紹　介

一般化シンプレックス法

木　村　　等

本稿は、G. B. Dantzig, A. Orden & P. Wolfe : "The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Restraints," Pacific Journal of Mathematics, vol. 5, 1955, pp. 183―195 を紹介したものである。これは、RAND Report RM―1264, The RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1954 と同じ論文であると考えられる。

1. 序

線型計画法の典型的な問題は、つぎのようにかける:

$$
(1.1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1k}x_k\leqq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2k}x_k\leqq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mk}x_k\leqq b_m \end{cases}
$$

および

$$
(1.2)\quad x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ x_k\geqq 0
$$

の制限の下で、目的関数

$$
(1.3)\quad c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_kx_k
$$

を最大にするような $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k\}$ をもとめること。ここで、(1.1) の係数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots\cdots,m;\ j=1,2,\cdots\cdots,k)$, 右辺の常数 b_i $(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ および (1.3) の係数 c_i $(i=1,2,\cdots\cdots,k)$ はすべて、あたえられた常数とする。なお b_i はすべて正であるとする。

この問題をあつかうために、一般に余裕変数 $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots\cdots, x_{k+m}$ を導入することによって、(1.1) をつぎのような型にかきかえる。

$$
(1.4)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1k}x_k+x_{k+1} \qquad\qquad =b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2k}x_k \qquad +x_{k+2} \qquad =b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mk}x_k \qquad\qquad +x_{k+m}=b_m \end{cases}
$$

ここで、余裕変数もまた 0 または正である。

目的関数 (1.3) は

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k+0x_{k+1}+\cdots+0x_{k+m}$$

とかけるから、結局、線型計画法の問題は、

$$(1.5)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

および

$$(1.6)\quad x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \cdots,\ x_n\geqq 0$$

の制限の下で、目的関数

$$(1.7)\quad c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

を最大にする $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ をもとめることと考えられる。

この問題をとくための有力な方法として、シンプレックス法がある。シンプレックス法を説明するためには、(1.5) をベクトル方程式の型にかくのが便利である。すなわち、

$$P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とすれば、(1.5) は

$$(1.8)\quad x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n=P$$

とあらわすことができる。ここで、基本的な定義をあげておく。

定義　可能解：(1.8) および (1.6) の制限条件を満足する数の組 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を可能解という。

したがって、可能解は、線型計画法の問題における制限条件をみたすものであって、目的関数の値については問題にしていない。

定義　基底変数：(1.8) における $P_1, P_2, \cdots, P_n$ のうち、基底を構成するベクトルの係数になっている変数 x_i を、基底変数という。

定義　基底解：基底変数以外の変数はすべて 0 である解を、基底解という。

定義　非退行基底解：ちょうど m 個の変数が正の値をとる基底解を、非退行基底解と

いう。

定義 最適解： 目的関数を最大にする可能解を、最適解という。

線型計画法の問題に、可能解が存在するときには、基底解が存在する。最適解がただ1つしか存在しないとき、この最適解は基底解である。また、最適解が2つ以上存在するときには、そのうちの少なくとも1つは基底解である。したがって、最適解をもとめるためには、基底解だけを考えておけば充分である。

$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n, P$ はすべて、m 次元のベクトルである。そこで、これらのベクトルのうちで一次独立なものの個数は、m をこえることはない。余裕変数に対応する m 個のベクトルは、一次独立である。したがって、行列 $(P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n, P)$ の位は m である。ここで、$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ のうちのどの m 個のベクトルも、一次独立であると仮定する。すなわち、どの m 個のベクトルも基底となりうる。さらに、すべての基底解は、非退行基底解であると仮定する。すなわち、P は、$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ のうちの $(m-1)$ 個以下のベクトルの一次結合とはならない。

いま、1つの基底解があたえられたとする。これを、

$$(1.9) \qquad x_1 P_{j_1} + x_2 P_{j_2} + \cdots\cdots + x_m P_{j_m} = P$$

としてあらわす。このとき、目的関数の値は、

$$(1.10) \qquad z_0 = x_1 c_{j_1} + x_2 c_{j_2} + \cdots\cdots + x_m c_{j_m}$$

である。$P_{j_1}, P_{j_2}, \cdots\cdots, P_{j_m}$ は基底であるから、任意のベクトル P_s は、

$$(1.11) \qquad P_s = t_{1s} P_{j_1} + t_{2s} P_{j_2} + \cdots\cdots + t_{ms} P_{j_m}$$

とかける。この係数をもちいて、

$$(1.12) \qquad z_s = t_{1s} c_{j_1} + t_{2s} c_{j_2} + \cdots\cdots + t_{ms} c_{j_m}$$

をつくる。(1.11) の θ 倍を (1.9) から辺々引き算すれば、

$$(1.13) \qquad (x_1 - \theta t_{1s}) P_{j_1} + (x_2 - \theta t_{2s}) P_{j_2} + \cdots\cdots + (x_m - \theta t_{ms}) P_{j_m} + \theta P_s = P$$

をうる。$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m$ はすべて、正の数であるから、(1.13) の係数がすべて、0 または正となるように正の数 θ をえらぶことができる。このとき $\{(x_1-\theta t_{1s}), (x_2-\theta t_{2s}), \cdots\cdots, (x_m-\theta t_{ms}), \theta\}$ は、1つの可能解である。目的関数の値は、

$$\begin{aligned}(1.14) \qquad & (x_1-\theta t_{1s}) c_{j_1} + (x_2-\theta t_{2s}) c_{j_2} + \cdots\cdots + (x_m-\theta t_{ms}) c_{j_m} + \theta c_s \\ & = x_1 c_{j_1} + x_2 c_{j_2} + \cdots\cdots + x_m c_{j_m} - \theta(t_{1s} c_{j_1} + t_{2s} c_{j_2} + \cdots\cdots + t_{ms} c_{j_m} - c_s) \\ & = z_0 - \theta(z_s - c_s)\end{aligned}$$

となる。θ は正の数であるから、すべての s に対して $z_s - c_s \geq 0$ がなりたつならば，目的

関数の値は z_0 より大きくなりえない。すなわち、z_0 は最大であり、$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ は最適解である。もし、ある s について、$z_s-c_s<0$ がなりたつならば、$z_0-\theta(z_s-c_s)>z_0$ となる。すなわち、より大きな目的関数の値をもつ可能解が存在する。このように z_s-c_s の付号によって、解が最適であるかどうかを判別することができる。そこで、これをシンプレックス判別基準とよんでいる。

いくつかの s に対して、$z_s-c_s<0$ がなりたつとき、$\min\limits_{z_s-c_s<0} z_s-c_s$ に対応する s をもとめる。このようにして、s を決定した上で、θ の大きさについて考える。θ を、大きくすれば、目的関数の値は大きくなる。そこで、θ がどこまで大きくできるかを考える。解はすべて、0または正でなければならない。したがって、(1.13) の係数について、

$$x_i-\theta\, t_{is}\geq 0, \qquad i=1, 2, \cdots, m\ ; \qquad \theta>0$$

がなりたたなければならない。ここで、t_{is} $(i=1, 2, \cdots, m)$ がすべて、0または負であるときには、θ はいくらでも大きくとれる。したがって、目的関数の値は上限をもたない。しかしながら、少なくとも1つの t_{is} が正であるときには、その i に対して、

$$\theta\leq\frac{x_i}{t_{is}}$$

を満足しなければならない。したがって、θ は、不等式

$$\theta\leq\theta_0=\min_{t_{is}>0}\frac{x_i}{t_{is}}=\frac{x_r}{t_{rs}}$$

を満足しなければならない。いま、$\theta=\theta_0$ とすれば、目的関数の値の増加は最も大きい。このとき (1.13) は

$$\begin{aligned}(1.15)\qquad P&=(x_1-\theta_0\, t_{1s})P_{j_1}+\cdots+(x_r-\theta_0\, t_{rs})P_{j_r}+\cdots+(x_m-\theta_0\, t_{ms})P_{j_m}+\theta_0\, P_s\\&=(x_1-\theta_0\, t_{1s})P_{j_1}+\cdots+(x_{r-1}-\theta_0\, t_{r-1\,s})P_{j_{r-1}}+\theta_0\, P_s\\&\quad+(x_{r+1}-\theta_0\, t_{r+1\,s})P_{j_{r+1}}+\cdots+(x_m-\theta_0\, t_{ms})P_{j_m}\end{aligned}$$

となる。すなわち、目的関数の値を増加するために、$P_{j_1}, P_{j_2}, \cdots, P_{j_m}$ のうちから、P_{j_r} をおとし、P_s をとり入れて、$P_{j_1}, \cdots, P_{j_{r-1}}, P_s, P_{j_{r+1}}, \cdots, P_{j_m}$ を基底とする、基底解をつくりあげたわけである。このように、1つの基底解から出発して、基底のベクトルを1つづつとりかえていって、最適解に到達しようとするのが、シンプレックス法である。

---

* 一度に多くのベクトルを入れかえてしまう方法が、香川大学学芸学部、渡辺哲雄氏によってあたえられている。Tetsuo Watanabe: "On the Simplex Criterion (II)" Memoirs of the Faculty of Liberal Arts & Education Kagawa University Part II No. 67 March 1959 pp. 1—9.

