産業連関分析と誤差

—技術係数の誤差が産出量推定にあたえる影響—

木　村　　等

いま産業全体を、その生産物（財およびサービス）の種類に着目して、いくつかの産業部門にわけて考える。しかしここで考えるシステムは静学的なものであって、資本蓄積に関する問題は考えないこととする。そうすればこのシステムについて投入量・産出量に関する均衡と価格・生産費に関する均衡と、二種類の均衡条件が考えられる。ここでは投入量・産出量に関するものをとりあつかう。

いま第i番目の産業の産出量を X_i であらわす。この一部は中間生産物として各産業につかわれ、他の残りの部分は家計又は政府において消費されるであろう。そこでこの産出量 X_i のうち第j産業に投入されるものを X_{ij} であらわし、家計、政府において消費されるものを Y_i であらわすと、これらの間にはつぎのような関係式がなりたつ。

$$X_{i1}+X_{i2}+\cdots\cdots+X_{in}+Y_i=X_i$$

いうまでもなく同様な関係はどの産業についてもなりたつから、産業全体について次の式が得られる。

$$(1)\begin{cases} X_{11}+X_{12}+\cdots\cdots+X_{1n}+Y_1=X_1 \\ X_{21}+X_{22}+\cdots\cdots+X_{2n}+Y_2=X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n1}+X_{n2}+\cdots\cdots+X_{nn}+Y_n=X_n \end{cases}$$

ところで $a_{ij}=X_{ij}/X_j$ というものを考えると、これは第j-産業の生産物1単位を生産するために必要な、第i-産業の生産物の量である。これは第j-産業の生産技術に依存するものと考えられるので、技術係数あるいは生産係数とよばれている。この技術係数をもちいると(1)式は次のように書き改めることができる。

$$(2)\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+\cdots\cdots+a_{1n}X_n+Y_1=X_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+\cdots\cdots+a_{2n}X_n+Y_2=X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\cdots\cdots+a_{nn}X_n+Y_n=X_n \end{cases}$$

ここで、もしこの技術係数があたえられ、ある年の最終需要量 Y_1, Y_2, …

…, Y_n が予測できるならば、(2) の連立方程式をとくことによって、各産業がその年に生産しなければならない産出量 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ をもとめることができる。ここで通常の分析においては、この最終需量、したがって産出量が変化しても、技術係数は変化しないものと考えられている。しかしこのことは技術係数は絶対に変化しないと考えられているのではなくて、たとえば技術の進歩等によっては変化するが、ただそれは最終需要量や産出量の変化に対しては独立であると考えられているのである。しかしわれわれは、ここでは、この技術進歩の問題には立入らない。

以上に概観したものがレオンティエフの産業連関分析（特に、その開放模型）であるが、そこでは明らかに技術係数が極めて大きな役割を果たしている。そこでこの技術係数をできるだけ正確に推計しなければならないのであるが、実際には過去の統計資料にもとづいて推計がなされている以上、誤差なしで推計することは不可能である。そのためにこの技術係数の誤差すなわち (2) の連立方程式の係数の誤差が、この連立方程式の解である各産業の産出量の推定値に、どれだけの影響をおよぼすかということが当然問題になる。われわれはここでこの誤差の問題、すなわち係数の誤差はつみ重なるものであって、産出量は誤差の大きな推定しかできないものであるのか。あるいは係数の誤差は相殺しあうものであって、誤差の小さい産出量の推定が出来るものであるかという問題。又その誤差の影響のしかたが産業分割の数によっててどのように変るかという問題を考えてみようとするものである。

この問題をとりあつかうために、上にのべた技術係数および産出量をあらわす記号について、誤差をふくむものと、ふくまないものを使いわけねばならない。（ただし最終需要量には誤差はないものとする）そのため誤差のない場合（真の値）の技術係数および産出量を a_{ij}, X_i であらわし、誤差をふくむ場合のものをそれぞれ $a_{ij}+\varepsilon_{ij}$, X_i' であらわす。すなわち技術係数および産出量の誤差はそれぞれ ε_{ij}, $X_i'-X_i$ である。記号をこのように定めれば、誤差のない場合には (2) と同じ式

$$
(3)\quad \begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+\cdots\cdots+a_{1n}X_n+Y_1=X_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+\cdots\cdots+a_{2n}X_n+Y_2=X_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\cdots\cdots+a_{nn}X_n+Y_n=X_n \end{cases}
$$

