

単位根の漸近理論とその応用

久松博之

1. はじめに

本稿では Peter C.B. Phillips とその共著者たちによって展開されてきた、いわゆる “Local to Moderate Unit Root Theory” について、それまでの単位根の推定と検定に関するいくつかの理論的な研究と関連付けながら、分布の漸近理論を体系的にサーベイする。また、この中で取り上げている **near explosive case** における最小 2 乗推定量の極限分布について、単位根の場合の非標準的 (nonstandard) な分布から、根が 1 より大きい場合の極限分布 (Cauchy 分布) に至るいわゆる遷移分布 (transition distribution) について、数値評価が可能な形で分布の導出を試みる。¹

1 階の自己回帰過程 (AR(1) : Autoregressive Process of order 1) を考える。

$$X_t = \rho X_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

ここで、 $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ 。

$\rho = 1$ のとき、系列 $\{X_t\}$ は単位根 (unit root) をもつという。 $\rho < 1$ のとき系列 $\{X_t\}$ は定常過程、 $\rho > 1$ のとき発散過程になる。それぞれの場合、normalizer を $g(n)$ とするとき、標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho} - \rho)$ の分布の漸近理論は White(1958), Anderson(1959) などで展開されている。

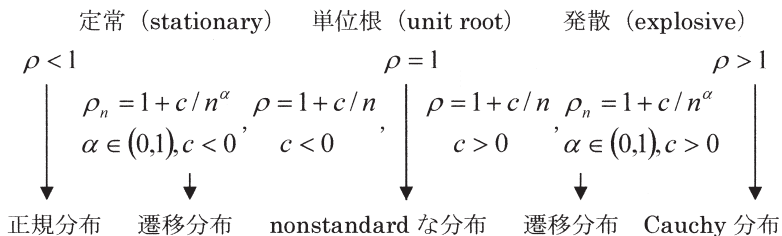
一方、 $\rho = 1 + c/n$ 、ただし、 c は任意の定数で n は観測値数、は AR(1) 係数が 1 に近い場合を想定したもので Phillips(1987), Perron(1989) などで分布の漸近理論が展開されている。いわゆる、near integrated case,

¹ 本稿は文部科学省科学研究費 (課題番号 : 26380279) の補助を得て行っている研究成果の一部である。本稿作成にあたり広島経済大学の前川功一教授から貴重な助言を得た。ここに感謝するとともに誤謬等があれば一切筆者自身の責任によるものである。

つまり $\rho = \exp(c/n)$ という想定で, $\rho = \exp(c/n) \approx 1 + c/n$ である.

$\rho_n = 1 + c/n^\alpha, \alpha \in (0,1)$ で $\alpha \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 1$ の場合の漸近理論は Phillips and Magdalinos(2006, 2007), Giraitis and Phillips(2006)などで展開されている. また, $\rho_n = 1 + c/k_n$, ただし $k_n = m/n$, で n 個の観測値を k_n 個ずつ m ブロックに分け, $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ のとき ρ がゆるやかに 1 に近づく場合の分布の漸近理論が Phillips, Magdalinos and Giraitis(2010)で展開されている. そこでは, それまでの漸近理論では扱われなかった ρ の値が単位根から定常値をとる場合の分布の移り変わり, つまり nonstandard な分布と正規分布の間を橋渡しする分布を, 正規分布まわりの漸近展開で求めた. また, ρ の値が単位根と発散値の間の分布の移り変わり, つまり nonstandard な分布と Cauchy 分布との間を橋渡しする分布を, Cauchy 分布まわりの漸近展開で求めた. ここでいう漸近展開とはサンプルサイズ n に関する power series ではなく, ブロックの分割数 m に関する power series で, m の値ごとに漸近分布が異なっている.

unit root passage (定常過程, 単位根, 発散過程) を, ρ の想定ごとに整理すると次のようになる. 矢印の先には, $\rho < 1, \rho = 1, \rho > 1$ のときの, ρ の最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho} - \rho)$ の極限分布をそれぞれ示した.



上記の区分の, 正規分布と nonstandard な分布を橋渡しするための遷移分布 (transition distribution) と, Cauchy 分布と nonstandard な分布を橋渡しするための遷移分布を求めるために, Phillips, Magdalinos and Giraitis(2010)では, n 個の観測値を K 個ずつ m 個のブロックに分けて

$n=mK$ と置いて、まず $\rho_{m,n} = 1 + cm/n$ で m を固定して、 $n \rightarrow \infty$ のときの漸近分布を求め、次に $m \rightarrow \infty$ のときの漸近分布を求めている。

本稿では、第2節で Local to Moderate Unit Root Theory について、Phillips, Magdalinos and Giraitis(2010)の内容を中心に、White(1958), Phillips(1987), Perron(1989), Evans and Savin(1981), Satchell(1984)らによる先行研究と関連付けながら分布の理論を整理する。第3節では、最小2乗推定量の、非標準的 (nonstandard) な分布から Cauchy 分布に至る遷移分布について、数値評価が可能な形で分布の導出を試みる。

2. Local to Moderate Unit Root Theory について

ρ がゆるやかに 1 に近づく場合を表現するために、 $\rho_n = 1 + c/k_n$,

$k_n = n/m$, n 個の観測値を k_n 個ずつ m ブロックに分ける。たとえば

m	k_n	$\rho_n = 1 + c/(n/m)$	α	$\rho_n = 1 + c/n^\alpha$
1	n	$\rho_n = 1 + c/(n/1) = 1 + c/n$	1	$\rho_n = 1 + c/n$
2	$n/2$	$\rho_n = 1 + c/(n/2)$		
10	$n/10$	$\rho_n = 1 + c/(n/10)$		
\sqrt{n}	n/\sqrt{n}	$\rho_n = 1 + c/(n/\sqrt{n}) = 1 + c/\sqrt{n}$	0.5	$\rho_n = 1 + c/\sqrt{n}$
100	$n/100$	$\rho_n = 1 + c/(n/100)$		
n	n/n	$\rho_n = 1 + c/(n/n) = 1 + c$	0	$\rho_n = 1 + c$

と場合分けをすると,

- (1) $c < 0 \cdots \rho$ が 1 より少し小さい値. $n \rightarrow \infty$ のとき $\rho \rightarrow 1$.
 (2) $c > 0 \cdots \rho$ が 1 より少し大きい値. $n \rightarrow \infty$ のとき $\rho \rightarrow 1$.