シンプレックス法においては、基底にとり入れるベクトル P_s に対して、おいだすベクトル P_{j_r} を定めるために、$\theta_0=\min_{t_{is}>0} x_i/t_{is}$ をもとめた。もし、この θ_0 が2つ以上の i についてとられるならば、

$$(1.16)\qquad (x_1-\theta_0 t_{1s})P_{j_1}+(x_2-\theta_0 t_{2s})P_{j_2}+\cdots+(x_m-\theta_0 t_{ms})P_{j_m}+\theta_0 P_s=P$$

において、2つ以上の係数が0となる。したがって、Pは $(m-1)$ 個より少ないベクトルの一次結合としてあらわされる。これは、前においた仮定に反する。しかしながらこのことは充分起りうることである。このとき、新しい基底に関しては、基底解が0をふくむ。これを退行の場合という。退行の場合には、つぎの基底解にすすむとき、$\theta_0=0$ となる場合がしばしばおこる。このときは目的関数の値は増加しないでとどまっている。このようなときも、多くの場合は、何段階かの後には、目的関数の値は増加しはじめて、最後には、最適解に到達するのである。しかしながら、一方、目的関数の値が増加しないで、とどまっているうちに、前にすてたベクトルを再びとり入れて、何段階か前の基底解にもどることもおこる。これを循環という。以下に紹介する一般化シンプレックス法は、最適解が存在するときには、途中で、循環をおこすことなく、かならず、最適解に到達する方法である。

2. 一般化シンプレックス法

一般化シンプレックス法をとりあつかうために、行ベクトルに対して、辞書型の順序を導入する。

定義 $\bar{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)>0$: ベクトル $\bar{x}$ の成分のなかに、少なくとも1つ0でないものが存在し、かつ、そのうちの最初のものが正であるとき、$\bar{x}>0$（0は零ベクトルをあらわす）とする。

すなわち、ベクトル $\bar{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して、1つの自然数 k が存在して、

$$1\leq k\leq n$$
$$x_j=0, \qquad j<k$$
$$x_k>0$$

がなりたつとき、$\bar{x}>0$ とする。

この関係をもちいて、ベクトルの大小関係をつぎのように定義する。

定義 $\bar{x}>\bar{y}$: $(\bar{x}-\bar{y})>0$ であるとき、$\bar{x}>\bar{y}$ とする。

以下、本稿では、行ベクトルの間の大小関係はすべて辞書型とする。この辞書型の順序をもちいて、一般化シンプレックス法の問題をつぎのようにかく:

$$(2.1)\quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0l} \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0l} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix}$$

$$(2.2)\quad \bar{x}_i = (x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{il}) \geq 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$(2.3)\quad \bar{x}_0 = (x_{01},\ x_{02},\ \cdots,\ x_{0l}) = max$$

を満足する行列 (x_{ij}) をもとめること。

ここで、

$$P = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$$

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0l} \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0l} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix}$$

とかくこととすれば、(2.1) は

$$(2.4)\quad P\widetilde{X} = \sum_{j=0}^{n} P_j \bar{x}_j = M$$

とかける。ここで、行列 M の位は $m+1$ であるとする。シンプレックス法と同じように、つぎの定義をあたえる。

定義　可能解：(2.1) および (2.2) を満足する行列 $\widetilde{X}$ を、可能解という。

定義　解の値：ベクトル $\bar{x}_0$ を、解の値という。

定義　基底解：$P_0, P_1, \cdots, P_n$ のうち、P_0 をふくむ $m+1$ 個のベクトル $P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_m}$ からなる行列 $B=(P_0,\ P_{j_1},\ \cdots,\ P_{j_m})$ に対して、

$$(2.5)\quad BV = P_0\bar{v}_0 + P_{j_1}\bar{v}_1 + \cdots + P_{j_m}\bar{v}_m = M$$

$$(2.6)\quad \bar{v}_i = (v_{i1},\ v_{i2},\ \cdots,\ v_{il}) \geq 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

を満足する行列 V を、基底解という。

定義. 最適解： 解の値 $\bar{x}_0$ を最大（辞書型の順序で）にする可能解を最適解という。

この場合にも、前にのべたシンプレックス法におけるのと同様に、つぎのことがなりたつ。すなわち、可能解が存在すれば、基底解が存在する（定理8）。最適解が存在し、かつ、ただ1つ存在するときには、その最適解は基底解である。最適解が2つ以上存在するときには、同じ解の値をもつ基底解が存在する（定理6）。

基底解 V は、

$$BV=P_0\bar{v}_0+P_{j_1}\bar{v}_1+\cdots+P_{j_m}\bar{v}_m=M$$

を満足する。M の位は $m+1$ であるから、B および V の位もまた $m+1$ である。したがって、B の $m+1$ 個の列ベクトル $P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_m}$ は一次独立である。また、これらのベクトルは $m+1$ 次のベクトルであるから、基底を構成する。このために、V が基底解とよばれるのである。また $BV=M$ において、$|B|\neq 0$、したがって、$V=B^{-1}M$ は一意に決定する。V の位は $m+1$ であるから、V の $m+1$ 個の行ベクトルは、どれも零ベクトルになることはない。すなわち $\bar{v}_i\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$。したがって、(2.6) の条件は、条件

$$(2.7)\qquad \bar{v}_i>0 \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

でおきかえることができる。したがって、基底解においては、基底を構成する $P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_m}$ に対応するベクトル変数のうち、$\bar{v}_0$ をのぞいて、$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_m$ は正である。また、基底以外のベクトル P_j に対応するベクトル変数 $\bar{x}_j$ は零ベクトルであると考えられる。

いま、

$$B^{-1}=(P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_m})^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{0j_1} & \cdots & a_{0j_m} \\ a_{10} & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \cdots & \beta_{0m} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{m0} & \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{\beta}_0 \\ \bar{\beta}_1 \\ \cdots \\ \bar{\beta}_m \end{pmatrix}$$

とかく。

定理1 B を基底とする基底解が最適解であるための、必要かつ充分な条件は、

$$(2.8)\qquad \bar{\beta}_0 P_j \geq 0 \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

がなりたつことである。

証明 $\bar{X}$ を任意の可能解とすれば、

$$P\bar{X}=M$$

がなりたつ。いまこの両辺に B^{-1} を左からかければ、

$$B^{-1}P\bar{X}=B^{-1}M$$
$$=V$$

をうる。これをかきなおせば、

$$\begin{pmatrix}\bar{\beta}_0\\ \bar{\beta}_1\\ \cdots\\ \bar{\beta}_m\end{pmatrix}(P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_n)\begin{pmatrix}\bar{x}_0\\ \bar{x}_1\\ \cdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{v}_0\\ \bar{v}_1\\ \cdots\\ \bar{v}_m\end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$\begin{pmatrix}\bar{\beta}_0P_0 & \bar{\beta}_0P_1 & \cdots & \bar{\beta}_0P_n\\ \bar{\beta}_1P_0 & \bar{\beta}_1P_1 & \cdots & \bar{\beta}_1P_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{\beta}_mP_0 & \bar{\beta}_mP_1 & \cdots & \bar{\beta}_mP_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_0\\ \bar{x}_1\\ \cdots\\ \bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{v}_0\\ \bar{v}_1\\ \cdots\\ \bar{v}_m\end{pmatrix}$$

したがって、

$$\begin{pmatrix}(\bar{\beta}_0P_0)\bar{x}_0+(\bar{\beta}_0P_1)\bar{x}_1+\cdots+(\bar{\beta}_0P_n)\bar{x}_n\\ (\bar{\beta}_1P_0)\bar{x}_0+(\bar{\beta}_1P_1)\bar{x}_1+\cdots+(\bar{\beta}_1P_n)\bar{x}_n\\ \cdots\cdots\\ (\bar{\beta}_mP_0)\bar{x}_0+(\bar{\beta}_mP_1)\bar{x}_1+\cdots+(\bar{\beta}_mP_n)\bar{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{v}_0\\ \bar{v}_1\\ \cdots\\ \bar{v}_m\end{pmatrix}$$