がなりたつ。又誤差をふくむ場合についても同じように、

$$(4)\begin{cases}(a_{11}+\varepsilon_{11})X_1'+(a_{12}+\varepsilon_{12})X_2'+\cdots\cdots+(a_{1n}+\varepsilon_{1n})X_n'+Y_1=X_1'\\(a_{21}+\varepsilon_{21})X_1'+(a_{22}+\varepsilon_{22})X_2'+\cdots\cdots+(a_{2n}+\varepsilon_{2n})X_n'+Y_2=X_2'\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(a_{n1}+\varepsilon_{n1})X_1'+(a_{n2}+\varepsilon_{n2})X_2'+\cdots\cdots+(a_{nn}+\varepsilon_{nn})X_n'+Y_n=X_n'\end{cases}$$

が成立つ。そしてこの(4)式が実際にわれわれが産出量推定のための計算に用いる式なのである。いまこの2つの連立方程式を行列を用いて、

(5) $AX+Y=X$

(6) $(A+E)X'+Y=X'$

とあらわす。ここでAは誤差をふくまない場合の技術係数を要素とする行列、Eは技術係数の誤差を要素とする行列をあらわし、X, X′は誤差をふくまない場合およびふくむ場合の各産業の産出量を成分とするベクトルをあらわし、Yは各産業の最終需要を成分とするベクトルをあらわしている。問題は各産業の産出量の誤差 $X_i'-X_i$ の評価にある。

そこで $X'-X$ を求めることを考える。このために(5)を

$$(I-A)X=Y$$

と変形する。ただしこのIは単位行列である。これから

(7) $X=(I-A)^{-1}Y$

を得る。全く同様にして(6)より

(8) $X'=(I-A-E)^{-1}Y$

を得る。(7)と(8)から $X'-X$ をつくる。すなわち

$$\begin{aligned}X'-X&=(I-A-E)^{-1}Y-(I-A)^{-1}Y\\&=\{(I-A-E)^{-1}(I-A)-I\}(I-A)^{-1}Y\\&=(I-A-E)^{-1}\{(I-A)-(I-A-E)\}(I-A)^{-1}Y\\&=(I-A-E)^{-1}EX\end{aligned}$$

ここでEはAとくらべると小さいものであるから近似的に

$$\fallingdotseq(I-A)^{-1}EX$$

を得る。

これを $(I-A)^{-1}$ の要素を c_{ij} として、要素について書きなおしてみると、

$$X_i'-X_i=\sum_{j,k=1}^{n}c_{ij}\varepsilon_{jk}X_k \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

を得る。(1)

(1) 前論文 "On the Errors of Outputs due to Errors of Technical Coefficients in Leontief's Open Input-Output Models." Ann. Inst. Stat. Math Vol. VII No. 3.
においては

そこで技術係数の誤差についてつぎのような仮定を設ける。すなわち、その期待値はゼロである:$\mathrm{Exp}(\varepsilon_{ij})=0$、その標準偏差は真の技術係数に比例する:$\mathrm{Exp}(\varepsilon^2_{ij})=(\mathrm{r}a_{ij})^2$、これは又いいかえれば、われわれが実際に計算に利用する誤差をふくんだ、技術係数の相対誤差を示す変動係数が、全て同じrであるということである。(2) つぎに各誤差は独立である(3):$\mathrm{Exp}\ (\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{ke})=0\ (i\neq k,$ 又は $j\neq k)$ とする。この仮定のもとで、産出量の誤差の分散を評価するとつぎのようになる。

$$\mathrm{Exp}(X_i'-X_i)^2=\mathrm{Exp}(\sum_j\sum_{k=1}^{n}c_{ij}\varepsilon_{jk}X_k)^2$$

$$=\sum_j\sum_{k=1}^{n}c_{ij}{}^2\mathrm{Exp}(\varepsilon_{jk}{}^2)X_k{}^2$$

$$=\sum_j\sum_{k=1}^{n}c_{ij}{}^2\mathrm{r}^2a_{jk}{}^2X^2{}_k \quad \because\ \mathrm{Exp}(\varepsilon_{jk}\cdot\varepsilon_{lm})=0(j\neq l\text{又は}k\neq m)$$

$$=\mathrm{r}^2\sum_j\sum_{k=1}^{n}c_{ij}{}^2(a_{jk}X_k)^2$$

$$=\mathrm{r}^2\sum_{j=1}^{n}c_{ij}{}^2(\sum_{k=1}^{n}X_{jk}{}^2)$$

$$X_i'-X_i=\frac{1}{1-\sum_{i,j}c_{ij}\varepsilon_{ji}}\{\sum_{j}\sum_{k}c_{ij}\varepsilon_{jk}X_k\}$$