であり, $n \rightarrow \infty$ のとき $m=2$ で $k_n = n/2$, $\rho_n = 1 + c/(n/2)$ は, $m=1$ で $k_n = n$, $\rho_n = 1 + c/(n/1) = 1 + c/n$ に比べ 1 に近づく速さが半分, また, $m=10$ で $k_n = n/10$, $\rho_n = 1 + c/(n/10)$ は 1 に近づく速さが 1/10 という想定になる. なお, m の値ごとに漸近分布が異なる.

前節(1)式の係数 ρ を次のように $\rho_n = 1 + c/n^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ と想定する.

$$\begin{aligned} X_t &= \rho_n X_{t-1} + u_t, \quad t=1,2,\dots,n & (2) \\ \rho_n &= 1 + c/n^\alpha, \quad \alpha \in (0,1) \end{aligned}$$

たとえば, $\alpha=0$ のとき $\rho_n = 1 + c$, $\alpha=0.5$ のとき $\rho_n = 1 + c/\sqrt{n}$, $\alpha=1.0$ のとき $\rho_n = 1 + c/n$ である. $c > 0$ のとき ρ は 1 より少し大きく, $c < 0$ のとき ρ は 1 より少し小さいという想定になる. “少し” の程度が, α の値で決まる. $\rho_n = 1 + c/n$ のとき, この式の ρ_n を最小 2 乗法で推定する場合を考える.

このとき, $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ は, $g(n) = n$ とおくと

$$n(\hat{\rho}_n - \rho_n) = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} - \rho_n \right) = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1} - \rho_n \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right)$$

$$= n \left\{ \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1}(X_t - \rho_n X_{t-1})}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right\} = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \quad (3)$$

と展開できる.

Phillips(1987), Perron(1989)より, $n \rightarrow \infty$ のとき, 次式の矢印右辺の Wiener Process の汎関数の比で表された確率変数と同値な nonstandard な分布にしたがう.

$$n(\hat{\rho}_n - \rho_n) = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \Rightarrow \frac{\int_0^1 J_c(r) dW(r)}{\int_0^1 J_c(r)^2 dr} \quad (4)$$

ここで, $J_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} dW(s)$ であり, W は標準ブラウン運動である.

次に, (2) 式の係数 ρ_n を, n を K 個ずつ m ブロックに分け $n = mK$ とおいて, $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$ と想定する.

$$X_t = \rho_{n,m} X_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$\rho_{n,m} = 1 + cm/n$$

このとき, $\rho_{n,m}$ を最小 2 乗法で推定する場合を考える. $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ は, $g(n) = n$ とおくと,

$$n(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} - \rho_{n,m} \right) \tag{6}$$

$$= n \left\{ \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} (X_t - \rho_{n,m} X_{t-1})}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right\} = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}$$

と展開できる. Phillips, Magdalinos and Giraitis(2010)より, m を固定して n→∞のとき, nonstandard な極限分布

$$n(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^1 J_{cm}(s) dW(s)}{\int_0^1 J_{cm}(s)^2 ds} = \frac{\frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{1}{m^2} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} = m \frac{\int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds}$$

に収束する. ここで,

$$\tilde{J}_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} d\tilde{W}(s), \quad \tilde{W}(t) = \sqrt{m} \cdot W\left(\frac{t}{m}\right)$$

である.

以下, c < 0, c > 0, c = 0 のときの分布の漸近理論, つまり漸近分布と分布の漸近展開について, 先行研究と関連付けながら整理する.

2.1 $c < 0$ のときの漸近分布

$g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ で $g(n) = n/\sqrt{m}$, m を固定して $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &= \frac{n}{\sqrt{m}} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\frac{1}{m} \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \\ &\Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} \end{aligned} \tag{8}$$

さらに, $m \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow N(0, -2c). \tag{9}$$

となる.

$c < 0$ のときの漸近分布の導出は以下の通りである.

$J_c(s) = \int_0^s e^{c(s-r)} dW(s)$ より, $r = u/m$, $s = v/m$ とおいて $J_{cm}(s)$ を定義する.

$$\begin{aligned} J_{cm}(s) &= \int_0^{ms} e^{cm(s-r)} dW\left(\frac{u}{m}\right) = e^{cms} \int_0^{ms} e^{-cmr} dW\left(\frac{u}{m}\right) \\ &= e^{cms} \int_0^v e^{-cu} dW\left(\frac{u}{m}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

この式を次式に代入して展開すると,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 J_{cm}(s) dW(s) &= \int_0^1 e^{cms} \int_0^v e^{-cu} dW\left(\frac{u}{m}\right) dW(s) \\
&= \int_0^m e^{cv} \int_0^v e^{-cu} dW\left(\frac{u}{m}\right) dW\left(\frac{v}{m}\right) \\
&= \frac{1}{m} \int_0^m e^{cv} \int_0^v e^{-cu} d\left\{\sqrt{m}W\left(\frac{u}{m}\right)\right\} d\left\{\sqrt{m}W\left(\frac{v}{m}\right)\right\} \quad (11) \\
&= \frac{1}{m} \int_0^m e^{cv} \int_0^v e^{-cu} d\tilde{W}(u) d\tilde{W}(v) \\
&= \frac{1}{m} \int_0^m \int_0^v e^{c(v-u)} d\tilde{W}(u) d\tilde{W}(v) = \frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 J_{cm}(s)^2 ds &= \int_0^1 \left(e^{cms} \int_0^v e^{-cu} dW\left(\frac{u}{m}\right) \right)^2 ds \\
&= \int_0^1 e^{2cms} \left(\int_0^{ms} e^{-cu} dW\left(\frac{u}{m}\right) \right)^2 ds \\
&= \frac{1}{m} \int_0^1 e^{2cms} \left(\int_0^{ms} e^{-cu} d\tilde{W}(u) \right)^2 ds \quad (12) \\
&= \frac{1}{m^2} \int_0^m e^{2cv} \left(\int_0^v e^{-cu} d\tilde{W}(u) \right)^2 dv \\
&= \frac{1}{m^2} \int_0^m \left(\int_0^v e^{c(v-u)} d\tilde{W}(u) \right)^2 dv = \frac{1}{m^2} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds
\end{aligned}$$