をうる。このようにして、

$$(\bar{\beta}_0P_0)\bar{x}_0+(\bar{\beta}_0P_1)\bar{x}_1+\cdots\cdots+(\bar{\beta}_0P_n)\bar{x}_n=\bar{v}_0 \tag{2.9}$$

がなりたつ。$\bar{\beta}_0$ は定義から直ちにわかるように、

$$\bar{\beta}_0P_0=1,\quad \bar{\beta}_0P_{j_1}=0,\quad \cdots\cdots,\quad \bar{\beta}_0P_{j_m}=0$$

を満足する。したがって、(2.9) は、

$$\bar{x}_0+(\bar{\beta}_0P_1)\bar{x}_1+\cdots\cdots+(\bar{\beta}_0P_n)\bar{x}_n=\bar{v}_0 \tag{2.10}$$

とかくことができる。そこで、$\bar{\beta}_0P_j\geqq 0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ がなりたつならば、$\bar{x}_i\geqq 0$ であるから、$\bar{x}_0\leqq\bar{v}_0$ をうる。したがって、定理の条件は充分条件である。

つぎに、この条件が必要条件であることを証明する。

$$P_s=(BB^{-1})P_s=B(B^{-1}P_s)=BY_s \tag{2.11}$$
$$=(P_0,\ P_{j_1},\ \cdots,\ P_{j_m})\begin{pmatrix}y_{0s}\\ y_{1s}\\ \cdots\\ y_{ms}\end{pmatrix}$$

$$=y_{0s}P_0+y_{1s}P_{j_1}+\cdots+y_{ms}P_{j_m}$$

(2.11) の両辺に、$\bar{\theta}=(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_l)$ を右からかければ、

$$P_s\bar{\theta}=y_{0s}P_0\bar{\theta}+y_{1s}P_{j_1}\bar{\theta}+\cdots+y_{ms}P_{j_m}\bar{\theta}$$

をうる。したがって、

$$(2.12)\qquad P_s\bar{\theta}-y_{0s}P_0\bar{\theta}-y_{1s}P_{j_1}\bar{\theta}-\cdots-y_{ms}P_{j_m}\bar{\theta}=0$$

ここで、$P_i\bar{\theta}$ は $(m+1,\ l)$ 行列であり、0 は $(m+1,\ l)$ 零行列である。(2.5) と (2.12) を辺々加えあわせれば、

$$(2.13)\qquad P_0(\bar{v}_0-y_{0s}\bar{\theta})+P_{j_1}(\bar{v}_1-y_{1s}\bar{\theta})+\cdots+P_{j_m}(\bar{v}_m-y_{ms}\bar{\theta})=M$$

をうる。ここで、$(\bar{v}_i-y_{is}\bar{\theta})\geq 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ および $\bar{\theta}\geq 0$ を満足するような $\bar{\theta}$ をつくることができるならば、(2.13) は1つの可能解をあらわす。

(2.7) より、$\bar{v}_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ がなりたつのであるから、$y_{is}\leq 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ がなりたつときには、$\bar{\theta}\geq 0$ を任意にとればよい。

ある i $(1\leq i\leq m)$ について、$y_{is}>0$ を満足するものが存在するときには、$\bar{\theta}$ は、

$$\bar{\theta}\leq\frac{1}{y_{is}}\bar{v}_i$$

を満足しなければならない。$\bar{v}_i>0$ であるから、ある k_i $(1\leq k_i\leq l)$ が存在して、

$$(2.14)\qquad v_{ij}=0,\qquad j<k_i;\quad v_{i,k_i}>0$$

を満足する。いま

$$\max_{y_{is}>0} k_i=k_r$$

とする。ただし、$\max k_i$ が2つ以上の i についてとられるときには、$(^1/y_{is})\bar{v}_i$ の第 k_i 成分、$(^1/y_{is})v_{i,k_i}$ の最小なものに対する i をとって、r とする。このとき $\bar{v}_r$ に対して、

$$v_{rj}<0,\quad j<k_r;$$

$$v_{r,k_r}>0$$

がなりたつ。したがって、

$$(2.15)\qquad v_{r,k_r}-y_{rs}\theta_{k_r}>0$$

を満足する正の数 θ_{k_r} が存在する。この θ_{k_r} を k_r 成分とし、k_r+1 成分以下の成分を任意にとって、

$$(2.16)\qquad \bar{\theta}=(0,\ \cdots,\ 0,\ \theta_{k_r},\ \theta_{k_r+1},\ \cdots,\ \theta_l)$$

をつくれば、

$$\bar{\theta}>0$$

を満足する。この $\bar{\theta}$ に対する (2.13) の各係数の正負を考える。

$$(\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta}) = (v_{i1},\ v_{i2},\ \cdots,\ v_{il}) - y_{is}(0,\ \cdots,\ 0,\ \theta_{k_r},\ \cdots\ \theta_l)$$

$$= (v_{i1},\ \cdots,\ v_{i,k_r-1},\ v_{ik_r} - y_{is}\theta_{k_r},\ \cdots,\ v_{il} - y_{is}\theta_l)$$

ここで、$k_i < k_r$ であるものについては、

$$v_{ij} = 0,\quad j < k_i;\ \ v_{i,k_i} > 0$$

を満足するのであるから、

$$(\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta}) > 0$$

がなりたつ。

$k_i = k_r$ であるものについては、θ_{k_r} のつくり方からわかるように、

$$v_{ij} = 0,\quad j < k_r;\ \ v_{ik_r} - y_{is}\theta_{k_r} > 0$$

を満足するのであるから、

$$(\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta}) > 0$$

をうる。

いづれの場合も、$(\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta}) > 0$ がなりたつのであるから、

(2.17) $\qquad (\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta}),\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad \bar{\theta}$

は1つの可能解である。

このとき、解の値の変化は、

$$(\bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}) - \bar{v}_0$$

$$= -y_{0s}\bar{\theta} = (0,\ \cdots,\ 0,\ -y_{0s}\theta_{k_r},\ \cdots,\ -y_{0s}\theta_l)$$

となる。したがって、$y_{0s} < 0$ がなりたつときには、このベクトルは正である。すなわち、

$$\bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta} > \bar{v}_0$$

がなりたつ。このことから、$\bar{\beta}_0 P_s = y_{0s} < 0$ となるような P_s が存在するときには、$\bar{v}_0$ より大きな解の値をもつ解が存在することがわかる。したがって、もし $\bar{v}_0$ が最大であるときには、$\bar{\beta}_0 P_s < 0$ となる P_s は存在しない。すなわち、$\bar{\beta}_0 P_j \geq 0$ $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ がなりたつ。このようにして、この条件が必要であることが証明された。

以上の証明からわかるように、$\bar{\beta}_0 P_j = y_{0j} < 0$ を満足する P_j が存在するときには、$y_{0j} < 0$ のもののうち、y_{0j} 最小のもの、すなわち、

(2.18) $\qquad \bar{\beta}_0 P_s = \min\limits_{\bar{\beta}_0 P_j < 0} \bar{\beta}_0 P_j$

に対応する P_s をえらべば、解の値の増加は最も大きい。

定理２　基底Bに対応する基底解が最適解であるとする。このとき、$\bar{\beta}_0 P_j > 0$ を満足

する P_j に対応するベクトル $\bar{x}_j$ が、すべて、零ベクトルである解は、基底解であるといなとにかかわらず、最適解である。ある P_j に対して、$\bar{\beta}_0 P_j > 0$ および $\bar{x}_j > 0$ を満足する解は、最適解ではない。

証明 $\{\bar{v}_0, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_m\}$ が最適解であるとすれば、定理1から

$$\bar{\beta}_0 P_j \geq 0, \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

がなりたつ。いま1つの可能解

$$P_0 \bar{x}_0 + P_1 \bar{x}_1 + \cdots + P_n \bar{x}_n = M$$

において、$\bar{\beta}_0 P_j > 0$ がなりたつすべての j について、$\bar{x}_j = 0$ となっているとする。解の値の間の関係式

$$(2.10) \qquad \bar{x}_0 + (\bar{\beta}_0 P_1) \bar{x}_1 + \cdots + (\bar{\beta}_0 P_n) \bar{x}_n = \bar{v}_0$$

において、第2項以下は、すべて零ベクトルとなる。したがって、

$$\bar{x}_0 = \bar{v}_0$$

がなりたつ。したがって、$\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}$ は、1つの最適解である。

