資　　料

リニアー・プログラミングの代数学
——この方法により解かれる問題の分類

ヤ・ペ・ゲルチュク（モスクワ鋼鉄研究所）

瀬　戸　広　明 訳

訳者はしがき

本訳はソ連邦科学アカデミーの「経済学研究と計画化における数学的方法の応用に関する科学協議会の諸成果」（1960年4月4日—8日）（「ТРУДЫ НАУЧНОГО СОВЕЩАНИЯ О ПРИМЕНЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И ПЛАНИРОВАНИИ」4—8 апреля 1960 года）の第4巻『リニアー・プログラミング』ヴェ・エス・ネムチノフ責任編集（『ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ』Ответственный редактор академик В. С. Немчинов Издательство АКАДЕМИИ НАУК СССР Москва 1961）の第2報告論文，*Я. П. Герчук*:「АЛГЕБРА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СВЕТЕ КЛАССИФИКАЦИИ ЗАДАЧ, РЕШАЕМЫХ ЭТИМ МЕТОДОМ」の全訳である。なお当該報告については相当活発な討論があったが，これについては次の機会を得たい。

I　編　者　序　文

ヤ・ペ・ゲルチュク（Я. П. Герчук）は条件の記述を代数学的形式に基づかしめたリニアー・プログラミングの諸問題の分類を提案した。現在のところ，リニアー・プログラミング問題の分類は余すところなく正確で完全なもの ではない。しかしながら報告 でのリニアー・プログラミング問題の詳細な分類思考（及び各々の類の問題を解くのに最も適当な数値的方法を区分けする考え方）はパースペクティブなものである。

II　報告「リニアー・プログラミングの代数学
——この方法により解かれる問題の分類」

ヤ・ペ・ゲルチュク

リニアー・プログラミングを実際に適用しているうちに，この方法によって解かれる問題領域は多かれ少かれ定まってきた。リニアー・プログラミングの適用とは，厳密に定式化された一定の目的を達成するための各種資源のある総和の最適な，つまりもっとも効果

的な利用の問題である。リニアー・プログラミングの方法によって解かれる具体的実践的問題のグループは次のようにある程度類型化された。即ち，a）最適な輸送計画の作成に帰する輸送問題，б）生産能力の最適利用，就中設備の操業率と注文の配分の問題，в）予め与えられた要求を充たす最も安価な混合物形成の問題，г）工業材料の最適裁断の問題である。

しかしながらリニアー・プログラミングの方法の適用の可能性は決して上記の問題群につきるものではない。同じく資源の最適利用の問題ではあるが上記のとは別の問題——それは時たま非常に興味深くまた一風変った問題であるが——もまたこの方法によって解きうるのである。例えば，最適な輪作を見出す問題，工業企業に於ける生産の規模と労働者の雇用の規模の最適な季節的調節，その他一連の問題がそうであり，これらは上に引用された分類には入りきらないのである。

上に引用された問題のグループ分けそのものがまた，反論を呼び起すのである。すなわち，このグループ分けは方法適用の相異なる分野を示すに止まっており，解決される問題の特性を示してはいないのである。解決される問題の本質が表わされる相異なる出発条件の下で最適性が見出されうるので，問題の設定如何では，これらのグループのいずれもが相異なるグループを一体化することにもなるのである。かくして，能力の最適利用の問題を，予め与えられた一揃えの条件（комплектность）を満足するものの中で最大生産高をもとめるものとして定式化することもできるし，また現有能力を利用して最大利潤をあげることを可能にするような生産物の組合せを選択するものとして定式化することもできるのである。後に示すように，これらの二つの問題はその解法から見て本質的に別物なのである。

かくして，リニアー・プログラミング問題の≪題目別≫の分類は満足すべきものではないことが分るのである。従って，リニアー・プログラミングの方法によって解決される問題領域の厳密に定式化された数学的ないし代数学的定義及び，これらの問題のやはりその代数学的定式化の差異に基づいた分類が必要となってくるのである。

