \tag{6.40}$$

---

139) (6.27), および (6.28) による。
140) (6.25), および (6.26) による。
141) IV 章，第1節の (4.5), および脚注122), 参照。
142) (6.4), または (6.9) の成立を意味する。

を意味する。[143] その結果，(6.40) を (6.31) に代入すれば，

$$u_1 = g_1K_1 + g_2K_2 \tag{6.41}$$

となり，さらに (6.7) を考慮すれば，

$$\dot{K}_1(t) = g_1K_1 + g_2K_2 \tag{6.42}$$

となる。また，(6.40) を (6.8) に代入すれば，

$$\dot{K}_2(t) = 0 \tag{6.43}$$

となる。

さらに，また，(6.39) によって，μ_1 がゼロである結果，これを〔定理 4〕の条件 (c)，すなわち，(6.24)，に代入すれば，

$$p_1 = -\mu_3 \tag{6.44}$$

となることが判明する。

つぎに，タイプ 1 の問題に対する〔定理 3〕の適用結果を検討することにしよう。p_1 が p_2 よりも大であるとするわれわれの仮定[144] は，〔定理 3〕を用いてタイプ 1 のラーマン・モデルを解いた最適条件のうち，

$$\beta = 1 \tag{6.45}$$

であることを意味している。[145] すなわち，このことは，当該 2 地域より生ずる総貯蓄をつねに第 1 地域のみに投資配分すべきことを教えている。したがって，ここでの帰結，すなわち，(6.45) をタイプ 1 の問題における状態方程式[146] にそれぞれ代入すれば，つぎのようになる。

$$\dot{K}_1(t) = g_1K_1 + g_2K_2 \tag{6.46}$$

$$\dot{K}_2(t) = 0 \tag{6.47}$$

143) (6.26) による。
144) すなわち，(6.34) の成立を意味する。
145) IV 章，第 1 節の (4.27)，参照。
146) IV 章，第 1 節の (4.13)，および (4.14) を意味する。

そして，これは，〔定理４〕を用いて導出した状態方程式，すなわち，(6.42)，および (6.43)，と全く同じ式であることが明らかとなる。

また，(6.45) の最適条件を補助変数 p_i，($i=1, 2$) のみたすべき常微分方程式147) に代入すれば，つぎのようになる。

$$\dot{p}_i(t) = -p_1 g_i, \qquad i=1, 2 \tag{6.48}$$

さらに，ここで，〔定理４〕の条件(c) によって得た (6.44) の関係を (6.48) に代入すれば，

$$\dot{p}_i(t) = \mu_3 g_i, \qquad i=1, 2 \tag{6.49}$$

となり，これもまた，〔定理４〕より導かれた補助変数 p_i，($i=1, 2$) に関する常微分方程式，すなわち，(6.20)，と一致することが明らかとなる。

しかもまた，資本ストックに関する初期条件，および補助変数 p_i，($i=1, 2$) に関する終端条件が，叙上の２つの問題について共通している148) 結果，われわれは，それらの問題を解くことになる常微分方程式とそれに付随した最適制御変数の決定ルールが同値なものである，と結論づけることができる。

以上のことから明らかなように，ある与えられた最適制御問題をただ解くということにだけ限定していえば，〔定理３〕を用いる方が〔定理４〕を用いるよりも煩雑さの程度が少ないという意味で，より有効だと判じ得よう。とはいえ，ときとしてわれわれは，与えられた問題の状況に応じて，当該問題をただ単に解くだけでなく，さらにまた，その解釈や制約条件の意味づけ等をも必要とする曲面に遭遇する。そして，かかる曲面に立ち至ったとき，与えられた問題の解法のみにとりつかれ，〔定理３〕に比して一層含蓄に富む〔定理４〕の重要性を否定しさることは，早計に失するといわざるを得ない。

〔未完〕

〔付　記〕
心ならずも，再度未完になったが，紙幅と時間の関係上，タイプ２の問題の検討をもって，ひとまず，ここで稿を閉じることにする。

---

147) IV 章，第１節の (4.23) を意味する。

148) IV 章，第１節の (4.15) が (6.21) と同値であり，また，IV 章，第１節の (4.25) が (6.23) と同値である。