つぎに、ある j に対して $\bar{\beta}_0 P_j > 0$ であり、かつ、$\bar{x}_j > 0$ であるとする。$(\bar{\beta}_0 P_j)\bar{x}_j > 0$ となるから、

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= \bar{x}_0 + (\bar{\beta}_0 P_1) \bar{x}_1 + \cdots + (\bar{\beta}_0 P_n) \bar{x}_n \\ &\geq \bar{x}_0 + (\bar{\beta}_0 P_j) \bar{x}_j \end{aligned}$$

をうる。したがって、

$$\bar{v}_0 - \bar{x}_0 \geq (\bar{\beta}_0 P_j) \bar{x}_j > 0$$

がなりたつ。すなわち

$$\bar{v}_0 > \bar{x}_0$$

がなりたつ。このようにして、$\bar{x}_0$ は最大でなく、解 $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}$ は最適解ではない。

定理3 $y_{0s} = \bar{\beta}_0 P_s < 0$ を満足する s が存在するならば、より大きな値をもつ解が存在する。

証明 定理1の証明によって明らかである。

定理4 もし、ある s について、$y_{0s} = \bar{\beta}_0 P_s < 0$ であって、かつ、すべての i について、$y_{is} = \bar{\beta}_i P_s \leq 0$ がなりたつとすれば、解の値は上限をもたない。

証明 (2.13) の可能解において、$y_{is} = \bar{\beta}_0 P_s \leq 0$, $i=1, 2, \cdots, m$ がなりたつとすれば、任意の $\bar{\theta} > 0$ に対して、

$$(\bar{v}_i - y_{is} \bar{\theta}), \quad i=1, 2, \cdots, m; \qquad \bar{\theta}$$

は1つの可能解である。このとき、解の値は

$$\bar{x}_0 = \bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}$$

を満足する。ここで、$\bar{\theta}>0$ は任意にとれるのであるから、$\bar{x}_0$ は上限をもたない。

定理5　ある s について、$y_{0s}=\bar{\beta}_0 P_s<0$, ある i について、$y_{is}=\bar{\beta}_i P_s>0$ がなりたつとする。このとき、1つの P_{j_r} をおいだし、P_s を導入することによって、より大きな解の値をもつ基底解をつくることができる。

証明　P_0, P_{j_1}, $\cdots$, P_{jm} からなる基底に、P_s を導入して可能解をつくるためには、定理1の証明の中で示されたように、

$$(2.13)\qquad P_0(\bar{v}-y_{0s}\bar{\theta})+P_{j_1}(\bar{v}_1-y_{1s}\bar{\theta})+\cdots+P_{j_m}(\bar{v}_m-y_{ms}\bar{\theta})+P_s\bar{\theta}=M$$

において、

$$\bar{v}_i-y_{is}\bar{\theta}\geq 0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad \bar{\theta}\geq 0$$

を満足するように $\bar{\theta}$ をきめればよい。解の値 $\bar{v}_0-y_{0s}\bar{\theta}$ はできるだけ大きくしたい。ここで、$y_{0s}<0$ であるから、$\bar{\theta}$ をできるだけ大きくとればよい。$y_{is}\leq 0$ を満足する i に対しては、$\bar{\theta}>0$ にとりさえすれば、$\bar{v}_i-y_{is}\bar{\theta}\geq 0$ をうる。

$y_{is}>0$ を満足す i に対して

$$\bar{v}_i-y_{is}\bar{\theta}\geq 0$$

すなわち

$$\bar{\theta}\leq\frac{1}{y_{is}}\bar{v}_i$$

を満足しなければならない。したがって、

$$\bar{\theta}\leq\min_{y_{is}>0}\frac{1}{y_{is}}\bar{v}_i$$

を満足しなければならない。このとき、最も大きい $\bar{\theta}$ は

$$(2.19)\qquad \bar{\theta}=\min_{y_{is}>0}\frac{1}{y_{is}}\bar{v}_i=\frac{1}{y_{rs}}\bar{v}_r$$

$$=(0,\ \cdots,\ 0,\ \frac{1}{y_{rs}}v_{rk_r},\ \frac{1}{y_{1s}}v_{rk_r+1},\ \cdots,\ \frac{1}{y_{rs}}v_{rl})$$

となる。V の位は $m+1$ であるから、V の $m+1$ 個の行ベクトルは、どの2つも、互に比例することはない。したがって、

$$\min_{y_{is}>0}\frac{1}{y_{is}}\bar{v}_i$$

が2つ以上の i についてなりたつことはなく。r は一意に決定する。なお $v_{rk_r}>0$ である

から、

$$\bar{\theta} = \min_{y_{is}>0} \frac{1}{y_{is}} \bar{v}_i = \frac{1}{y_{rs}} \bar{v}_r > 0$$

をうる。

$\bar{\theta}$ を上のように定めたときの $\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta}$ の正負を考える。$y_{is} \leq 0$ を満足するときには、直ちにわかるように、$\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta} > 0$ がなりたつ。$y_{is} > 0$ なるときには、$\bar{\theta}$ のつくり方からわかるように、

$$\frac{1}{y_{is}} \bar{v}_i - \bar{\theta} = \frac{1}{y_{is}} \bar{v}_i - \frac{1}{y_{rs}} \bar{v}_r > 0, \quad i \neq r$$

を満足する。したがって、

$$\bar{v}_i - y_{is}\bar{\theta} = y_{is}\left(\frac{1}{y_{is}} \bar{v}_i - \bar{\theta}\right) > 0, \quad i \neq r$$

をうる。とくに $i=r$ なるときは、

$$\bar{v}_r - y_{rs}\bar{\theta} = \bar{v}_r - \frac{y_{rs}}{y_{rs}} \bar{v}_r = 0$$

をうる。このように、P_{j_r} に対応するベクトル $\bar{v}_r - y_{rs}\bar{\theta}$ は零ベクトルである。したがって、(2.13) は、

$$P_0(\bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}) + \cdots + P_{j_{r-1}}(\bar{v}_{r-1} - y_{r-1,s}\bar{\theta}) + P_s\bar{\theta} + P_{j_{r+1}}(\bar{v}_{r+1} - y_{r+1,s}\bar{\theta}) + \cdots + P_{j_m}(\bar{v}_m - y_{ms}\bar{\theta}) = M$$

とかくことができる。$m+1$ 個のベクトル、$P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_{r-1}}, P_s, P_{j_{r+1}}, \cdots, P_{j_m}$ の係数になっているベクトルはすべて、上に示したように、正であるから、1つの基底解である。すなわち、P_s を導入し、P_{j_r} をおい出して、新しい基底解がつくられたわけである。この新しい基底解のもつ解の値 $\bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}$ は、

$$(\bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}) - \bar{v}_0 = y_{0s}\bar{\theta} > 0$$

を満足する。すなわち、$\bar{v}_0$ よりほんとに大きくなっている。以上によって、定理5が証明された。

結局、$B=B^{(k)}$ を基底とする解において、ある s について $y_{0s} = \bar{\beta}_0 P_s < 0$ がなりたつとき、より大きな解の値をもつ基底 $B^{(k+1)}$ および $(B^{(k+1)})^{-1}$ をうるための計算は、つぎのようにすればよいことがわかる。$B=B^{(k)}=(P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_m})$ を基底とする基底解を、$\bar{v}_i^{(k)} (i=0, 1, 2, \cdots, m)$ とする。

$$P_0(\bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}) + P_{j_1}(\bar{v}_1 - y_{1s}\bar{\theta}) + \cdots + P_{j_m}(\bar{v}_m - y_{ms}\bar{\theta}) + P_s\bar{\theta} = M$$

$$max\,\bar{\theta} = \min_{y_{is}>0} \frac{1}{y_{is}}\bar{v}_i = \frac{1}{y_{rs}}\bar{v}_r$$

を満足するように $\bar{\theta}$ を定めることによって、つぎの段階の基底 $B^{(k+1)}=(P_0, P_{j_1}, \quad, P_{j_{r-1}}, P_s, P_{j_{r+1}}, \quad, P_{j_m})$ に達する。このときの基底解 $\bar{v}_i^{(k+1)}(i=0, 1, \quad, m)$ は、

$$(2.20)\quad \begin{cases} \bar{v}_i^{(k+1)} = \bar{v}_i^{(k)} - y_{is}\bar{\theta} = \bar{v}_i^{(k)} - \dfrac{y_{is}}{y_{rs}}\bar{v}_r^{(k)}, & i=0,1, \quad, r-1, r+1, \quad, m \\ \bar{v}_r^{(k+1)} = \bar{\theta} = \dfrac{1}{y_{rs}}\bar{v}_r^{(k)} \end{cases}$$