となる。

$c < 0$ のとき、 $g(n) = n/\sqrt{m}$ で標準化した最小 2 乗推定量の漸近分布は、
 (8) 式矢印右辺の Wiener process の汎関数の比で表された確率変数の
 分布と同等である。そして、この式の分子と分母

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s), \quad \frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数は

$$\left(\sqrt{m} \int_0^1 J_{cm}(s) dW(s), \quad m \int_0^1 J_{cm}(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数と同値である。これを

$$M_{cm}(\sqrt{m}w, mz) = L_m(w, z) \tag{13}$$

と表す。

Phillips(1987, Biometrika)の表記をもとに Phillips et al.(2010, JoE)の
 想定で記号を置き換えると、以下のような対応関係になる。

Phillips(1987, Biometrika)	Phillips et al.(2010, JoE)
$\rho_n = 1 + c/n$	$\rho_{n,m} = 1 + cm/n$
$\exp\{c + w\}$	$\exp\{cm + \sqrt{mw}\}$
$h = c^2 + 2cw - 2z$	$\tau_m = (cm)^2 + 2(cm)(\sqrt{mw}) - 2(mz)$
	$= c^2m^2 + 2cm^{3/2}w - 2mz$

$$\begin{aligned}
 M_c(w, z) & & M_{cm}(\sqrt{mw}, mz) \\
 & = \left(\frac{1}{2h} \exp\{c + w\}\right. & = \left(\frac{1}{2\tau_m} \exp\{cm + \sqrt{mw}\}\right. \\
 & \times [(h - (c + w))e^h & [(\tau_m - cm - \sqrt{mw})e^{\tau_m} \\
 & \left. + (h + (c + w))e^{-h}]\right)^{-1/2} & \left. + (\tau_m + cm + \sqrt{mw})e^{-\tau_m}\right]^{-1/2}
 \end{aligned}$$

この置き換えにより，同時積率母関数は次のように展開できる。

$$\begin{aligned}
 L_m(w, z) & = M_{cm}(\sqrt{mw}, mz) \\
 & = \left[\frac{1}{2\tau_m} \exp\{cm + \sqrt{mw}\} \{(\tau_m - cm - \sqrt{mw})e^{\tau_m} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (\tau_m + cm + \sqrt{mw})e^{-\tau_m}\} \right]^{-1/2} \\
 & = \left[\frac{1}{2\tau_m} \exp\{cm + \sqrt{mw} + \tau_m\} \{(\tau_m - cm - \sqrt{mw}) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (\tau_m + cm + \sqrt{mw})e^{-2\tau_m}\} \right]^{-1/2} \\
 & = \exp\left\{-\frac{\tau_m + cm + \sqrt{mw}}{2}\right\} \left[\frac{\tau_m - cm - \sqrt{mw}}{2\tau_m} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\tau_m - cm - \sqrt{mw}}{2\tau_m} e^{-2\tau_m}\right]^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp\left\{-\frac{\tau_m + cm + \sqrt{mw}}{2}\right\} \left[\frac{\tau_m - cm - \sqrt{mw}}{2\tau_m} + O(e^{-dm}) \right]^{-1/2} \\
 &= \exp\left\{-\frac{\tau_m + cm + \sqrt{mw}}{2}\right\} \left[\frac{\tau_m - cm - \sqrt{mw}}{2\tau_m} \right]^{-1/2} + O(e^{-dm}) \\
 &= \exp\left\{-\frac{\tau_m + cm + \sqrt{mw}}{2}\right\} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{cm}{\tau_m} - \frac{\sqrt{mw}}{\tau_m} \right) \right]^{-1/2} + O(e^{-dm}) \\
 &= \exp\left\{-\frac{\tau_m + cm + \sqrt{mw}}{2}\right\} \left[1 + O(m^{-1}) \right]^{-1/2} + O(e^{-dm})
 \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 &\exp\left\{-\frac{\tau_m + cm + \sqrt{mw}}{2}\right\} \\
 &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{w^2 + 2z}{2c} - \frac{w^3 + 2wz}{2c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1}) \right) \right\} \\
 &= \exp\left\{-\frac{w^2 + 2z}{4c} + \frac{w^3 + 2wz}{4c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1})\right\} \\
 &= \exp\left\{-\frac{w^2 + 2z}{4c}\right\} \exp\left\{\frac{w^3 + 2wz}{4c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1})\right\} \\
 &= \exp\left\{-\frac{w^2 + 2z}{4c}\right\} \left[1 + \frac{w^3 + 2wz}{4c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1}) \right]
 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 L_m(w, z) &= \exp\left\{-\frac{w^2 + 2z}{4c}\right\} \left[1 + \frac{w^3 + 2wz}{4c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1})\right] \\
 &= \exp\left\{-\frac{z}{2c}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2c}\right)w^2\right\} [1 + O(m^{-1/2})]
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

となる。

平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布の積率母関数は $\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$ であるから、(16) 式最後の等号右辺 $\exp\left\{-\frac{z}{2c}\right\}$ は平均 $-\frac{1}{2c}$ 、分散 0 の、つまり定数 $-\frac{1}{2c}$ で退化した正規分布であり、 $\exp\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2c}\right)w^2\right\}$ は平均 0、分散 $-\frac{1}{2c}$ の正規分布である。

したがって、 $c < 0$ のとき、 $m \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &\Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} \Rightarrow \frac{N\left(0, -\frac{1}{2c}\right)}{-\frac{1}{2c}} \\
 &\equiv N\left(0, -\frac{1}{2c}(-2c)^2\right) \equiv N(0, -2c)
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

となり漸近的に平均 0、分散 $-2c$ の正規分布にしたがう。

$c < 0$ のとき左辺を $1/\sqrt{-2c}$ 倍したものは

$$\frac{n}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{-2c}} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow N(0,1) \quad (18)$$

となる. また, $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$ より

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(1-\rho_{n,m})}} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &= \frac{n}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{-2c}} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \\ &\Rightarrow N(0,1) \end{aligned} \quad (19)$$

である.

