ショートノート

指数型スペクトルを有する系列の生成モデル

正員 堀川 洋†

A Model Generating Sequences with Exponential Spectra

Yo HORIKAWA†, Member

† 長崎総合科学大学工学部機械工学科，長崎市

Faculty of Engineering, Nagasaki Institute of Applied Science, Nagasaki-shi, 851-01 Japan

あらまし 線形微分方程式系を定常確率系列に対するフィルタとみたときの表式（特性）を与えた．特に，指数型スペクトルを有する系列の生成フィルタとなる．例として，神経軸索上のパルス列の伝播における分散関係モデル（交通流問題における追従モデル），および理想特性を有する場合などを示した．

1. まえがき

定常確率系列のパワースペクトルモデルとして，次式のような指数型の表式がある[1]．

$$S(\omega)=\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n\omega)\right) \tag{1}$$

パラメータ：c_n はケプストラム[2]に当たり，この表式は，ディジタルフィルタの対数振幅特性近似問題[3],[4]などと関連して，工学的に有用である．

本稿では，このような指数型スペクトルを有する系列が，線形微分方程式系の解系列として得られることを示し，関連した特性，および幾つかの例を示す．

2. モデル

次式のような定数係数線形微分方程式系を考える．

$$dT_j(x)/dx=\sum_{n=0}^{\infty}b_nT_{j-n}(x)$$
$$\left(-\infty<j<\infty,\ 0\leqq x\leqq X,\ \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|<\infty\right) \tag{2}$$

この系は，初期系列：$\{T_j(0)\}$ として確率過程の標本系列を与えたとき，系列：$\{T_j(X)\}$ を生成する，X をパラメータとする因果的線形フィルタを構成する．このとき，系のインパルス応答：$h_j(X)$（$\{T_j(0)\}=\{\delta_{j0}\}$ に対する生成系列，系の基本解），伝達関数：$H(z;X)$，および周波数応答関数：$G(\omega;X)$ は，以下のように与えられる．

$$h_j(X)=\exp(b_0X)\sum_{r=1}^{j}\sum_{\Sigma r_n=j}\left\{\left(\prod_{n=1}^{r}b_{r_n}\right)X^r/r!\right\}$$
$$\left(=\exp(b_0X)\sum_{\Sigma nr_n=j}\prod_{n=1}^{\infty}(b_nX)^{r_n}/r_n!\right) \tag{3}$$

$$H(z;X)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}h_n(X)z^{-n}$$
$$=\exp\left(X\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}\right)$$
$$(|z|\geqq R_b,\quad R_b<1) \tag{4}$$

$$|G(\omega;X)|^2=\exp\left(2X\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos(n\omega)\right)$$
$$\angle G(\omega;X)=-X\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega)$$
$$(0\leqq\omega\leqq\pi) \tag{5}$$

特に，初期系列を定常白色雑音系列：$\{\varepsilon_j;E\{\varepsilon_j\}=0,E\{\varepsilon_j\varepsilon_k\}=\delta_{jk}\}$ とするとき，生成系列は，指数型のパワースペクトルを有する（$S(\omega)=|G(\omega;X)|^2$, $c_n=2Xb_n$）．その相関関数：$R_k(X)$ は，式(6)のような畳み込みで表され，式(7)に示す対称性を持つ系の基本解として与えられる．

$$R_k(X)=1/\pi\int_0^{\pi}|G(\omega;X)|^2\cos(k\omega)d\omega$$
$$=\sum_{j_2=-\infty}^{\infty}\sum_{j_3=-\infty}^{\infty}\cdots\{I_{k+2j_2+3j_3+\cdots}(2b_1X)$$
$$\cdot I_{j_2}(2b_2X)I_{j_3}(2b_3X)\cdots\}\exp(2b_0X)$$
$$I_k(z)=(z/2)^k\sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^{2n}/(n!(n+k)!)$$
$$\text{：第1種変形 Bessel 関数} \tag{6}$$

$$dR_k(x)/dx=\sum_{n=0}^{\infty}b_{|n|}\{R_{k-n}(x)+R_{k+n}(x)\} \tag{7}$$

系列の復元（白色化）は，式(2)を x について逆向きに解くことに相当する．従って，$H(z;X)^{-1}=H(z;-X)$ であり，系は，次のように片側移動平均（MA）過程，および自己回帰（AR）過程としての表式を合わせ持ち，最小位相推移特性を有する．

$$T_j(X)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(X)\varepsilon_{j-n}\quad\text{(MA)} \tag{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}h_n(-X)T_{j-n}(X)=\varepsilon_j\quad\text{(AR)} \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}h_n(-X)R_{n+k}(X)=h_k(X)$$
$$\text{(Yule-Walker 方程式)} \tag{10}$$