このような分類を行うにあたっては，そのより一層の分化を許すようなもっとも一般的な形におけるリニアー・プログラミング問題の代数学的定式化から出発しなければならない。このようなもっとも一般的な定式化としては次のようなものがある[(1)]。未知数を含む連

(1) См. A. Charnes, W. Cooper, B. Mellon.「航空ガソリンの混合」≪エコノメトリカ≫ 1952年, vol. 20, N2, p. 136-159。同じく A. Charnes.「リニアー・プログラミングにおける最適性と退化」同誌 p. 160-170。

立方程式が与えられる。この際この連立方程式は次のようなベクトル形式で書くことができる。

$$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_0$$

こゝで P_j と P_0 はそれぞれ m 個の成分からなる列ベクトルを意味している。

問題は変数の非負の値 $x_j \geqq 0$ を見出さんとするところにあり，そしてこの非負の値はこの連立方程式を満足し，同時に一次形式 $f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ を最大（もしくは最小）に導くような値なのである。そしてこの時 c_j は変数 x_j に対応するものであって，予め与えられている最適性判定基準に関係する既知の価格である。

この定式化は，≪一次方程式あるいは不等式によって制約された若干の変数に関する一次関数の極値の発見≫（ダンツィッヒ）というような一般的なリニアー・プログラミング定義に一致するものであり，そしてこの定義はリニアー・プログラミング理論によって一般的に受け入れられており，かつ問題の本質を十全に反映するものである。

上記の連立方程式の分析は，リニアー・プログラミングの諸問題は比較的多くの定数 x_j の連立方程式（あるいは不等式）をこれらの変数に課せられた次のような諸制約の下で解くことに帰する，ということを示している。

〔制約〕

а）　見出される変数の**非負性**制約 $x_j \geqq 0$。この制約はリニアー・プログラミング理論に於て，経済学的におそらく大きな意義を有しているであろうが，問題の数値解法研究に於ても同様に大きな意義を有している。

б）　**関数上**の制約。この制約は $\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_0$ なる形式の等式によって表現される諸変数の一次の関数関係を示す。

в）　**最適化**制約。この制約は利用目的あるいは解の最適性判定基準と密接につながっている一次形式 $f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ によって示される。この制約とは，見出される解（x_j の値の体系）が最適性をも同時に満足しなければならないという意味に於ての，つまり上に導かれた一次形式 —— ここでは c_j は各 x_j に対応した価格的要素を示す —— の値を最大あるいは最小に導かなければならないという意味に於ての制約である。

非負性制約と関数的制約にかなうもろもろの解は可能解と呼ばれ，一次形式を最大あるいは最小にするという要求にかなう解は**最適解**と呼ばれる。

上に列挙した制約のうち第1のもの——変数の非負性——は普遍的なものであって，リニアー・プログラミングという領域での問題の区分や分類にとって基本的な役割を果し得

ない。第2，第3の制約は，上記に於ては一般的形式ではあるが，発展させ得，その特徴を定めることができるのであって，これらの制約の性格に依り，我々に関心のある諸問題を分類することができるのである。この際，このような分類方法によってリニアー・プログラミングの全問題を解決することを可能にするためには，この全問題に於て，厳密に数学的な形で，次のような特徴をもつ全三種の制約が定式化されねばならない。即ち，関数関係の制約は諸変数の相互依存性を係数 P_j と定数 P_0 という既知の（予め与えられた）値で一次式として表現しなければならないし，他方最適化制約は各変数に帰属する価格 c_j に基づかなければならないのみならず，この最適化制約は

$$\sum_{j=1}^{n} c^j x^j$$

という形のこれら全ての変数に関する一次形式の形をとらなければならない。

リニアー・プログラミングの諸問題の分類区別は，見出される諸変数がいかなる性格を有しているかということ，及び変数に課せられた関数的制約の性格によって数学的に表現される諸変数の間の相互依存性がいかなるものであるかということにのみ基づくことができるのである。したがってこの分類区別は，解決される問題の特性に依り，上に導かれた等式が受けうる変形（модификация）と関係する。しかしながら，これらの変形に於ては，リニアー・プログラミング問題が定式化されている連立方程式の基本的な性格描写を破ってはならないのである。これら全ての変形は代数学的には結局上記の一般型に落着くのである。