2.2 $c < 0$ のときの漸近分布と分布の漸近展開

m を固定して $n \rightarrow \infty$ とするときの極限分布は

$$\begin{aligned} Z_{n,m} = \frac{n}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{-2c}} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &\Rightarrow \frac{\sqrt{-2c} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s) \right)}{(-2c) \left(\frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds \right)} \\ &= \frac{A_m}{B_m} = Q_m \end{aligned} \quad (20)$$

と置くと,

$$P(Q_m < x) = P\left(\frac{A_m}{B_m} < x\right) = P(A_m - xB_m < 0) = P(D_m < 0) \quad (21)$$

であり, D_m の積率母関数は

$$E(\exp(D_m s)) = E(\exp(sA_m - sxB_m)) = L_m(s\sqrt{-2c}, -sx(-2c)) \quad (2.2)$$

で与えられる.

$$L_m(w, z) = \exp\left\{-\frac{w^2 + 2z}{4c}\right\} \left[1 + \frac{w^3 + 2wz}{4c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1})\right] \quad (2.3)$$

より

$$\begin{aligned} & L_m(s\sqrt{-2c}, -sx(-2c)) \\ &= \exp\left\{-\frac{s^2(-2c) - 2sx(-2c)}{4c}\right\} \\ & \quad \times \left[1 + \frac{(s\sqrt{-2c})^3 + 2(s\sqrt{-2c})(-sx(-2c))}{4c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1})\right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$= \exp\left\{-sx + \frac{s^2}{2}\right\} \times \left[1 + \frac{(s^3 - 2s^2x)(\sqrt{-2c})(-2c)}{4c^2} m^{-1/2} + O(m^{-1})\right]$$

$$= \exp\left\{-sx + \frac{s^2}{2}\right\} \times \left[1 + \frac{s^3 - 2s^2x}{\sqrt{-2c}\sqrt{m}} + O(m^{-1})\right]$$

となる.

このとき, $\exp\left\{-sx + \frac{s^2}{2}\right\}$ は $N(-x, 1)$ の積率母関数であるから, $m \rightarrow \infty$

のとき

$$\begin{aligned}
 P(Q_m < x) &= P\left(\frac{A_m}{B_m} < x\right) = P(A_m - xB_m < 0) = P(D_m < 0) \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(t+x)^2\right\} dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = \Phi(x)
 \end{aligned} \tag{25}$$

となる.

一方, $1/\sqrt{m}$ のオーダーまでの分布の漸近展開は

$$\begin{aligned}
 P(Q_m < x) &= \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{m}} \varphi(x) \frac{-H_2(x) - 2x(-H_1(x))}{\sqrt{-2c}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \\
 &= \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{m}} \varphi(x) \frac{1+x^2}{\sqrt{-2c}} + O\left(\frac{1}{m}\right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

で与えられる. ここで, $H_p(x)$ は Hermit 多項式, $\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数, $\varphi(x)$ は標準正規分布の密度関数である.

この式の右辺第 2 項の導出は次の通り. Hermit 多項式は公式集ごとに定義が少しずつ違うが, 岩波数学辞典 (第 3 版) によれば

$$H_{en}(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{27}$$

で与えられ

$$H_{p-1}(x) = (-1)^{p-1} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{28}$$

より

$$p = 1 \text{ のとき, } H_0(x) = (-1)^{1-1} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^{1-1}}{dx^{1-1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1$$

$$p = 2 \text{ のとき, } H_1(x) = (-1)^{2-1} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^{2-1}}{dx^{2-1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = x$$

$$p = 3 \text{ のとき, } H_2(x) = (-1)^{3-1} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^{3-1}}{dx^{3-1}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -1 + x^2$$

となり、最初の式の右辺第 2 項にこれらを代入すると、2 番目の式の右辺第 2 項を得る。

Phillips(1977,Econometrica)の p.470, (11)式は

$$I(w) + \frac{i(w)}{\sqrt{n}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (w^2 + 1) \tag{29}$$

で与えられる。このとき、記号 $i(w)$ を $\varphi(x)$ で、 $I(w)$ を $\Phi(x)$ で置き換え、 $\rho = 1 + c/K = 1 + mc/n$ を代入して第 2 項を展開すると

$$\begin{aligned} \frac{i(w)}{\sqrt{n}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (w^2 + 1) &= \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}} \frac{1+c/K}{\sqrt{1-(1+c/K)^2}} (x^2 + 1) \\ &= (1+c/K) \frac{1}{\sqrt{-2(c/K)(1-c/K)}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}} (x^2 + 1) \\ &= (1+c/K) \frac{1}{\sqrt{-2(c/K)}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{K}\right) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}} (x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{-2(c/K)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{K}\right) \right) \right\} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}} (x^2 + 1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-2c}} \frac{1+x^2}{\sqrt{m}} \varphi(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}K}\right)
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

となり, Phillips et al.(2010,JoE)の Theorem1 の第2式右边第2項と同値になる.

2.3 $c > 0$ のときの漸近分布と分布の漸近展開

$g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ で $g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm}$, m を固定して $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right)
 \tag{31}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2cm}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{4c^2 m^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds}$$

さらに, $m \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow \text{standard Cauchy.}
 \tag{32}$$

となる.

$c > 0$ のときの漸近分布の導出は以下の通りである. まず m を固定して $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) \tag{3.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds}$$

となるが、標準化した最小 2 乗推定量の漸近分布は、(3.3) 式矢印右辺の Wiener process の汎関数の比で表された確率変数の分布と同等である。そして、この式の分子と分母

$$\left(\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s), \frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数は

$$\left(\frac{2cm}{e^{cm}} \int_0^1 J_{cm}(s) dW(s), \frac{4c^2 m^2}{e^{2cm}} \int_0^1 J_{cm}(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数と同値である。これを

$$M_{cm}(2cme^{-cm}u, 4c^2m^2e^{-2cm}v) = \psi_m(u, v) \tag{3.4}$$

と表す。

Phillips(1987, Biometrika)の、 $\rho_n = 1 + c/n$ のときの最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ の漸近分布の導出をもとに、記号を置き換えることによって、Phillips, Magdalinos and Giraitis(2010)の $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$ のときの最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の漸近分布を導く。

2つの論文の項ごとの対応関係は次の通りである.