また，$\sum_{n=0}^{\infty}b_n=0, b_n\geqq 0\ (n>0)$ であるときには，式(2)および式(7)はマスター方程式とみなせ，$h_j(X)$ および $R_k(X)$ は確率分布型になる．

3. 例

［例1］ 1階差分型

$$b_0=-1,\ b_1=1,\ b_n=0\quad(n>2) \tag{11}$$

$$h_j(X)=\exp(-X)X^j/j!$$
$$\text{：Poisson 分布} \tag{12}$$

$$H(z;X)=\exp(X(1/z-1))\quad(|z|>0) \tag{13}$$

$$|G(\omega;X)|^2=\exp(2X(\cos(\omega)-1))$$
$$\angle G(\omega;X)=-X\sin(\omega) \tag{14}$$

$$R_k(X)=\exp(-2X)I_k(2X) \tag{15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-X)^n/n!\,I_{n+k}(2X)=X_k/\Gamma(k+1)$$

$$\text{(Yule-Walker 方程式)} \qquad (16)$$

これは，神経軸索上のパルス列の伝播における分散関係モデル[5]，あるいは交通流問題における追従モデル[6]において，速度関数を線形近似した場合に当たる．

［例 2］ 幾何級数型

$$b_n=b_1\cdot b^{n-1} \quad (n>0) \qquad (17)$$

$$h_j(X)=\exp(b_0X)L_j^{(-1)}(-(b_1/b)X)b^j$$

$$L_j^{(\alpha)}(x)=\sum_{n=0}^{j}\Gamma(j+\alpha+1)x^n/\{\Gamma(\alpha+n+1)(j-n)!\,n!\}$$

$$\text{: Laguerre の陪多項式} \qquad (18)$$

$$H(z\,;\,X)=\exp\{X(b_0+b_1/(z-b))\} \qquad (19)$$

$$|G(\omega\,;\,X)|^2=\exp\{2X(b_0+b_1(\cos(\omega)-b)/(1-2b\cos(\omega)+b^2))\}$$

$$\angle G(\omega\,;\,X)=-b_1X\sin(\omega)/(1-2b\cos(\omega)+b^2) \qquad (20)$$

式(2)は，次式のように1階差分型に帰着する．例1のモデルにおいては，速度関数に先行速度の線形補正項を導入した場合に当たる．

$$dT_j(x)/dx=b_0T_j(x)+(b_1-bb_0)T_{j-1}(x)+bdT_{j-1}(x)/dx \qquad (21)$$

［例 3］ 対数級数型

$$b_n=b^n/n\ (n>0),\ (b_0=\log(1-b)) \quad (|b|<1) \qquad (22)$$

$$h_j(X)=\Gamma(X+j)/(\Gamma(X)j!)(1-b)^Xb^j$$

$$\text{: 負の 2 項分布} \quad (b>0) \qquad (23)$$

$$H(z\,;\,X)=\{(1-b)/(1-b/z)\}^X \quad (|z|>|b|) \qquad (24)$$

$$|G(\omega\,;\,X)|^2=(1-b)^{2X}/(1-2b\cos(\omega)+b^2)^X$$

$$\angle G(\omega\,;\,X)=-X\tan^{-1}\{b\sin(\omega)/(1-b\cos(\omega))\} \qquad (25)$$

$$R_k(X)=(1-b)^{2X}b^{|k|}\Gamma(|k|+X)/(\Gamma(X)|k|!)\cdot F(X,|k|+X,|k|+1\,;\,b^2)$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,;\,z)=\Gamma(\gamma)/(\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta))\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)/\Gamma(\gamma+n)(z^n/n!)$$

$$\text{: Gauss の超幾何級数} \qquad (26)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nb^{n-k+|n+k|}\Gamma(X+|n+k|)/\{\Gamma(X-n+1)|n+k|!\,n!\}\cdot F(X,X+|n+k|,|n+k|+1\,;\,b^2)=\Gamma(X+k)/(\Gamma(X+1)\Gamma(k+1))$$

$$\text{(Yule-Walker 方程式)} \qquad (27)$$

$b\to1$ のとき，パワースペクトルは次のような ω のべきの形を持つ．

$$|G(\omega\,;\,X)|^2=\exp(2b_0X)/(2\sin(\omega/2))^{2X} \sim\exp(2b_0X)\omega^{-2X} \quad (\omega\to0) \qquad (28)$$