この見地からリニアー・プログラミングの諸問題を検討するならば，そこには以下の諸概念が存在する。即ち

1. 種類と程度によって決定される各種の**需要**
2. これらの需要を充すことができる種々の**資源**と種々の**生産手段**
3. 現有資源を使って需要を充たす種々の**選択可能な諸方法**，あるいは，設定された目的達成のための資源利用の種々選択可能な諸方法（生産問題に於てはこの資源利用の種々の選択可能な諸方法は選択可能な**技術**として検討されてよい）。

これらの技術的方法は常にリニアー・プログラミングの対象であるが，リニアー・プログラミングの本質はこれらの技術的方法のうちのおのおのの**合目的的利用度**を決定せんとするところにあるのである。リニアー・プログラミングの諸問題に於ける変数（x_j）の値は相異なる選択可能な技術の利用程度でもあるのである。種々の技術の選択可能性は，これらの種々な技術が，問題の諸条件と数学的に表現される関数上の制約によって決定さ

れる既知の限界内で許容されうるという意味に解釈されねばならない。しかしながら，指定限界内で等しく許容しうる技術であっても，これらの技術は不等価な（неравноценный）のである。これらの技術のおのおのは自価（своя оценка）（c_j）を有しており，そしてこの自価は解の最適性要求を決定する一次形式にふくまれている。最適性要求から出発しつつ，最上の総効果が得られるような形で，つまり，関数上の制約と並んで最適性要求をも満足するような形で，選択可能な技術のおのおのの利用程度が選択されるのである。

リニアー・プログラミングの諸問題のシェーマをこのように描くと，これらの問題の分類へのアプローチが可能になる。この分類は，問題の諸条件によって変数に課せられる関数上の諸制約の性格によって決定されるし，他方これらの諸制約は需要を満足させるための資源の利用方法に常に関係するので，解かれる諸問題の差異は，我々の自由になる資源と生産手段，及び需要——この需要はこれらの資源を使って充たすべき需要——が如何なる形で我々に予め与えられているかに依るのである。

しかしながらここに，ある体系に導くことができる秀れた種類分けが可能である。この種類分けの上にのみリニアー・プログラミングの諸問題の分類が打ち建てられねばならない。

第Iグループは，資源及び需要が予め与えられて制限されており，かつ互いに等価である場合である。つまり，この場合問題は同種資源の単純な配分に関することである。このような諸条件は，例えば，あらゆる輸送計画の実現の範囲内で総費用を最小化させるような（最も有利な）一定の同種貨物の諸輸送経路——その貨物の m 個の生産あるいは貯蔵地点から n 個の指定地点への諸輸送経路——を決定することが要求されるあのひろく知られている輸送問題に典型的である。

$i \backslash j$	1	2	……	n	
1	c_{11}	c_{12}	……	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	……	c_{2n}	a_2
⋮	……	……	……	……	⋮
m	c_{m1}	c_{m2}	……	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	……	b_n	

この問題の出発要素はマトリクス形式で叙述することができ，表の行に沿って貨物の貯蔵地点 $i=1, 2, \cdots, m$ を，列に沿って指定地点 $j=1, 2, \cdots, n$ を配置し，指定地点で要求される貨物量を b_j で，経路 ij による輸送費を c_{ij} で表わす。

ここでは相異なる輸送≪技術≫——諸経路——は生産地点の各々を消費地点の各々へつなぐことである。それ故見出される諸変数を便宜上一般的な形では x_{ij} で示す。最適な計画に於けるこれら変数のおのおのの値は，i 地点から j 地点に発送すべき貨物量を示す。量 a_i 及び b_j は予め与えられており，当該地点に於ける貨物量に課せられた制約である。