とかくことができる、また、

$$(P_0, \ P_{j_1} , \quad , P_{j_m}) \begin{pmatrix} \bar{\beta}_0^{(k)} \\ \bar{\beta}_1^{(k)} \\ \cdots \\ \bar{\beta}_m^{(k)} \end{pmatrix} = E$$

したがって、

$$(2.21)\qquad P_0\,\bar{\beta}_0^{(k)} + P_{j_1}\bar{\beta}_1^{(k)} + \quad + P_{j_m}\bar{\beta}_m^{(k)} = E$$

がなりたつ。一方

$$(2.11)\qquad P_s = y_{0s}\,P_0 + y_{1s}\,P_{j_1} + \quad + y_{ms}\,P_{j_m}$$

がなりたつ。(2.11) の両辺に $\dfrac{1}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}$ を右からかければ、

$$(2.22)\qquad \frac{1}{y_{rs}}P_s\bar{\beta}_r^{(k)} = \frac{y_{0s}}{y_{rs}}P_0\bar{\beta}_r^{(k)} + \frac{y_{1s}}{y_{rs}}P_{j_1}\bar{\beta}_r^{(k)} + \quad + \frac{y_{ms}}{y_{rs}}P_{j_m}\bar{\beta}_r^{(k)}$$

をうる。(2.21) から (2.22) を辺々引き算し、$\dfrac{1}{y_{rs}}P_s\bar{\beta}_s^{(k)}$を移項すれば、

$$P_0\,(\bar{\beta}_0^{(k)} - \frac{y_{0s}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}) + P_{j_1}(\bar{\beta}_1^{(k)} - \frac{y_{1s}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}) + \quad + P_{j_r}(\bar{\beta}_r^{(k)} - \frac{y_{rs}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)})$$
$$+ \cdots + P_{j_m}(\bar{\beta}_m^{(k)} - \frac{y_{ms}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}) + P_s\frac{1}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)} = E$$

すなわち、

$$P_0\,(\bar{\beta}_0^{(k)} - \frac{y_{0s}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}) + \quad + P_{j_{r-1}}(\bar{\beta}_{r-1}^{(k)} - \frac{y_{r-1,s}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}) + P_s\frac{1}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}$$
$$+ P_{j_{r+1}}(\bar{\beta}_{r+1}^{(k)} - \frac{y_{r+1,s}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}) + \quad + P_{j_m}(\bar{\beta}_m^{(k)} - \frac{y_{ms}}{y_{rs}}\bar{\beta}_r^{(k)}) = E$$

をうる。したがって、

$$(P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_{r-1}}, P_s, P_{j_{r+1}}, \cdots, P_{j_m}) \begin{pmatrix} \bar{\beta}_0^{(k)} - \dfrac{y_{0s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \bar{\beta}_1^{(k)} - \dfrac{y_{1s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_{r-1}^{(k)} - \dfrac{y_{r-1,s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \dfrac{1}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \bar{\beta}_{r+1}^{(k)} - \dfrac{y_{r+1,s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_m^{(k)} - \dfrac{y_{ms}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \end{pmatrix} = E$$

したがって、

$$(B^{(k+1)})^{-1} = (P_0, P_{j_1}, \cdots, P_{j_{r-1}}, P_s, P_{j_{r+1}}, \cdots, P_{j_m})^{-1}$$

$$(2.24) \qquad = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_0^{(k+1)} \\ \bar{\beta}_1^{(k+1)} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_{r-1}^{(k+1)} \\ \bar{\beta}_r^{(k+1)} \\ \bar{\beta}_{r+1}^{(k+1)} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_m^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_0^{(k)} - \dfrac{y_{0s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \bar{\beta}_1^{(k)} - \dfrac{y_{1s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_{r-1}^{(k)} - \dfrac{y_{r-1,s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \dfrac{1}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \bar{\beta}_{r+1}^{(k)} - \dfrac{y_{r+1,s}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_m^{(k)} - \dfrac{y_{ms}}{y_{rs}} \bar{\beta}_r^{(k)} \end{pmatrix}$$

をうる。

もし基底解が1つみつかれば、(2.20) および (2.24) によってあたえられた計算法によって 基底のベクトルを1つづつとりかえて計算を進める。相異なる基底の個数は、n個からm個をとり出す組合せの数 $\binom{n}{m}$ をこえることはない。また、おのおのの基底に対して、ただ1つの基底解 $V=B^{-1}M$ が対応する。したがって、相異なる基底解の数は、相異なる基底の数と等しく、有限である。また、定理5で示されたように、解の値は、基底の変更によって、ほんとに大きくなってゆくのであるから、同じ値がくりかえされることはない。したがって、同じ基底がくりかえされることもない。このように、この方法では、

循環はおこることなく、有限回の基底の変更によって、(a) $\bar{\beta}_0 P_j \geq 0,\ j=1,2,\cdots,n$ を満足する基底に到達するか、あるいは (b) $\bar{\beta}_0 P_s < 0,\ \bar{\beta}_i P_s = y_{is} \leq 0,\ i=1,2,\cdots,m$ を満足する基底 B および、ベクトル P_s にであうか、いずれかである。論理的には、$\bar{\beta}_0 P_s < 0$ を満足し、ある j について $\bar{\beta}_j P_s = y_{is} > 0$ をみたす場合が考えられるが、この場合は、定理5でしめされたように、基底 B に P_s を導入し、P_{j_r} をおいだすことによって、より大きな値をもつ基底解をつくることができる。しだがって、最終段階としては、(a) または (b) のいづれかが起りうるだけである。

(b) の場合は、(2.13) において、$\bar{\theta} > 0$ にとりさえすればよく、このとき解の値 $\bar{x}_0 = \bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}$ は有界でない。

解の値が有界であるとき、すなわち (a) の場合は、定理1から、この基底解は最適解である。このとき、$\bar{\beta}_0 P_0 = 1,\ \bar{\beta}_0 \bar{P}_{j_i} = 0 (i=1,2,\cdots,m)$ がなりたっている。もし基底に入っていないすべてのベクトル P_j について、$\bar{\beta}_0 P_j > 0$ がなりたつとする。このとき、基底変数以外のベクトル変数 $\bar{x}_i$ を正にとって可能解をつくれば、定理2からわかるように、この可能解は最適解ではない。したがって、最適解は現在到達している最適解ただ1つである。

もし基底に入っていないベクトルのなかに、$\bar{\beta}_0 P_j = 0$ を満足するものがあるときには、この P_j に対応するベクトル変数 $\bar{x}_j$ を正にとり、$\bar{\beta}_0 P_j > 0$ を満足する P_j に対応するベクトル変数はすべて、零ベクトルにとって可能解をつくる。このようにしてできた可能解は、定理2から、最適解である。

以上によって、つぎの2つの定理が証明できた。

定理6　基底解が存在し、かつ、解の値が有界であるときには、つぎのような最適基底解が存在する。

$$BV = P_0 \bar{v}_0 + P_{j_1} \bar{v}_1 + \cdots + P_{j_m} \bar{v}_m = M$$

$$\bar{v}_i > 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$\beta_0 P_0 = 1, \quad \bar{\beta}_0 P_{j_i} = 0, \quad \bar{\beta}_0 P_j \geq 0$$

$$\bar{v}_0 = \bar{\beta}_0 M = max\ \bar{x}_0$$

ただし、$\bar{\beta}_0$ は B^{-1} の第1行をあらわす。

定理7　基底解が存在し、かつ、解の値が有界でないときには、つぎの性質をもつような、基底 B およびベクトル P_s が存在する。

$$BV = P_0 \bar{v}_0 + P_{j_1} \bar{v}_1 + \cdots + P_{j_m} \bar{v}_m = M$$

$$\bar{v}_i > 0 \qquad i=1, 2, \cdots, m$$

$$\bar{\beta}_0 P_0 < 0, \qquad \bar{\beta}_i P_s \leq 0$$

このとき、

$$P_0 \{\bar{v}_0 - (\bar{\beta}_0 P_s)\bar{\theta}\} + P_{j_1}\{\bar{v}_1 - (\bar{\beta}_1 P_s)\bar{\theta}\} + \cdots + P_{j_m}\{\bar{v}_m - (\bar{\beta}_m P_s)\bar{\theta}\} + P_s \bar{\theta} = M$$

は、任意の $\bar{\theta} \geq 0$ に対して、有界でない解の値をもつ可能解の集合をあらわす。なお、$\bar{\beta}_i$ は B^{-1} の第 $i+1$ 行である。