Phillips(1987, Biometrika)

Phillips et al.(2010, JoE)

$$\rho_n = 1 + c/n$$

$$\rho_{n,m} = 1 + cm/n$$

$$M_c(w, z)$$

$$M_{cm}(2cme^{-cm}u, 4c^2m^2e^{-2cm}v)$$

$$\exp\{c+w\}$$

$$\exp\{cm+2cme^{-cm}u\}$$

$$(c^2 + 2cw - 2z)^{1/2} \left((cm)^2 + 2(cm)(2cme^{-cm}u) - 2(4c^2m^2e^{-2cm}v) \right)^{1/2}$$

Phillips(1987, Biometrika)の $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_n)$ の分子と分母の同時積率母関数は, 記号が煩雑なので $(c^2 + 2cw - 2z)^{1/2} = \lambda$ とおくと,

$$M_c(w, z) = \left[\frac{1}{2} \lambda^{-1} e^{c+w} \left\{ (\lambda - (c+w))e^\lambda + (\lambda + (c+w))e^{-\lambda} \right\} \right]^{-1/2} \quad (35)$$

で与えられる.

Phillips et al.(2010, JoE) の $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分子と分母の同時積率

母関数は, $\left((cm)^2 + 2(cm)(2cme^{-cm}u) - 2(4c^2m^2e^{-2cm}v) \right)^{1/2} = \lambda_m$ とおくと,

$$\psi_m(u, v) = M_{cm}(2cme^{-cm}u, 4c^2m^2e^{-2cm}v) \quad (36)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\lambda_m} \exp\{cm+2cme^{-cm}u\} \Lambda_m(u, v) \right\}^{-1/2}$$

となる.

ここで,

$$\begin{aligned} \Lambda_m(u, v) &= [\{\lambda_m - (cm + 2cme^{-cm}u)\}\exp \lambda_m \\ &\quad + \{\lambda_m + (cm + 2cme^{-cm}u)\}\exp(-\lambda_m)] \end{aligned} \quad (37)$$

である.

この式の項ごとにそれぞれ展開すると,

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \left((cm)^2 + 2(cm)(2cme^{-cm}u) - 2(4c^2m^2e^{-2cm}v) \right)^{1/2} \\ &= \left[c^2m^2(1 + 4e^{-cm}u - 8e^{-2cm}v) \right]^{1/2} \\ &= cm \left\{ 1 + \frac{1}{2}(4e^{-cm}u - 8e^{-2cm}v) - \frac{1}{8}(4e^{-cm}u - 8e^{-2cm}v)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16}(4e^{-cm}u - 8e^{-2cm}v)^3 + O(e^{-4cm}) \right\} \\ &= cm + 2cmue^{-cm} - 2c(2v + u^2)me^{-2cm} \\ &\quad + 4c(2uv + u^3)me^{-3cm} + O(me^{-4cm}) \end{aligned} \quad (38)$$

となり, 3番目の等号は, $x = 4e^{-cm}u - 8e^{-2cm}v$ と置いてべき級数展開:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 + \dots \text{を行ったものである.}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_m^{-1} &= \{cm + 2cmue^{-cm} - 2c(2v + u^2)me^{-2cm} \\
 &\quad + 4c(2uv + u^3)me^{-3cm} + O(me^{-4cm})\}^{-1} \\
 &= (cm)^{-1} \left[1 + 2ue^{-cm} - 2(2v + u^2)e^{-2cm} + O(e^{-3cm}) \right]^{-1} \\
 &= (cm)^{-1} \left\{ 1 - 2ue^{-cm} + (6u^2 + 4v)e^{-2cm} + O(e^{-3cm}) \right\} \\
 &= 1/(cm) - 2ue^{-cm}/(cm) \\
 &\quad + (6u^2 + 4v)e^{-2cm}/(cm) + O(e^{-3cm}/m)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

となる. この式の 3 番目の等号は

$$x = 2ue^{-cm} - 2(2v + u^2)e^{-2cm} + O(e^{-3cm})$$

と置いて, べき級数展開: $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ を行つた結果を整理したものである. ここで,

$$\begin{aligned}
 \exp(\lambda_m) &= \exp\{cm + 2cmue^{-cm} - 2c(2v + u^2)me^{-2cm} \\
 &\quad + 4c(2uv + u^3)me^{-3cm} + O(me^{-4cm})\}
 \end{aligned} \tag{4.0}$$

また,

$$\begin{aligned}
 \exp\{cm + 2cme^{-cm}u\} &= \exp(cm)\exp(2cme^{-cm}u) \\
 &= e^{cm} \left[1 + 2cme^{-cm}u + \frac{1}{2}(4c^2m^2e^{-2cm}u^2) + O(m^3e^{-3cm}) \right] \\
 &= e^{cm} + 2cmu + 2c^2m^2u^2e^{-cm} + O(m^3e^{-2cm}),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda_m) &= \exp[-\{cm + 2cmue^{-cm} - 2c(2v + u^2)me^{-2cm} \\ &\quad + 4c(2uv + u^3)me^{-3cm} + O(me^{-4cm})\}] \quad (4.2) \\ &= e^{-cm} - 2cume^{-2cm} + O(m^2e^{-3cm}) \end{aligned}$$

である。

これらを (3.7) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \Lambda_m(u, v) &= \left[\{\lambda_m - (cm + 2cme^{-cm}u)\} \exp \lambda_m + \{\lambda_m + (cm + 2cme^{-cm}u)\} \exp \lambda_m^{-1} \right] \\ &= \{cm + 2cmue^{-cm} - 2c(u^2 + 2v)me^{-2cm} + 4cu(u^2 + 2v)me^{-3cm} \\ &\quad + O(me^{-4cm}) - (cm + 2cme^{-cm}u)\} \times \{e^{cm} + 2cmu + O(m^2e^{-cm})\} \\ &\quad + \{cm + 2cmue^{-cm} - 2c(u^2 + 2v)me^{-2cm} + 4cu(u^2 + 2v)me^{-3cm} \\ &\quad + O(me^{-4cm}) + (cm + 2cme^{-cm}u)\} \times \{e^{-cm} - 2cmue^{-2cm} + O(m^2e^{-3cm})\} \\ &= 2cme^{-cm}(1 - 2u^2 - 2v) - 4c^2um^2e^{-2cm}(1 + u^2 + 2v) \\ &\quad + 4cume^{-2cm}(1 + u^2 + 2v) + O(m^3e^{-3cm}) \quad (4.3) \end{aligned}$$