問題のこれらの諸条件は次のような形で書ける。

$$x_{ij} \geqslant 0\,(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i(i=1, \cdots, m), && (2)\\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j(j=1, \cdots, n), && (3)\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{I})$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{4}$$

$$min\quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{5}$$

ここで c_{ij}——各経路 ij による貨物1単位当り輸送費，z——全輸送の総費用。

問題のこのような定式化が一般型をかなり厳密に変形しながらも——（しかしながらこの変形はこの種の問題を他の問題とは別のグループに入れることを正当化する）——前に記した一般型に結局は導かれるということは容易に分る。この変形の特殊性は次の点にある。即ち

а） 変数 x_{ij} に課せられた関数上の制約は，各貯蔵地点から発送すべき貨物量つまり資源 a_i と各指定地点に到着すべき貨物量つまり需要 b_j という二つの制約を示す等式(2)と(3)の2組によって表現されている。等式(2)の組では全部で m 個の等式，(3)の組では n 個の等式があるので，一般的な形に導かれた体系全体では等式の総数は $l=m+n$ となり，条件(4)——生産と消費の規模のバランスを表現する条件4)——があるので，このうち $m+n-1$ 個は一次独立となる。

б） 量 a_i と b_j は，一般的な形に導かれた方程式体系に於ては列ベクトル P_0 となる。

в） 変数 x_{ij} に対する係数 P_j は全ての場合0か1に等しい。このことは，課せられた諸制約に応じて諸変数は一定量 a_i と b_j の単一項としてのみ相依存しているのでありその

際変数の各々は必ず a_i と b_j の両方の量に入り込む，ということを示している。この特殊性はこの変形に於て最も重要である。何故ならば，一般型の定義には変数 x_{ij} の係数に1以外の係数が入りこむ可能性があるので，諸変数の相互依存性がはるかに複雑だからである。

г） 解かれる体系の変数の総数すなわち可能な経路の総数は貨物貯蔵地点数と指定地点数の積に等しい。したがって解くべき体系に於て未知数は $p=mn$ 個ある。そのうちゼロ以外のものは，最終的な解では，高々 $m+n-1$ 個である。

問題IIのグループは第1グループと類似しているのだが，次の点で異なる。即ち，第2グループでは相異なる需要を充たす関係上，同一ならぬ生産性によって特徴づけられた複数種類の資源をいろいろな利用方面に配分しなければならないのである。このグループの諸問題に於ては資源と需要が予め与えられている点は第1グループと同様であるが，第1グループとは違って，相異なる諸計測単位（例えば資源は労働時間，成果は生産高）で表現される。したがってこの問題では，もはや同種資源の単純な再配分は問題でなくなり，最良の（最適な）形で，相異なる可能な利用方面に複数種類の資源を配分することが問題なのである。例えば，資源が生産性の相異なる工作機械によって代表され，そのような工作機械の利用は定められた労働時間総量（установленный фонд）によって制約され，他方諸需要が一定の複数種類の製品の量という形で予め与えられているような生産能力の最適利用問題がそのような問題である。解決すべきことは，予め与えられた判定基準視点よりして最適な計画を達成するには，どのような製品をどのような工作機械でどれだけ製造すべきかということである。

このような問題の諸条件は次のような形に書ける。

$$x_{ij}\geqslant 0\,(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leqslant a_i(i=1,\cdots,m), \tag{2}$$

(II)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}=b_j(j=1,\cdots,n), \tag{3}$$

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad \text{の極値を見つけよ} \tag{4}$$

こゝで x_{ij}——計画遂行の技術変数（технологические варианты）——は製品 j の製造に要する工作機械 i の時間支出；a_i——各設備の持ち時間；b_j——各種製品の需要；a_{ij}——製品 j を工作機械 i で製造するときの単位時間当り生産性；c_{ij} —— 各選択可能技術変数