つぎに、構成的方法を用いて、つぎの定理を証明する。

定理 8　もし可能解が存在するならば、基底解が存在する。

証明　この定理を証明するために、(2.4) に行および列をつけ加えた、つぎのような関係式を構成する。

$$(2.25) \quad \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{x}_0' + \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{x}_1' + \cdots + \begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix} \bar{x}'_n + \begin{pmatrix} V_1 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{x}'_{n+1} + \cdots + \begin{pmatrix} V_m \\ 1 \end{pmatrix} \bar{x}_{n+m} + \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \bar{x}'_{n+m+1} = \begin{pmatrix} M & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、・は零ベクトルをあらわす。すなわち、

$$\begin{pmatrix} P_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \\ \cdots \\ a_{mi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} V_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} M & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0l} & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ml} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。なお $\bar{x}_i'$ は $l+1$ 個の成分をもつ行ベクトルである。

いま定理の仮定から、

$$P_0 \bar{x}_0 + P_1 \bar{x}_1 + \cdots + P_n \bar{x}_n = M$$

を満足する、負ではない、$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ が存在する。そこで、これから

$$(2.26) \quad \begin{cases} \bar{x}'_0 = (\bar{x}_0, 0), \quad \bar{x}'_1 = (\bar{x}_1, 0), \quad \cdots, \quad \bar{x}' = (\bar{x}_n, 0) \\ \bar{x}'_{n+i} = 0, \qquad i=1,2,\cdots,m \\ \bar{x}'_{n+m+1} = (0,0,\cdots,0,1) \end{cases}$$

をつくる。この $\bar{x}'_i, (i=0,1,\cdots,n+m+1)$ は (2.25) を満足する。

(2.25) の $(m+1, l+1)$ 行列の第 $m+1$ 行を考えれば、左辺が示す行列では、

$$\bar{x}'_{n+1} + \bar{x}'_{n+1} + \cdots + \bar{x}'_{n+m+1}$$

であり、右辺の行列では、

$$(0 , 0 , \cdots , 0 , 1)$$

となっている。この2つは相等しいのであるから、

$$\overline{x'}_{n+1}+\overline{x'}_{n+2}+\cdots+\overline{x'}_{n+m+1}=(0 , 0 , \cdots , 0 , 1)$$

がなりたつ。ここで、$\overline{x'}_{n+i}\geq 0 \ (i=1 , 2 , \cdots , m)$ という制限条件をもっているから、

$$\overline{x'}_{n+m+1}\leq(0 , 0 , \cdots , 0 , 1)$$

を満足しなければならない。すなわち、(2.25) を条件とし、$\overline{x'}_{n+m+1}=max$ をもとめる問題においては、解の値は上に有界である。なお、(2.26) によってあたえられるように、$\overline{x'}_{n+m+1}=(0 , 0 , \cdots , 0 , 1)$ を満足する解が存在する。したがって、

$$max \ \overline{x'}_{n+m+1}=(0 , 0 , \cdots , 0 , 1)$$

がなりたつ。ここで、1つの基底解として、

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots , \begin{pmatrix} V_m \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

を基底とするものがたやすくもとめられる。したがって、$\overline{v'}_{n+n+1}=max \ \overline{x'}_{n+m+1}$ を満足するような基底解が存在する。

実際、上の基底解から出発して、$\begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ をふくむ基底解のなかで、$\overline{v'}_{n+m+1}$ をより大きくするものをもとめて行けば、有限回の基底の変更の後 $max \ \overline{v'}_{n+m+1}$ に到達する。$max \ \overline{v'}_{n+m+1}=(0 , 0 , \cdots , 0 , 1)$ がなりたつのであるから、この解では $\overline{x'}_{n+i}=0 \ (i=1 , 2 , \cdots , m)$ となっている。したがって、$\begin{pmatrix} V_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots , \begin{pmatrix} V_m \\ 1 \end{pmatrix}$ は基底には入っていない。すなわち、

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix}\overline{v'}_0+\begin{pmatrix} P_{j_1} \\ 0 \end{pmatrix}\overline{v'}_1+\cdots+\begin{pmatrix} P_{j_m} \\ 0 \end{pmatrix}\overline{v'}_m+\begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \end{pmatrix}\overline{v}_{n+m+1}=\begin{pmatrix} M & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

がなりたっている。$\overline{v'}_i$ の最後の成分をすて、$\overline{v'}_{n+m+1}$ をすてて $\overline{v}_i$ をつくれば、(2.4) の基底解すなわち

$$P_0 \overline{v}_0+P_{j_1}\overline{v}_1+\cdots+P_{j_m}\overline{v}_m=M$$

を満足する $\overline{v}_0, \overline{v}_1, \cdots , \overline{v}_m$ がえられる。

3. 一般化シンプレックス法の線型計画法への適用

線型計画法の問題は (1.5) および (1.6) の制限条件を満足し、(1.7) を最大にする $\{x_1, x_2, \cdots , x_n\}$ をもとめることである。これから、一般化シンプレックス法の型の問題

を構成するために、つぎのように付号をつけかえる。すなわち、$-c_i$*を a_{0i}, a_{ij} を $a_{i+1\,j}$, b_i を b_{i+1} とかきかえる。なお、目的関数の値を x_0 とかくことにすれば、(1.7) は

$$(3.\ 1)\qquad x_0=-a_{01}x_1-a_{02}x_2-\cdots\cdots-a_{0n}x_n$$

とあらわされ、(1.5) は

$$(3.\ 2)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\cdots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+1\,1}x_1+a_{m+1\,2}x_2+\cdots+a_{m+1\,n}x_n=b_{n+1} \end{array}\right.$$

とあらわされる。ここで、(3.2) のすべての式の付号をかえて、辺々加えあわせれば、

$$\left(-\sum_{i=2}^{m+1}a_{i1}\right)x_1+\left(-\sum_{i=2}^{m+1}a_{i2}\right)x_2+\cdots\cdots+\left(-\sum_{i=2}^{m+1}a_{in}\right)x_n=-\sum_{i=2}^{m+1}b_i$$

をうる。これを、

$$(3.\ 3)\qquad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

とかく。(3.2) を満足する $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ は，かならず (3.3) を満足することは明らかである。(3.1) (3.3) および (3.2) をいっしょにして、

$$(3.\ 4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_0+a_{01}x_1+a_{02}x_2+\cdots\cdots+a_{0n}x_n=0 \\ \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad a_{m+1\,1}x_1+a_{m+1\,2}x_2+\cdots\cdots+a_{m+1\,n}x_n=b_{m+1} \end{array}\right.$$

とすれば、(3.2) を満足する $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ および、これに対応する目的関数の値 x_0 は、(3.4) を満足する。ここでは、もちろん、(1.6) の制限をみたすもの、すなわち、0または正の x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ を問題にしているのである。以後、(3.4) を満足する、0または正の $x_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ とかくべきものを、単に、(3.4) を満足する $x_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ とかくことにする。

(3.4) を行列であらわせば、

$$(3.\ 5)\qquad \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{m+1\,1} & a_{m+1\,2} & \cdots & a_{m+1\,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{m+1} \end{pmatrix}$$

---

* *Minimizing Problem* においては、c_i を a_{0i} とかけばよい。

をうる。

これに、出発点の解が、すぐつくれるように、左の行列に単位ベクトルをつけ加え、それに対応する未知数をXベクトルにつけ加え、さらに、Xベクトルおよび常数項のベクトルを、つぎのように行列にかえる。すなわち、

$$
(3.6)\quad
\begin{pmatrix}
1 & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a_{m+1\,1} & a_{m+1\,2} & \cdots & a_{m+1\,n} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
x_{01} & x_{02} & x_{03} & \cdots & x_{0\,m+3} \\
x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1\,m+3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n\,m+3} \\
x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & x_{n+1,3} & \cdots & x_{n+1,m+3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{n+m+1,1} & x_{n+m+1,2} & x_{n+m+1,3} & \cdots & x_{n+m+1,m+3}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b_1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
b_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{m+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

をつくる。ここで、もとの問題については、x_{ij} の符号について、$x_{i1}\geq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ の制限がついている。これに対応するものとして、X 行列の各行ベクトルについて、制限条件、

$$
(3.7)\quad \bar{x}_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{i\,m+3})\geq 0 \quad (\text{辞書型}),
$$
$$
i=1, 2, \cdots, n, n+2, \cdots, n+m+1
$$