を得る。

したがって、同時積率母関数は

$$\begin{aligned}
 \psi_m(u, v) &= M_{cm} (2cme^{-cm}u, 4c^2m^2e^{-2cm}v) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2\lambda_m} \exp(cm + 2cme^{-cm}u) \Lambda_m(u, v) \right\}^{-1/2} \\
 &= \{ (1 + u^2 - 2v) - 4cmue^{-cm}(u^2 + 2v) \\
 &\quad + 4ue^{-cm}(u^2 + 2v) + O(m^2e^{-2cm}) \}^{-1/2} \\
 &= \{ (1 + u^2 - 2v) - 4ue^{-cm}(cm - 1)(u^2 + 2v) + O(m^2e^{-2cm}) \}^{-1/2} \\
 &= (1 + u^2 - 2v)^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{4u(cm - 1)(u^2 + 2v)}{1 + u^2 - 2v} e^{-cm} + O(m^2e^{-2cm}) \right\}^{-1/2} \\
 &= (1 + u^2 - 2v)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{4u(cm - 1)(u^2 + 2v)}{1 + u^2 - 2v} e^{-cm} + O(m^2e^{-2cm}) \right] \tag{44} \\
 &= \frac{1}{(1 + u^2 - 2v)^{1/2}} + \frac{2u(cm - 1)(u^2 + 2v)}{(1 + u^2 - 2v)^{3/2}} e^{-cm} + O(m^2e^{-2cm})
 \end{aligned}$$

となる。この式の展開の6番目の等号右辺は、

$$x = \frac{4u(cm - 1)(u^2 + 2v)}{1 + u^2 - 2v} e^{-cm}$$

と置いて、べき級数展開： $(1 - x)^{-1/2} = 1 + x/2 + 3x^2/8 + 5x^3/16 + \dots$ を行ない、右辺第2項まで取ったものである。

$c > 0$ のときの漸近分布の導出で、 m を固定して $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) \Rightarrow \frac{\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} \tag{45}$$

であった。

$r = \frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s) / \frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds$ の密度関数を $f(r)$ とおくと

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\partial \psi_m(u, v - ru)}{\partial v} \Big|_{v=0} du \tag{46}$$

で与えられる。このとき、被積分関数は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_m(u, v - ru)}{\partial v} \Big|_{v=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{(1+u^2-2(v-ru))^{1/2}} + \frac{2u(cm-1)(u^2+2(v-ru))}{(1+u^2-2(v-ru))^{3/2}} e^{-cm} \right\} \Big|_{v=0} \\ &= \frac{1}{(1-u^2+2ru)^{3/2}} - 2(cm-1)e^{-cm} \frac{u}{(1-u^2+2ru)^{3/2}} \\ & \quad + 6(cm-1)e^{-cm} \frac{u}{(1-u^2+2ru)^{5/2}} \end{aligned} \tag{47}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 f(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\partial \psi_m(u, v - ru)}{\partial v} \Big|_{v=0} du \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{(1-u^2 + 2ru)^{3/2}} du \\
 &\quad - 2(cm-1)e^{-cm} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u}{(1-u^2 + 2ru)^{3/2}} du \\
 &\quad + 6(cm-1)e^{-cm} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u}{(1-u^2 + 2ru)^{5/2}} du \\
 & \hspace{15em} (48) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot h(0, 1) - 2(cm-1)e^{-cm} \frac{1}{\pi} \cdot h(1, 1) \\
 &\quad + 6(cm-1)e^{-cm} \frac{1}{\pi} \cdot h(1, 2) \\
 &= \frac{1}{\pi(1+r^2)} + \frac{2r(1-r^2)}{\pi(1+r^2)^2} (cm-1)e^{-cm} + O(m^2 e^{-2cm})
 \end{aligned}$$

となる。3番目の等号は、

$$h(j, k) = \frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{u^j}{(1-u^2 + 2ru)^{(2k+1)/2}} du, \quad 0 \leq j \leq k \quad (49)$$

を使って置き換えている。例えば、Satchell(1984) p.1286 (A2.2)式を参照。

(48)式最後の等号の右辺第1項は、Cauchy分布の密度関数であることがわかる。したがって、 $m \rightarrow \infty$ のとき $g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm}$ で標準化した

最小2乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ は、漸近的にCauchy分布にしたがう。

また、(48)式が $c > 0$ のときの分布の漸近展開になる。

2.4 $c = 0$ のときの漸近分布

$J_c(s) = \int_0^s e^{c(s-r)} dW(s)$ より, $r = u/m$, $s = v/m$ とおいて, $J_{cm}(s)$ を

$$J_{cm}(s) = \int_0^{ms} e^{cm(s-r)} dW\left(\frac{u}{m}\right) = e^{cms} \int_0^{ms} e^{-cmr} dW\left(\frac{u}{m}\right) = e^{cms} \int_0^v e^{-cu} dW\left(\frac{u}{m}\right)$$

と定義した.

$g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ は, $g(n) = n$ とおくと, $c = 0$ のとき $J_{cm}(s) = W(r)$ と

なるから,

$$\begin{aligned} n(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &= n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \\ &\Rightarrow \frac{\int_0^1 J_{cm}(s) dW(s)}{\int_0^1 J_{cm}(s)^2 ds} \tag{50} \\ &= \frac{\int_0^1 W(r) dW(r)}{\int_0^1 W(r)^2 dr} = \frac{(1/2)(W(1)^2 - \sigma_u^2 / \sigma^2)}{\int_0^1 W(r)^2 dr} \end{aligned}$$

となり, Phillips(1987, *Econometrica*)の結果と同値になる. 誤差項が

$u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ のとき,

$$n(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow \frac{(1/2)(W(1)^2 - 1)}{\int_0^1 W(r)^2 dr} \quad (5.1)$$

となる.