に帰属する価格的要素（この価格的要素としては例えば利潤獲得性があげられるが，この場合には問題は z ＝最大，に解かれ，生産費の場合には問題は z ＝最小，に解かれる）。

問題IIは二つの特徴によって前述の問題Iと区別される。第1に，ここでは等式の組の代りに，現有設備能力の利用の可能性の制約を上限によってのみ（時間数 a_i より多くない）規定する諸不等式の組(2)が与えられている，つまり問題Iよりもある程度大きな自由があるのである。問題の出発条件に諸等式ではなく諸不等式が存在するということは当該問題を一般型に導くことを妨げはしない。何故なら諸不等式は自由変数（свободные переменные）を導入することにより等式になるからである。なるほど問題の諸条件のこのような改変はその解法に影響を及ぼしはする。しかしこのことは解法の問題であって分類の問題ではない。

このグループの諸問題の第2の一層本質的な差異は，諸等式(3)の組の制約は変数の総量に課せられたものではなく変数とその対応係数 a_{ij} ―― 各需要 j の1単位を充たすのに当該種類の資源 i の1単位の生産性規準を特徴づける a_{ij} ―― との積の総量に課せられたものであるという点にある。当該問題のこの数学的モデルの特殊性の中に，配分される資源の複数種類性が反映している。

問題IIIのグループでは，出発条件は単にこれまで検討されて来た形式に於てではなく，これまでとは本質的に異なった別の形で予め与えられている。これらの諸条件はマトリクス形式で次のように書ける。

この問題類がこれまでとは基本的に異なるのは両面制約――資源と需要（あるいは成果）――がないことである。ここで $j=1, 2, \cdots\cdots, n$ はその中から選択がなされる選択可能技術変数を示し，そして変数 x_j の値は最適計画に於けるこれら技術の利用程度を示す。

$i \backslash j$	1	2	……	n	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$
1	$a_{11}x_1$	$a_{12}x_2$	……	$a_{1n}x_n$	a_1
2	$a_{21}x_1$	$a_{22}x_2$	……	$a_{2n}x_n$	a_2
⋮	……	……	……	……	⋮
m	$a_{m1}x_1$	$a_{m2}x_2$	……	$a_{mn}x_n$	a_m

この問題類の変数におかれる関数上の制約は，配分される資源量によってかあるいは需要量によって定まる。これらの量はマトリクスでは $a_i(i=1, 2, \cdots\cdots, m)$ で示されている。a_i の値は問題の諸条件によって予め与えられており，量 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ に応じてその上限あるいは下限として与えられる。このようにしてこの類の問題に於ては，選択可能な技術 x の各々は，当該変数の係数として全等式——体系を構成する全等式——に入り込むある規準によって直ちに特徴づけられる。このグループの諸問題のこのような特殊性は，ここでは資源は複数種類であるのみならず，諸資源の各単位過程に入り込むと同時に働きだす諸特性の複合体でもあるという点にある。このことは選択可能な技術の最適組の定義に於て特殊な困難をつくりだす。何故ならこの組のどの変数のどの変化も体系の二つの等式に反映する（ⅠとⅡのグループではそうである）のではなく，多くの変数に（一般的にいえば全変数に）反映するからである。

以上の叙述から結局，第Ⅲグループの諸問題の本質は資源の最良の利用方法をこれら資源の特性の複合体に応じて見出すことに帰着することと考えられる。

このタイプの問題の諸条件の記述は次のような形で示すことができる（$i=1, 2, \cdots\cdots, m$；$j=1, 2, \cdots\cdots, n$）。

$$x_j \geqslant 0\,, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant a_i, \qquad (2)\ (\text{Ⅲ})$$

$$min.\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3}$$

諸不等式の組(2)に自由変数を導入することによって全体系は容易に一般型に落着くのである。したがって当該体系は完全にリニアー・プログラミング問題の一般的定義に一致する。