を導入する。この条件から、$x_{i1}\geq 0$ がなりたつことは、容易に導きうる。ここで、x_i について行ったと同じように、(3.7) の条件を満足する (3.6) の解を、単に (3.6) の解とよぶこととする。(3.7) においては、$\bar{x}_0$, $\bar{x}_{n+1}$ については制限していない。これは、一般化シンプレックス法の計算を開始するにあたって、最初の基底解として、

$$
\bar{x}_0 \quad =(0, 1, 0, \cdots, 0)
$$
$$
\bar{x}_{n+1}=(b_1, 0, 1, \cdots, 0)
$$

$$\bar{x}_{n+m+1}=(b_{m+1},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$$

をとることにすれば、大変便利である。ところが b_1 は負であるから、$(b_1, 0, 1, \cdots, 0)$ も負（辞書型）である。したがって、$\bar{x}_{n+1}\geq 0$ と制限しておけば、これほど簡単に出発点の解をもとめることはできない。そこで、$\bar{x}_{n+1}\geq 0$ の制限を設けることなく、まづ、一般化シンプレックス法の計算によって、$\bar{x}_{n+1}$ を大きくしてゆく。$\bar{x}_{n+1}$ が 0 または正の値に到達したとき、$\bar{x}_0$ をとり上げて、大きくしてゆくことにする。

(3.6) は、

$$(3.8)\quad \begin{cases} \bar{x}_0 + a_{01}\bar{x}_1 + a_{02}\bar{x}_2 + \cdots + a_{0n}\bar{x}_n = (0,\ 1, 0, 0, \cdots, 0) \\ \bar{x}_{n+1} + a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + \cdots + a_{1n}\bar{x}_n = (b_1,\ 0, 1, 0, \cdots, 0) \\ \bar{x}_{n+2} + a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + \cdots + a_{2n}\bar{x}_n = (b_2,\ 0, 0, 1, \cdots, 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_{n+m+1} + a_{m+1,1}\bar{x}_1 + a_{m+1,2}\bar{x}_2 + \cdots + a_{m+1,n}\bar{x}_n = (b_{m+1},\ 0, 0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$

とかくことができる。(3.8) の第２式以下を辺々加えあわせれば、$a_{1j}=-\sum_{i=2}^{m+1} a_{ij}$, $j=1, 2, \cdots, n$; $b_1=-\sum_{i=2}^{m+1} b_i$ がなりたつのであるから、

$$(3.9)\quad \bar{x}_{n+1}+\bar{x}_{n+2}+\cdots+\bar{x}_{n+m+1}=(0, 0, 1, 1, \cdots, 1)$$

をうる。

いま、(3.6) に $\bar{x}_{n+1}\geq 0$ を満足する解が存在するとする。$\bar{x}_{n+i}\geq 0$ $(i=2, 3, \cdots, m+1)$ がなりたっているのであるから、$\bar{x}_{n+i}$ $(i=1, 2, \cdots, m+1)$ の第１成分はすべて０または正である。また、その和は、(3.9) から、0 である。したがって、$\bar{x}_{n+i}(i=1, 2, \cdots, m+1)$ の第１成分はすべて０である。このように、$\bar{x}_{n+1}\geq 0$ を満足する (3.6) の解の第１成分は、(3.4) を満足する。これによって、下に示す定理９の条件は充分件条であることがわかる。

定理９　(3.4) の解が存在するための必要かつ充分な条件は、(3.6) に $\bar{x}_{n+1}\geq 0$ を満足する解が存在することである。

証明　この条件が充分条件であることは、上に示した。必要条件であることを証明するために、$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ が (3.4) を満足するとする。この値をもちいて、

$$
(3.10)\quad \begin{cases} \bar{x}_0 \quad = (x_0,\ 1,\ 0,\ \ ,\ 0) \\ \bar{x}_1 \quad = (x_1,\ 0,\ 0,\ \ ,\ 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_n \quad = (x_n,\ 0,\ 0,\ \ ,\ 0) \\ \bar{x}_{n+1} = (0,\ 0,\ 1,\ \ ,\ 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}_{n+m+1} = (0,\ 0,\ 0,\ \ ,\ 1) \end{cases}
$$

をつくる。この $\bar{x}_i$ $(i=0,1,\ \ ,n+m+1)$ は容易にわかるように、(3.6) を満足する。

また、

$$\bar{x}_{n+1} = (0,0,1,0,\ \ ,0) > 0$$

がなりたつ。したがって定理の条件は必要条件であることが証明された。

定理10　$\bar{x}_{n+1} \geqq 0$ を満足する (3.6) の最適解の第1成分は、(3.4) の最適解である。また (3.6) が $\bar{x}_{n+1} \geqq 0$ を満足し、有界でない解をもつときには、解の値の第1成分が (3.4) の有界でない解となるようなものがつくれる。

証明　(3.6) の最適解を $\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ \ ,\ \bar{x}_{n+m+1}$ とする。ただし、$\bar{x}_{n+1} \geqq 0$ を満足しているとする。(3.4) の最適解を $x_0,\ x_1,\ \ ,\ x_n$ とする。この (3.4) の最適解から (3.10) によってつくったものは (3.6) の解であるから、

$$(x_0,\ 1,\ 0,\ \ ,\ 0) \leqq \bar{x}_0 = (x_{01},\ x_{02},\ \ ,\ x_{0\ m+3})$$

がなりたつ。したがって、

$$(3.11)\qquad x_0 \leqq x_{01}$$

をうる。また、一方、$\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ \ ,\ \bar{x}_{n+m+1}$ の第1成分は (3.4) の解であるから、

$$(3.12)\qquad x_{01} \leqq x_0$$

がなりたつ。(3.11) および (3.12) から

$$x_0 = x_{01}$$

をうる。これによって、定理の前半が証明された。

有界でない (3.6) の解は、定理4からわかるように、

$$(3.13)\qquad (\bar{v}_0 - y_{0s}\bar{\theta}),\ (\bar{v}_1 - y_{1s}\bar{\theta}),\ \ ,(\bar{v}_{m+1} - y_{m+1,s}\bar{\theta}),\ \bar{\theta}$$

という型をもっている。ただし、$\bar{\theta} \geqq 0$, $y_{is} < 0$, $i=0,1,2,\ \ ,m+1$ を満足する。$\bar{\theta} > 0$ は任意にとれるのであるから、第1成分を正にとる。このとき解の値の第1成分は、

$$(3.14)\qquad v_{01} - y_{0s}\theta_1,\qquad \theta_1 > 0,\qquad y_{0s} < 0$$

となっている。$\bar{x}_{n+1}$ がこの $\bar{v}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ のなかにない場合は、零ベクトルであるから、$\bar{x}_{n+1}\geq 0$ の条件を満足している。また、ある i について、$\bar{x}_{n+1}=v_i$ がなりたつ場合は、$\bar{\theta}\geq 0$, $y_{is}\leq 0$ であるから、$\bar{v}_i-y_{is}\bar{\theta}\geq 0$ を満足する。したがって、(3.6) の解 (3.13)の第1成分は、(3.4) の解であり、そのときの目的関数の値は、(3.14) であるから、有界でない。

(3.6) は一般化シンプレックス法の条件を満足している。すなわち、(3.6) を $P\bar{X}=M$ とかくことにすれは、

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=(Q,\ V_0,\ V_1,\ \cdots,\ V_m)$$

の位は、容易にわかるように、$m+2$ である。これは、行列 M および P の行の数に等しい。このことが、一般化シンプレックス法において、Mにおかれた条件である。なお出発点となる基底解は、

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\ \bar{x}_{n+1} &= (b_1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\ &\cdots\cdots \\ \bar{x}_{n+m+1} &= (b_{m+1},\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1) \end{aligned}$$

として簡単につくりうる。これは $\bar{x}_{n+k}\geq 0$ $(k=2,3,\cdots,m+1)$ を満足している。

これに一般化シンプレックス法を適用するにあたって、$\bar{x}_0$, $\bar{x}_{n+1}$ に 0 または正の制限はついていない。$\bar{x}_{n+1}$ については、(3.9) からわかるように、$(0,0,1,1,\cdots,1)$ が上限となっている。そこで、(3.6) の最適解をもとめるためには、第1段階として、$\bar{x}_{n+1}$ を最大にするように、一般化シンプレックス法を適用する。(このとき、$\bar{x}_0$ には制限はついていない。) $\bar{x}_{n+1}$ は上に有界であるから、0または正の最大値をもつならば、有限回の基底の変更によって最大値に達する。また、第1段階で $\bar{x}_{n+1}$ が負の最大値をもつことになれば、定理9から (3.4) は解をもたないことがわかる。実際の計算では、逐次基底を変えていって、$\bar{x}_{n+1}$ が0または正になったならば、その値が最大値でなくとも、第1段階は終了する。第2段階では $\bar{x}_0$ の最大値をもとめることが問題である。$\bar{x}_{n+1}$ が一度 0 または正になりさえすれば、$\bar{x}_0$を大きくしてゆくときに、基底解のつくり方から明らかなように、0になることはあっても、ふたたび負になることはない。したがって、$\bar{x}_{n+1}\geq 0$ の制