2.5 $\rho = 1 + c/n$ のときの漸近分布と数値積分

Phillips(1987, *Biometrika*), p.545 の(A1)式は, 煩雑になるのを避けるために, $(c^2 + 2cw - 2z)^{1/2} = \lambda$ と置くと

$$M_c(w, z) = \left[\frac{1}{2} \lambda^{-1} e^{c+w} \{ (\lambda - (c+w))e^\lambda + (\lambda + (c+w))e^{-\lambda} \} \right]^{-1/2} \quad (5.2)$$

と与えられる. Perron(1989, ET) と表記を合わせて, $\lambda = (c^2 + 2cu - 2v)^{1/2}$ と置くと

$$M_c(u, v) = \left[\frac{1}{2} \lambda^{-1} e^{c+u} \{ (\lambda - (c+u))e^\lambda + (\lambda + (c+u))e^{-\lambda} \} \right]^{-1/2} \quad (5.3)$$

となる. これを, 虚数単位 i を導入して特性関数に書き換えると

$$\theta = \left\{ -(c^2 + 2icu - 2iv) \right\}^{1/2} = \sqrt{-1} (c^2 + 2icu - 2iv)^{1/2} = ih, \quad v = -ux,$$

同時特性関数 $M_c(u, v)$ は

$$M_c(u, v)$$

$$= \left[\frac{1}{2} h^{-1} e^{c+iu} \left\{ \{h - (c + iu)\} e^h + \{h + (c + iu)\} e^{-h} \right\} \right]^{-1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} h^{-1} e^{c+iu} \left\{ (h - w) e^h + (h + w) e^{-h} \right\} \right]^{-1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} h^{-1} e^{c+iu} \left\{ h(e^h + e^{-h}) - w(e^h - e^{-h}) \right\} \right]^{-1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} (-i\theta)^{-1} e^w \left[-i\theta(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + w(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] \right]^{-1/2}$$

$$= e^{-w/2} \left[\frac{1}{2} (-i\theta)^{-1} \left[-i\theta(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + w(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] \right]^{-1/2}$$

$$= e^{-w/2} \left[\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} - \frac{w}{\theta} \cdot \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right]^{-1/2}$$

(54)

$$= e^{-w/2} \left[\cos\theta - \frac{w}{\theta} \cdot \sin\theta \right]^{-1/2}$$

$$= e^{-w/2} A^{-1/2}$$

となり, Perron(1989, ET), p.244 の $M_c(u, v)$ と同じ式になる.

$$n(\hat{\rho}_n - \rho_n) = n \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \Rightarrow \frac{\int_0^1 J_c(r) dW(r)}{\int_0^1 J_c(r)^2 dr} \quad (55)$$

の分子と分母 $\left(\int_0^1 J_c(r) dW(r), \int_0^1 J_c(r)^2 dr \right)$ の同時特性関数は

$$M_c(u, v) = e^{-w/2} A^{-1/2}, \quad (56)$$

$$\theta = (2iv - 2icu - c^2)^{1/2}, \quad v = -ux, \quad w = c + iu, \quad A = \cos \theta - \frac{w}{\theta} \cdot \sin \theta,$$

で与えられ、分布関数と密度関数はそれぞれ

$$F(x, c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im ag} [e^{-w/2} A^{-1/2}]}{u} du \quad (57)$$

$$h(x, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re al} [e^{-w/2} A^{-3/2} B] du \quad (58)$$

となる。ここで、

$$B = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{\theta} + \left(\frac{w}{\theta^2} \right) \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \right]$$

である。Perron(1989,ET)では、(57) (58) 式が closed form ではなく積分が残るため、数値積分で評価して分布のグラフを描いている。

これらの表現は White(1958,AMS), Evans and Savin(1981,An.Stat)が取った方法と同じで、極限分布を Wiener 過程の汎関数で表すのとは違い、

数値評価を可能にしている。Evans and Savin(1981)は、(5 1)式右辺の分布を(5 7)(5 8)式の表現で導出し、数値積分を使って分布関数と密度関数を数値評価した。また、密度関数についてはグラフも描いている。彼らが数値積分で評価した分布は、(5 7)(5 8)で $c=0$ と置いた場合と同値である。

Hisamatsu and Maekawa(1994)では、標準化したダービン・ワトソン統計量の exact な分布と極限分布を数値積分で評価して%点を数表化し、near integrated case での極限分布をグラフ化した。また、 $c=0$ のときの標準化した最小 2 乗推定量の exact な分布と極限分布の%点を数表化した。いずれも、(5 7)(5 8)と同様な式を導出し分布を数値積分で評価した。

3. $c > 0$ のときの Local to Moderate Unit Root Distribution

Phillips et al.(2010, JoE)では、 m を固定して $n \rightarrow \infty$ のときの標準化した最小 2 乗推定量の極限分布を求め、次に $m \rightarrow \infty$ のときの nonstandard な分布から正規分布への遷移分布 (transition distribution) を求めた。遷移分布については、 $c = -5$ とおいて m の値を 1,2,5,15,30 と与えて $c < 0$ のときの密度関数の移り変わりをグラフ化しているが、どのように数値評価して描いたものか詳しい説明はなされていない。それが(5 8)式の様式で導出して数値積分で評価したものか、シミュレーション(例えばモンテカルロ積分と呼ばれる手法)で数値評価したものかはっきりしない。

また、unit root passage で、 $c > 0$ のケースは mildly explosive case と位置づけられ、Economic Bubbles, Periodically collapsing Bubbles, Variable discount Factor models などと対応しているというが、 $c > 0$ のときのいわゆる nonstandard な分布から Cauchy 分布へ行き着く遷移分布について数値評価とその結果は示されていない。Evans and Savin (1981, An.Stat) や Perron (1989, ET) のような数値積分可能な分布が導出できれば、 $c > 0$ の場合 $m \rightarrow \infty$ のときの nonstandard な分布から Cauchy 分布への遷移分布が、同様な方法で数値評価できると思われる。

ここでは、Evans and Savin (1981, An.Stat) や Perron(1989, ET) を参考にして数値評価可能な分布の式を導出する。

$c > 0$ のとき, normalizer $g(n)$ で標準化した最小 2 乗推定量は

$$\begin{aligned}
 g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &= \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \\
 &= \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t / \left(\frac{ne^{cm}}{2cm} \right)}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 / \left(\frac{ne^{cm}}{2cm} \right)^2} = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t / g(n)}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 / (g(n))^2}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

となり, $n \rightarrow \infty$ のときの分子と分母の同時特性関数は, 引数をそれぞれ u , v とすると, Phillips et al.(2010, JoE)の (18) 式

$$\begin{aligned}
 \psi_m(u, v) &= M_{cm}(2cme^{-cm}u, 4c^2m^2e^{-2cm}v) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2\lambda_m} \exp(cm + 2cme^{-cm}u) \Lambda_m(u, v) \right\}^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{6.0}$$

で与えられる. ここで, 虚数単位 i を導入して

$$\begin{aligned}
 \lambda_m &= \left((cm)^2 + 2(cm)(2cme^{-cm}iu) - 2(4c^2m^2e^{-2cm}iv) \right)^{1/2} \\
 &= (c^2m^2 + 4c^2m^2e^{-cm}iu - 8c^2m^2e^{-2cm}iv)^{1/2} \\
 &= \sqrt{-1} (8c^2m^2e^{-2cm}iv - 4c^2m^2e^{-cm}iu - c^2m^2)^{1/2} = i\theta
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

とおく.