このグループは広汎な問題領域を包括しており，適用分野にしても問題の設定にしても一見互いの間に差異があるのだが，しかし数学上の公式では，厳密に，上に導かれた制約(Ⅲ)に帰着するのである。この類の問題の若干の特徴的な例を検討しよう。即ち，a) 相異なる・数種から成る組成部分から最適な混合物を形成する問題；б) 産出される生産物の最適な組合せを選択する問題。よく検討すると，これらのとてつもなく相異なっている問題もたった今描いたタイプの問題であることが判るのである。

最適混合物形成の問題は，一定の出発原料のうちから最も安価な１組——最も安価であ

ると同時に混合物の厳密に所定された特性の獲得を保障するような1組――を選び出すことに帰着する。このような例としては製鋼原料（шихтовых материалы）の配分割合の処方の作成が役立つ。この問題の出発条件は次のごとくである。精練される金属は1重量単位当り一定量の相異なる諸元素を含有しなければならないが，例えば珪素とマンガンは一定パーセント以下ではいけないし，燐と硫黄は一定パーセント以上ではいけない。指定諸元素は工業的利用のために純粋な形では得られないで，いろいろな製鋼原料（生鉱，銑鉄，屑鉄，フェロシリコン等々[訳註]）の形で得られるのである。ところでこの製鋼原料は，指定諸元素が1重量単位当りに相異なる量で含まれている若干の合金か混合物である。これらの製鋼原料は1重量単位当りの価格がいろいろに異なる。要求されることは，必要な全元素が予め与えられた限度で混合物に含有され，しかもその際当該の組が，設定された諸条件を満足させる可能な全ての組のうちで最も安価であるような比率で製鋼原料を選びだすことである。

この問題の諸条件は体系Ⅲの諸等式と諸不等式の形で書ける。この形で書くために次のように表示する。製鋼用原料混合物（шихта）を形成すべき相異なる製鋼原料を j で，製鋼用原料混合物の1重量単位当りの各製鋼原料の量を x_j で示す。製鋼原料を形成しかつその製鋼原料から精練される金属に移転する諸元素を i，仕上り原料1単位当りに必要とされるこれら元素の量を a_i で示す。製鋼原料の1重量単位当りに含有されている各元素 i の量を a_{ij}，1重量単位当りの各種製鋼原料の価格を c_j で示す。その構成要素によって課せられた制約に適合する――全体として――最も安価な製鋼用原料混合物を与える最適な x_j の値を決めることによって問題は解決される。

この問題では，見出される未知数 x_j は相異なる製鋼原料の量，つまり資源であり，他方諸制約は成果の構成要素――製鋼用原料混合物の化学的構成要素――に課せられている。しかしこれは事物の皮相な形式的な面にすぎない。いろいろな製鋼原料を示す変数 x_j はその本質に於てこそ，個々別々な元素の製鋼用原料混合物へのいろいろな**導入方法**つまり製鋼用混合原料形成（шихтовка）のいろいろな技術としてこそ検討しなければならないのである。

上記の問題と全く同一な今一つの問題がある。それは相異なる構成部分の混合問題つま

訳註　原文では ферросилие となっているが，これは ферросилиций の誤植と考えられる。

り，農業用動物の飼育のための最適な飼料の組合せあるいは最適な1日分の飼料を形成する問題がある。この問題で見出されるべき変数 x_j は1組のいろいろな種類の飼料（穀類，サイロに保存している飼料，じゃがいもその他）の量であって，その際各飼料の1重量単位当り費用を c_j とする。飼料に含まれる相異なる食物要素（蛋白質，炭水化物等々）の量の一日分の最小規準（норма）と飼料の総カロリー含有量とがこの場合に課せられた制約である。当該食物要素の量を a_i で示し，飼料 j の各種類1単位に含まれている食物要素 i の量を a_{ij} で示す。このように表示すると，問題は体系Ⅲの形で書ける。