を得たが、これは1行，またわ1列についてのみ誤差があるばあいは正確な式であり、或産業について技術変化による技術係数の変化 ε_{ij} が予測できれば、この式によって技術変化による産出量の変化を計算するというようにも利用できるものであるが、これを導く計算が面倒なものでもあるし、本論の目的である確率誤差を論ずるためには $\dfrac{1}{1-\sum c_{ij}\varepsilon_{ji}}$ による影響は結局無現されてしまうので本文で示した行列計算の方法によった。この方法は畠中氏の私信によってあたえられたものである。

(2) $a_{ij}+\varepsilon_{ij}$ の変動係数が全て等しいという仮定が成立たなくても、変動係数の最大のものを r としておけば、以下の議論は全てなりたつ。又この r の値については、どのていどのものであるかは不明であるが、畠中氏は私信の中で Hoffenberg 氏の意見としてエラーは容易に10%をこえるものと思って欲しいとのべている。この時の10%という値は r そのものとは意味がちがうものであろうが、r の値はそれ程小さいものではないようである。

(3) W. Duane Evans は彼の論文(2)において、一般に総産出量 X_i は、各産業への投入量 X_{ij} に比べて、誤差の小さい推定が出来る。そこで X_{ij} の和が X_i になるのであるから、X_{ij} の誤差は ＋，－ 方向の反対のものをふくんでいる。又そのため技術係数 a_{ij} の誤差は互に独立ではなく、逆相関をもっていて、これを独立と仮定することは、技術係数の誤差の影響を大きめにみつもることになるとのべている。

$$=r^2\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2\Big(\sum_{k=1}^{n}X_{jk}\Big)^2\frac{\sum_{k=1}^{n}X_{jk}^2}{\Big(\sum_{k=1}^{n}X_{jk}\Big)^2}$$

$$=r^2\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2(X_j-Y_j)^2A_j \qquad \because \sum_{k=1}^{n}X_{jk}=X_j-Y_j$$

$$=r^2\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2(X_j-Y_j)^2\frac{\Sigma c_{ij}^2(X_j-Y_j)^2A_j}{\Sigma c_{ij}^2(X_j-Y_j)^2}$$

ここで $\dfrac{\Sigma c_{ij}^2(X_j-Y_j)^2A_j}{\Sigma c_{ij}^2(X_j-Y_i)^2}$ は $c^2_{ij}(X_j-Y_j)^2$ を重みとした A_j の加重平均である。これを $\bar{A}$ とすれば

$$=r^2\bar{A}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2(X_j-Y_j)^2$$

$c_{ij}(X_j-Y_j)$ は全て正の数であるから、大きめにみつもって

$$\fallingdotseq r^2\bar{A}\left\{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(X_j-Y_j)\right\}^2$$

$$=r^2\bar{A}\left\{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_j-\sum_{j=1}^{n}c_{ij}Y_j\right\}^2$$

$$=r^2\bar{A}\left\{\Big(\sum_{j=1}^{n}c_{ij}Y_j\Big)\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_j}{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}Y_j}-\sum_{j=1}^{n}c_{ij}Y_j\right\}^2$$

$$=r^2\bar{A}\left\{X_i\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_j}{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}Y_j}-X_i\right\}^2$$

$$=r^2\bar{A}X_i^2\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}X_j}{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}Y_j}-1\right)^2$$

$$=r^2\bar{A}X_i^2(B_i-1)^2$$

産出量推定の相対誤差と考えられる X_i' の変動係数を求めると、それは $\sqrt{\mathrm{Exp}(X_i'-X_i)^2}/X_i$ であるから、上の評価から

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Exp}(X_i'-X_i)^2}}{X_i}\fallingdotseq\frac{rX_i(B_i-1)\sqrt{\bar{A}}}{X_i}=r(B_i-1)\sqrt{\bar{A}}$$

となる。そこでこの大きさをみつもるために、まず B_i について考える。

$$B_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}X_j}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j\frac{X_j}{Y_j}}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}$$