$\Lambda_m(u, v)$ にも虚数単位 i を導入すると, 同時特性関数は

$$\begin{aligned}
 \psi_m(u, v) &= \left\{ \frac{1}{2\lambda_m} \exp(cm + 2cme^{-cm}iu) \Lambda_m(u, v) \right\}^{-1/2} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2\lambda_m} \exp(\omega) \Lambda_m(u, v) \right\}^{-1/2} \\
 &= \exp(-\omega/2) \\
 &\times \left[\frac{1}{2\lambda_m} \{ \lambda_m - (cm + 2cme^{-cm}iu) \} \exp \lambda_m \right. \\
 &\quad \left. + \{ \lambda_m + (cm + 2cme^{-cm}iu) \} \exp(-\lambda_m) \right]^{-1/2} \\
 &= \exp(-\omega/2) \times \left[\frac{1}{2\lambda_m} \{ \lambda_m - \omega \} \exp \lambda_m + \{ \lambda_m + \omega \} \exp(-\lambda_m) \right]^{-1/2} \\
 &= \exp(-\omega/2) \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2\lambda_m} \{ \lambda_m (\exp \lambda_m + \exp(-\lambda_m)) - \omega (\exp \lambda_m - \exp(-\lambda_m)) \} \right]^{-1/2} \\
 &= \exp(-\omega/2) \\
 &\quad \times \left[\frac{\exp \lambda_m + \exp(-\lambda_m)}{2} - \frac{\omega}{\lambda_m} \cdot \frac{\exp \lambda_m - \exp(-\lambda_m)}{2} \right]^{-1/2} \\
 &= \exp(-\omega/2) \\
 &\quad \times \left[\frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} - \frac{\omega}{\theta} \cdot \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i} \right]^{-1/2} \\
 &= \exp(-\omega/2) \left[\cos \theta - \frac{\omega}{\theta} \cdot \sin \theta \right]^{-1/2} = \exp(-\omega/2) \cdot A^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{6 2}$$

となる。反転公式より、分布関数

$$H(x, c, m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Imag} \left[e^{-w/2} A^{-1/2} \right]}{u} du \quad (6.3)$$

を得る。一方、密度関数は

$$\begin{aligned} h(x, c, m) &= \frac{\partial H(x, c, m)}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u} \text{Imag} [\partial \Psi_m(u, v) / \partial x] du \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u} \text{Imag} [e^{-\omega/2} \cdot \partial A^{-1/2} / \partial x] du \quad (6.4) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u} \text{Imag} [e^{-\omega/2} \cdot (-1/2) A^{-3/2} \cdot (i) \cdot B \cdot (-u)] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{Real} [e^{-\omega/2} \cdot A^{-3/2} \cdot B] du \end{aligned}$$

ここで、

$$\omega = cm + 2cme^{-cm}iu, \quad \theta = \left(8c^2m^2e^{-2cm}iv - 4c^2m^2e^{-cm}iu - c^2m^2 \right)^{1/2},$$

$$A = \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad B = \left[\frac{\sin \theta}{\theta} + \left(\frac{w}{\theta^2} \right) \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \right] \times 4c^2m^2e^{-2cm}$$

となる。

$c > 0$ のとき, 最小 2 乗推定量

$$g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$$

の分布関数と密度関数は(6.3)(6.4)式で与えられ, いずれも closed form ではなく積分が含まれているので, 積分を数値評価することで求めることができる.

参考文献

- [1] Anderson, T.W., On Asymptotic Distributions of Estimates of Parameters of Stochastic Difference Equations, 30, pp.676-687, Annals of Mathematical Statistics, 1959.
- [2] Evans, G.B.A., and N.E. Savin, The Calculation of the Limiting Distribution of the Least Squares Estimator of the Parameter in a Random Walk Model, 9, pp.1114-1118, The Annals of Statistics, 1981.
- [3] Giraitis, L., and P.C.B. Phillips, Uniform Limit Theory for Stationary Autoregression, Journal of Time Series Analysis, 27, pp.51-60, 2006.
- [4] Hisamatsu, H., and K. Maekawa, The distribution of the Durbin-Watson statistic in integrated and near-integrated models, 61, pp.367-382, Journal of Econometrics, 1994.
- [5] Perron, P., The Calculation of the Limiting Distribution of the Least-Squares Estimator in a Near-Integrated Model, 5, 241-255, Econometric Theory, 1989.
- [6] Phillips, P.C.B., Time Series Regression with a Unit Root, 55, pp.277-301, Econometrica, 1987.
- [7] Phillips, P.C.B., Towards a Unified Asymptotic Theory for Autoregression, 74, pp.535-547, Biometrika, 1987.
- [8] Phillips, P.C.B., Approximations to Some Finite Sample Distributions Associated with a First-Order Stochastic Difference

- Equation, 45, 463-485, *Econometrica*, 1977.
- [9] Phillips, P. C. B., T. Magdalinos and L. Giraitis, Smoothing local-to-moderate unit root theory, 158, pp.274-279, *Journal of Econometrics*, 2010.
- [10] Phillips, P.C.B, and T. Magdalinos, Limit theory for moderate deviations from a unit root, 136, 115-130 , *Journal of Econometrics*, 2007.
- [11] Satchell, S.E., Approximation to the finite sample distribution for nonstationary first order stochastic difference equations, pp. 52, 1271-1290, *Econometrica*, 1984.
- [12] White, J.S., The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case, 29, pp. 1188-1197, *Annals of Mathematical Statistics*, 1958.