限条件の下での $\bar{x}_0$ の最大値をうることができる。

第1段階では、$\bar{x}_{n+1}$ を大きくすることが問題であり、$(\bar{x}_0, \bar{x}_{n+1}, \quad, \bar{x}_{n+m+1})$ という順序にならべておくのがあるから、基底の変更の際にとり入れるベクトルは、B^{-1} の第2行である $\bar{\beta}_1$ をもちいて、

$$\bar{\beta}_1 P_s = \min_j (\bar{\beta}_1 P_j) < 0$$

を満足する P_s として定まる。第2段階では、$\bar{x}_0$ を大きくするのであるから、B^{-1} の第1行である $\bar{\beta}_0$ をもちいることになる。第2段階では、有限回の基底の変更ののち、$\bar{x}_0$ の最大に達するか、または、$\bar{x}_0$ の有界でない集合をうるか、いずれかである。このとき、定理10によって、到達した解の第1成分が (3.4) の最適解である。

つぎに計算法について考える。

$$M = (Q, V_0, V_1, \quad, V_{m+1}) = (Q, E)$$

という型をもっているために、基底解 V は、

$$\begin{aligned} V = B^{-1}M &= (B^{-1}Q, B^{-1}E) \\ &= (B^{-1}Q, B^{-1}) \end{aligned}$$

とかける。したがって、基底解 $\bar{v}_i$ の $m+3$ 個の成分のうち、第2成分から、第 $m+3$ 成分までは、B^{-1} の対応する行である $\bar{\beta}_i$ と一致する。この $\bar{v}_i$ の第2成分以下は、もとの問題と関係のないものであって、できるだけ計算が楽なことがのぞましい。ところが、上のことからわかるように、逆行列が計算されれば、解については、第1成分だけを計算すればよく、第2成分以下は計算が必要でない。このように、我々の問題の構成法は要求によく合致したものであることがわかる。

例1 (Saul I. Gasse: Linear Programming: Methods and Applications に示されている例、普通のシンプレックス法では循環が起る。)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 0 \\ x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, 7$$

の条件の下で

$$-\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4$$

を最小にせよ。

最小をもとめるのであるから、目的関数を $-x_0$ とおいて、一般化シンプレックス法の型にかけば、つぎのとおりである。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 & P_{10} & P_{11}
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -\frac{3}{4} & 150 & -\frac{1}{50} & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{3}{4} & 150 & -\frac{47}{50} & -12 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & -60 & -\frac{1}{25} & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & -90 & -\frac{1}{50} & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdots \\ \bar{x}_{11}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

計算は表１のようにおこなう、表１の g では $\bar{\beta}_0 P_i \geqq 0$, $i=1, 2, \cdots, 11$ がなりたっているから計算はここで終了する。$\bar{x}_8=(0, 0, 1, 1, 1, 1)>0$ となっていることから、この基底解の第１成分は最初の問題の最適解であることがわかる。すなわち、

$$x_1=\frac{1}{25}, \quad x_3=1, \quad x_5=\frac{3}{100}$$

なるとき、

$$max - x_0 = \frac{1}{20}, \text{ すなわち, } min\, x_0 = -\frac{1}{20}$$

をうる。

例２

$$
\begin{aligned}
x+y &\leqq 3 \\
2x+y &\geqq 7 \\
x,\ y &\geqq 0
\end{aligned}
$$

を満足し、$3x+2y$ を最大にする、x, y をもとめよ。（もちろん、これには解は存在しない）。この問題の一般化シンプレックス法の表示はつぎのとおりである。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \cdots \\ \bar{x}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

出発点の基底解では、$\bar{x}_7$が負（辞書型）であるから、計算の第１段階は、$\bar{x}_7$の最大をもとめる。計算は表２に示す。

表２のbにおいて、$\bar{\beta}_4 P_i \geq 0$，$i=1, 2, \cdots, 7$ がなりたつのであるから、$\bar{x}_7$はこれより大きくなることはない。最大の$\bar{x}_7$が負であることから、もとの問題に解は存在しないことがわかる。

表 1

	基底ベクトル	基底解 $V=(B^{-1}Q, B^{-1})$						P												y_{ts}	
		$B^{-1}Q$	B^{-1}					P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	$\bar{\beta}_i P_4$	
a	P_0	0	1	0	0	0	0	1	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0	0	0	0	0	6	
	P_8	-1	0	1	0	0	0	0	-3/4	150	-47/50	-12	-1	-1	-1	1	0	0	0	-12	
	P_9	0	0	0	1	0	0	0	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0	0	1	0	0	9	
	← P_{10}	0	0	0	0	1	0	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	0	0	1	0	3	
	P_{11}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	
							$\bar{\beta}_1 P_t$		-3/48	150	-47/50	-12	-1	-1	-1	1	0	0	0	P_2	$\bar{\beta}_i P_2$
b	P_0	0	1	0	0	-2	0													150	330
	P_8	-1	0	1	0	4	0													150	-210
	← P_9	0	0	0	1	-3	0													-60	210
	P_4	0	0	0	0	1/3	0													-90	-30
	P_{11}	1	0	0	0	0	1													0	0
							$\bar{\beta}_1 P_t$			-210										P^3	$\bar{\beta}_i P_3$
c	P_0	0	1	0	-11/7	19/7	0													-1/50	-2/175
	P_8	-1	0	1	1	1	0													-47/50	-1
	← P_2	0	0	0	1/210	-1/70	0													-1/25	1/10500
	P_4	0	0	0	1/7	-2/21	0													-1/50	-2/525
	P_{11}	1	0	0	0	0	1													1	1
							$\bar{\beta}_1 P_t$				-1					-1				P_6	$\bar{\beta}_i P_6$
d	P_0	0	1	0	-1	1	0													0	1
	P_8	-1	0	1	51	-149	0													-1	-150
	P_3	0	0	0	50	-150	0													0	-150
	P_4	0	0	0	1/3	-2/3	0													1	-2/3
	← P_{11}	1	0	0	-50	150	1													0	150
							$\bar{\beta}_1 P_t$							-150						P_1	$\bar{\beta}_i P_1$
e	P^0	-1/150	1	0	-2/3	0	-1/150													-3/4	-11/12
	P_8	0	0	1	1	1	1													-3/4	0
	P_3	1	0	0	0	0	1													1/4	0
	P_4	1/225	0	0	1/9	0	1/225													1/2	1/36
	← P_6	1/150	0	0	-1/3	1	1/150													0	5/12
							$\bar{\beta}_0 P_t$		-11/12											P_5	
f	P_0	1/125	1	0	-7/5	11/5	1/125													0	-7/5
	P_8	0	0	1	1	1	1													-1	0
	P_3	1	0	0	0	0	1													1	0
	← P_4	1/250	0	0	2/15	-1/15	1/250													0	2/15
	P_1	2/125	0	0	-4/5	12/5	2/125													0	-4/5
							$\bar{\beta}_0 P_t$						-7/5								
g	P_0	1/20	1	0	0	3/2	1/20														
	P_8	0	0	1	1	1	1														
	P_3	1	0	0	0	0	1														
	P_5	3/100	0	0	1	-1/2	3/100														
	P_1	1/25	0	0	0	2	1/25														
							$\bar{\beta}_0 P_t$	0	0	15	0	21/2	0	3/2	1/20	0	0	3/2	1/20		

表 2

	基底ベクトル	基底解 $V=(B^{-1}Q, B^{-1})$					P								$y_{is}=\bar{\beta}_i P_s$
		$B^{-1}Q$	B^{-1}				P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
a	P_0	0	1	0	0	0	1	−3	−2	0	0	0	0	0	−3
	P_5	4	0	1	0	0	0	1	0	−1	−1	1	0	0	1
	← P_6	3	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
	P_7	−7	0	0	0	1	0	−2	−1	0	1	0	0	1	−2
						$\bar{\beta}_4 P_i$		−2							
b	P_0	9	1	0	3	0									
	P_5	1	0	1	−1	0									
	P_1	3	0	0	1	0									
	P_7	−1	0	0	2	1									
						$\bar{\beta}_4 P_i$	0	0	1	2	1	0	2	1	