これは c_jY_j を重みとした X_j/Y_j の加重平均である。この重みについて考えると、c_{ii} は 1〜2 ていどの数であるに反して、$c_{ij}(j\neq i)$ は桁ちがいに小さいものが多い。そこで特に最終需要量 Y_i の大きい部門では X_i/Y_i にかかる重みが非常に大きなものとなり、そのため加重平均 B_i の値は X_i/Y_i に非常に近いものになると考えられる。これを我が国の昭和26年産業連関表36部門表についてみると、たとえば繊維部門は産出量、最終需要量ともにそれぞれの総和の10%をこえる非常に大きな値を示している。そのためこの部門では自己の産出量と最終需要量の比 X_i/Y_i にかかる重みは非常に大きく、B_i の値は 2.315 であって、この部門での X_i/Y_i の値 2.308と 0.007 の差を示すにすぎない。又 X_i/Y_i が大きい部門について考えると、この X_i/Y_i にかかる重みは $c_{ii}Y_i$ であり、比較的な重みを求めてみると、

$$\frac{c_{ii}Y_i}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}=\frac{c_{ii}Y_i}{X_i}=\frac{c_{ii}}{\frac{X_i}{Y_i}}$$

を得る。これは X_i/Y_i の逆数の c_{ii} 倍であるから、X_i/Y_i が大きければ、それだけこれにかかる重みは逆に小さなものとなる。このように考えると B_i の値はどの部門についてもほぼ同じようなものとなると考えられる。そこで B_i の値の大体の評価を行ってみる。

$$B_i=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j\frac{X_j}{Y_j}}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}=\frac{\sum_{j\neq i} c_{ij}Y_j\frac{X_j}{Y_j}}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}+\frac{c_{ii}Y_i\frac{X_i}{Y_i}}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}$$

$$=\frac{\sum_{j\neq i} c_{ij}Y_j\frac{X_j}{Y_j}}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}+\frac{c_{ii}X_i}{X_i}=\frac{\sum_{j\neq i}^{n} c_{ij}Y_j\frac{X_j}{Y_j}}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_j}+c_{ii}$$

ここで、加重平均の重みをかえてもそう大きな変化はないであろうから

$$\doteqdot \frac{\sum\limits_{j \neq i} Y_j \frac{X_j}{Y_j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j} + c_{ii} = \frac{\sum\limits_{j \neq i} X_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j} + c_{ii} \doteqdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j} + c_{ii}$$

これを昭和26年産業連関表36部門表についてあたってみる X_i/Y_i の大きい部門から繊維原料農産物部門、および石炭・亜炭部門を、X_i の小さい部門からガス部門を、X_i/Y_i が負数である部門から皮革原料農産物部門を又特に c_{ii} の大きい部門から鉄鋼部門をえらんで第一表を作った。

第　一　表

部　　門	B_i	$\Sigma X_i/\Sigma Y_i + c_{ii}$	X_i/Y_i	Y_i (単位100万円)
繊維原料農産物	2.529	2.194	21.502	43,745
皮革原料農産物	2.470	2.237	3.466	3,804
石炭・亜炭	3.691	2.994	30.131	84,042
繊維	2.315	3.846	2.308	1,331,181
鉄鋼	3.532	4.470	7.770	1,087,836
ガス	3.325	3.071	2.961	30,184

繊維部門のように最終需要量の非常に大きな部門では、X_i/Y_i の重みが、実際と評価との間で大きく異っているために $\dfrac{\Sigma X_i}{\Sigma Y_i} + c_{ii}$ による近似は良くない。かえって前にのべたように X_i/Y_i そのもので近似する方がよい結果が得られる。他の部門では $\dfrac{\Sigma X_i}{\Sigma Y_i} + c_{ii}$ による近似は大体満足してよいであろう。このことから考えてどの部門についても B_i の値は3ていどであり、大きくても4をこえることはあまりないと考えられる。

つぎに A_i を評価する。いま第 i-産業の各産業での投入量: $X_{i1}, X_{i2}, \cdots\cdots, X_{in}$ の平均、分散および変動係数をそれぞれ m_i, σ_i, V_i とおけば、これらの間には、

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} X^2_{ij}}{n} - m_i^2$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 = n\sigma_i^2 + nm_i^2$$

なる関係が存在する。これを利用すると

$$A_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{ij}^2}{\left(\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\right)^2}=\frac{n\sigma_i^2+nm_i^2}{(nm_i)^2}=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{\sigma_i}{m_i}\right)^2+1\right\}=\frac{1}{n}(V_i^2+1)$$