幾分別の問題設定が，工業企業の生産計画に於て，産出される製品の最適な組合せを見出す問題に存在する。この問題は次のような形で定式化される。企業は，現有諸能力を相異なる程度に利用して，産出される諸製品の各1単位に相異なる利潤をあげながら，相異なる諸製品を産出することができる。現有諸能力と相異なる製品の諸利潤性規準(норма)の下で最大限に可能な利潤をあげるような製品組合せを見出さねばならない。

この問題は出発与件を次のように表示すると，結局Ⅲの連立方程式に落着く。

〔出発与件〕

j——相異なる諸製品，x_j——計画におけるこれら製品の各々の量；i——製品を造るために利用される生産能力（設備）の種類；a_i——これらの能力の配分量，これは計画期間終了時の時間数で表わされる可能な製品産出高を制限する；a_{ij}——諸製品 j の各1単位を産出するために要する各種生産能力 i の支出規準（時間で表わす）；c_j——製品 j の1単位を販売することとより生ずる利潤。

前述の二つの問題と比べて，ここでは資源と成果が所を換えている，すなわち見出されるべき変数はここでは資源ではなく成果であり，制約は資源に課せられているということは直ちに分る。この点では当該問題は本質的に前の二つの問題とは異なる。だがしかし，当該制約体系に於て変数 x_j に関する前述のことを考慮に入れれば，つまり変数 x_j を利潤獲得のための相異なる資源利用方法と見なせば（当該体系では相異なる利潤獲得性(рентабельность)をもった製品産出のための利用とみなす），この問題は前の二つの問題と同一であることがわかる。それ故この問題は正にあのタイプ(Ⅲ)の体系を用いて書かれるのである。

グループⅢの諸問題に於ける制約の性格に関して今一つ注釈をつけなければならない。この注釈とは，これらの変数の一定な関数形で諸変数におかれる関数上の制約と並んで，一連の場合に，問題の諸条件に別の種類の補足的制約——(全部あるいは一部の)変数それ

自身の値の直接的で根本的な制約――が入り込むということである。

例えば産出される諸製品の組合せを選択する問題では，それらの製品の産出高 x_j の制限が要求されることもありうる，というのはこのような場合の産出高 x_j とは上限としての販売課題あるいは販売可能性によって決定される際のをいうからである。類似の制約は，製鋼原料に有害な混入物等々があるので，製鋼用原料混合物に投げ込む個々別々の種類のこれら製鋼原料の量に対して製鋼用原料混合物の最適な処方を作成する問題に於て，課せられるのである。(2)

このような諸制約の導入は，リニアー・プログラミング問題に特徴的な連立方程式に容易に書き込まれるので，トラブルを惹起してはならない。

大いに関心をひくのは第4のグループであって，これはエリ・ヴェ・カントロヴィッチによって研究され，彼の解決乗数法によって解かれるグループである。(3)

エリ・ヴェ・カントロヴィッチの問題に於ては，成果が一揃えであって不足がないという条件（комплектность）を充すという条件の下で最高の生産性をあげることが資源利用における最適化目的である。このグループの基本的特質は，成果の量にではなく，成果が一揃えであって不足がないという点に制約が課せられている点にある。

このような問題設定は，ソヴェト経済の諸条件にとって特有の大きな意義がある。何故ならば我々の有する「不足なき一揃えの条件」は企業に対する重要な要求だからである。エリ・ヴェ・カントロヴィッチはその労作で何度かこのことを正しく指摘している。