$b\to-1$ のとき，次のような直線位相特性を持つ．

$$|G(\omega\,;\,X)|^2=\exp(2b_0X)/(2\cos(\omega/2))^{2X}$$

$$\angle G(\omega\,;\,X)=\begin{cases}X\omega/2 & (0\leqq\omega<\pi)\\ 0 & (\omega=\pi)\end{cases} \qquad (29)$$

［例 4］ 三角級数型

$$b_n=\sin(n\theta)/n \quad (n>0,\ 0<\theta<\pi) \qquad (30)$$

$$H(z\,;\,X)=\exp\{X(b_0+\tan^{-1}\{\sin(\theta)/(z-\cos(\theta))\})\} \quad (|z|\geqq1) \qquad (31)$$

$$|G(\omega\,;\,X)|^2=\begin{cases}\exp(X(2b_0+\pi-\theta)) & (0\leqq\omega<\theta)\\ \exp(X(2b_0+\pi/2-\theta)) & (\omega=\theta)\\ \exp(X(2b_0-\theta)) & (\theta<\omega\leqq\pi)\end{cases}$$

$$\angle G(\omega\,;\,X)=-X/2\log|\sin((\omega+\theta)/2)/\sin((\omega-\theta)/2)| \qquad (32)$$

$$R_k(X)=\begin{cases}\exp\{X(2b_0-\theta)\}(\theta\exp(\pi X)+\pi-\theta)/\pi & (k=0)\\ \exp\{X(2b_0-\theta)\}(\exp(\pi X)-1)\sin(k\theta)/k\pi & (k\neq0)\end{cases} \qquad (33)$$

$b_0=(\theta-\pi)/2$ のとき，$X\to\infty$ において遮断周波数：θ とする低域通過型（$b_0=\theta/2$ のとき，$X\to-\infty$ において高域通過型）の理想振幅特性を持つ．

4. む す び

指数型スペクトルを有する系列を生成するフィルタモデルを示した．このモデルは，確率分布（の特性関数）とマスター方程式との対応に他ならないが，本稿で示した観点は，軸索上の神経パルス列，あるいは道路上の自動車流の相互作用による間隔系列の変化などに対して適用することができる．また，$b_n\sim O(1/n)$ なる長距離相互作用のある場合に，（このような線形系においても）近似的に逆べき型などの特異なスペクトルが生じることは，上の例において $1/f$ スペクトルが観測されていること[7],[8]と合わせて興味深い．

文 献

(1) 中塚利直：“時系列解析の数学的基礎”，教育出版（昭 53）．

(2) A. V. Oppenheim and R. W. Schafer: “Digital Signal Processing”, Prentice-Hall, New Jersey (1975). 伊達玄訳：“ディジタル信号処理（上），（下）”，コロナ社（昭 53）．

(3) 今井 聖：“対数振幅近似（LMA）フィルタ”，信学論（A），**J63-A**，12，pp. 886-893（昭 55-12）．

(4) 小林隆夫，今井 聖：“任意対数振幅特性を近似する IIR

フィルタの反復設計法", 信学論(A), **J70-A**, 9, pp. 1234-1240 (昭62-09).

(5) R. M. Miller and J. Rinzel: "The dependence of impulse propagation speed on firing frequency, dispersion, for the Hodgkin-Huxley model", Biophys. J., **36**, pp. 227-259 (1981).

(6) G. B. Whitham: "Linear and Nonlinear Waves", John Wiley & Sons, New York (1974).

(7) T. Musha, Y. Kosugi, G. Matumoto and M. Suzuki: "Modulation of the time relation of action potential impulses propagating along an axon", IEEE Trans. Biomed. Eng., **BME-28**, 9, pp. 616-623 (Sept. 1981).

(8) T. Musha and H. Higuchi: "The $1/f$ fluctuation of a traffic current on an expressway", Jpn. J. Appl. Phys., **15**, 7, pp. 1271-1275 (1976).

(9) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信: "岩波数学公式 I, II, III", 岩波書店 (昭31, 32, 35).

(昭和63年8月31日受付, 平成元年1月23日再受付)