を得る。このように A_i の値には $X_{i1}, X_{i2}, \cdots\cdots, X_{in}$ の変動係数 V_i と産業分類の数 n が関係している。産業分類の数 n が小さいときには、連関表に空欄、すなわち $X_{ij}=0$ のものはないであろうが、n が大きくなるにつれて、空欄は増加するであろうと考えられる。空欄が増加すれば $X_{i1}, X_{i2}, \cdots\cdots, X_{in}$ の変動係数は大きくなるであろう。そこで変動係数の増加と、n の増加によって A_i の値がどう変るかが問題である。これを昭和26年産業連関表、9部門表、36部門表、182部門表についてあたってみる。これらの表はそれぞれ分類の基準がちがい36部門表を細くわったものが182部門表であるというようにはなっていなくて、必ずしも比較できない面もあるが、大体の様子は知ることが出来るであろう。そこで V_i が大きそうなものをえらんで第二表をつくった。

第 二 表

n=9			n=36			n=182		
	V_i	A_i		V_i	A_i		V_i	A_i
農林水産業	1.790	0.4654	食用農産物	3.084	0.2920	農業	2.726	0.0472
			繊維原料農産物	5.562	0.8869			
			ゴム原料農産物	1.409	0.0892			
			皮革原料農産物	4.393	0.5640			
			林業	3.750	0.4183	林・業	7.803	0.3400
製造工業	2.053	0.5796	繊維	4.540	0.6003	酒	7.777	0.3378
			鉄鋼	4.006	0.4737			
運輸通信	1.190	0.2684	運輸通信	1.579	0.0970	運輸	5.099	0.1506
			非鉄金属屑	5.833	0.9729	スクラップ	5.568	0.1778

9部門表と36部門表を比較してみると、V_i については9部門表では大きくても2ていどであるに反して、36部門表では4をこえるものが相当に現われている。これは9部門表には空欄がなく、36部門表では空欄が数多く現われているためである。しかしながら、A_i についてみると36部門表では0.8869とか0.9727とか非常に大きなものもあるが、平均されると、9部門表の場合と大差なさそうである。そして大ざっぱにみつもって0.5位と

考えておけばよいであろう。そうすれば X_i' の変動係数は $r(B_i-1)\sqrt{A}$ であるから $r(3-1)\sqrt{0.5}=1.5r$ ていどのものとなる。

182部門表についてみると、缶詰・壜詰部門等、数個の部門では、その生産物は最終消費部門以外では唯一つの産業部門にしか投入されていないことになっている。すなわち、0でない X_{ij} は一つしかない。この場合は A_i は1である。また林業部門では製材部門一つに対して中間生産物として使用されものの総計 $\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ の半分をこえるものが投入されている。このように一部門に非常に大きな割合のものが投入されている部門では X_{i1}, X_{i2}, ……, X_{in} の変動係数 V_i は大きくなり、したがって A_i も大きい。しかしながら、一部門に $\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ の 1/3 をこえるものが投入されているような部門についても V_i は 7〜8 ていどであり A_i は 0.3〜0.4 ていどになっている。このことから考えると A_i は36部門表におけるよりも小さいといえそうである。そして結局 X_i' の変動係数 $r(B_i-1)\sqrt{A}$ は大体 r と考えてよいであろう。

以上の考察から、技術係数の誤差は互に相殺して、産出量の推定値の相対誤差は技術係数の相対誤差と同じていどのものになると考えてよいであろう。又表の大きさの影響を考えると、表がずっと大きくなれば産出量推定値の相対誤差は小さくなるようにみえる。しかしこのことは技術係数が表の大きさにかかわらず同じ精度で推定される場合にいえるのであって、技術係数の推定の精度が表の大きさによってどのように変るかがわからなければ大きな表の方が誤差が小さいとはいいきれない。

文　献

1. 林知己夫：レオンチェフ行列におけるデータ誤差の影響について　経済研究 第7巻第2号　1956
2. W. Duane Evans: The Effect of Structural Matrix Errors on Interindustry Relations Estimates : Econometrica vol. 22. No. 4. 1954.
3. H. Kimura: On the Errors of Out puts due to Errors of Technical Coefficients in Leontief's Open Input-Output Models. Ann. Inst. Stat. Math, Vol. Ⅶ No. 3. 1956.
4. W. Leontief and others: *Studies in the Structure of the American Economy*, Oxford University Press. N. Y. 1953.