諸々の場合のうちの一つ（作業の配分の問題）のためには，この問題は数学的には，これまで用いて来た記号を使えば次のような形に定式化できる。(4)

$$max.\ z_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}, \quad (1)$$

$$x_{ij}\geqq 0\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m\ ;\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \quad (2)\ (\mathrm{IV})$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

$$\text{この際}\ \ z_1=z_2=\cdots\cdots=z_n \quad (3)$$

この問題は次のように解釈できる。成果 j を得るために資源 i を利用するときの既知規

(2)　換言すれば，変数に対する諸制約は $0\leqq x_j\leqq q_j$ という形をとることができる。

(3)　エリ・ヴェ・カントロヴィッチ「生産組織と生産計画の数学的方法」レニングラード大学出版，1939年（≪経済学の研究における数学の応用≫，社会経済文献出版所，モスクワ，1959年に再録251-309頁）を参照せよ。

(4)　≪経済学の研究における数学の応用≫253頁（例1），255-256頁（問題A），260-261頁（例2）を参照せよ。

準が a_{ij} であるとき，自由になる資源の全部を利用して最大効率を保障するような（最適な）数 $x_{ij}(0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1)$——成果 j を得るために利用される資源 i なる x_{ij}——を決定すること，すなわち，成果に不足なき一揃えの条件を充すという条件の下で最大の成果 z_j を保障するような（最適な）数 $x_{ij}(0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1)$ を決定すること。

このグループの諸問題の基本的な差異は，我々の考えるところによれば，次のようなものである。第1に，エリ・ヴェ・カントロヴィッチの問題に於ては，選択可能な技術（варианты）は（設定された目的に応じて），支出資源 i の物質的成果 j に対する関係を特徴づける選択可能な技術（варианты）の効率 a_{ij} によってのみ評価される。然るに一方 I-III の諸問題に於ては，各選択可能技術はその（経済規準 a_{ij} によって表現される）効率とは無関係に，問題に設定された最適性判定規準視点（例えば当該技術の実行と関係する費用視点，あるいは逆に，期待利潤視点）から各当該技術の利用特殊性を特徴づける一定の価格（c_{ij}）を有するのである。比較している問題類のこの特殊性は，体系（IV）には，体系（I-III）には関与している量 c_{ij} が全く存在せず，他方，最大あるいは最小に導かれる最後の関数（1）に於ては生産性規準 a_{ij} の値が価格的要素の役割を演ずるところにある。

第2の差異は，I-III 類の問題とIV類の問題では，制約が本質的に相異なった形で変数に課せられるということ。すなわち，I-III 類の問題では資源の量あるいは成果の量に従って，あるいは同時的に両者に従って制約されるのだが，エリ・ヴェ・カントロヴィッチの問題では資源の**構成**と成果の**構成**（資源の諸部分の役割，成果が一揃えであって不足する部分がないという条件）に応じて制約されるのである。

I-IV の問題の条件が定式化されている数学的モデルの諸々の差異は抽象的な興味を示すにとどまりはしない。それらの差異は相異なるタイプの問題を解くためのいろいろな方法の実践的適用範囲を，ある程度決めるに相違ないのであり，またこうした視点からこれらの差異は実践的意義を有するのである。

このリニアー・プログラミングの諸問題の場合のように，一定の広範な領域に関係をもつ問題の分類は，この分類が問題設定に於て本質的諸特殊性を区別する場合にのみ，すなわち，これらの問題の可能な・あるいは合目的的な（最も経済的な）解法の選択を規定するような諸特殊性を区別する場合にのみ実践的に有効である。我々が提案したリニアー・プログラミング問題の分類——I-IV 類の分類——は，おそらくこの要求にかなうであろう。さてそれで，I-III 類の諸問題は一般に知られているシンプレックス法によっ

て解くことができるが，Ⅰ-Ⅱ類の諸問題にはもっと経済的な方法——修正配分法——がある，もっともこのときⅠ類とⅡ類には若干の方法論的差異があるのだが。Ⅳ類の諸問題は特殊な問題グループであり，その解決のためには，これらの問題にとってもっとも好都合な解決乗数法が提案されており，同時に，この方法は普遍的な方法である。この方法のいろいろな変形はリニアー・プログラミング問題の広範な領域に適用されている。〔完〕

（追記　本訳では木村等教授の懇切な御教示をえた。）