

資 料

機械製造工場の生産予定表作成への
線型計画法の適用*

Р. П. Шейнман

瀬 戸 広 明 訳

1. 問 題 提 起

機械製造工場で生産計画をたてるさいの最初の段階は、四半期とか月単位での生産予定表の作成である。この段階は労働の生産性と生産の規則性にもとづいて採用された生産配分技術の直接的影響によってその価値が左右される。

社会主義的拡大再生産の進行を計画通りに不断に維持して行くための生産予定表の構成にはつぎのような最も重要な諸条件がこれに相応しなければならない。

- 1) 上級の計画機関によって定められた生産期限及び、同じことだが、工場が消費者と結んだ経済契約で定まった期限を遵守すること、
 - 2) 各計画期間の主要設備群の稼働率を等しくすること、
 - 3) 価格表現で生産の規模を示せば、それを等しく・あるいは等しく増大させること、
- 以上の3条件を生産予定表は満足させていなければならない。

上記の諸要求とならんで、予定表の構成は、生産規模を所与とすれば、生産の高度のシリーズ性を確保しなければならない。この高度のシリーズ性は次のような方法を採用することによって達成される。

- a) 相対的に高い労働集約度の生産物の配分を等しくし、かつ生産の反復を規則正しくすること、
- b) 相対的に低い労働集約度の同じような製品の生産を四半期あるいは年の同じ月に集中すること、
- v) 構成上同質な製品の組生産を年間日程の全く同一な期間に計画すること、

* この論文は Ленинградский инженерно-Экономический институт, „МАТЕМАТИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ“ издательство Ленинградского Университета, 1963, におさめられている。なお、この書物のサブタイトルは Труды 1-й Ленинградской конференции по вопросам применения математики в социалистической экономике (Декабрь 1961г.) となっている。——訳者

r) 同じような製品を生産する際、ほんの少しの中断が生ずる可能性があるが、この可能性に対する保障。

以上のことからつぎのような結論が出る。すなわち、生産予定表の作成は技術的多様性をもった問題であり、その解の複雑さは各工場の具体的特殊性にかゝっている。多くの生産分野では、相異なる技術の数はひじょうにたくさんありうるのだが、満足すべきただひとつの技術の発見すら——多くの機械製造工場がしばしば満足できない解で満足せざるを得ない現状であるほどに——困難である。生産中生ずる不均衡の現場での調整はあまり効果のないことがしばしばわかっている。

問題が技術的多様性をもっていることは予定表の作成にあたってその解のために数学的計画を適用できる可能性をさし示している。最適な技術を見出すことを必要とする場合には、この可能性は必然性に転化する。この際、生産予定表に対して提起されているあらゆる要求を遵守しながら生産の最も高いシリーズ性を確保することが、技術が最適であるかどうかの判別基準である。

2. 問題の数学的定式化

上に指摘した諸要求と諸方法のすべてが1次形式になるのではない。つまり、予定表にのる諸製品に相対的に高い労働集約度の製品があれば、このことは制約多面体には種々の品目の製品の生産を同一月に計画に入れるような解に見合う頂点はひとつもないことを意味する。

それ故、生産予定表作成問題は3段階に分けて解決すべきである。

第1段階では相対的に高い労働集約度の製品の生産の等しい配分が通常の方法で行われる。

第2段階では線型計画法を用いて、相対的に低い労働集約度の製品の配分の基底計画を確立する。

第3段階で生産の高水準でのシリーズ性を保ちながら、全ての要求を満足させている最適技術が見い出される。

相対的に高い労働集約度の製品を選び出すために、製品の相対的労働集約度の指数 K_{ij} の計算と分析を行う。つまり

$$K_{ij} = \frac{t_{ij} N_i}{\sum_{i=1}^n t_{ij} N_i} P \quad (1)$$

$$(i=1, \dots, n; j=1, \dots, m),$$

ここで t_{ij} は第 j 組の設備 ($j=1, \dots, m$) で種類 i の製品の製造のための労働集約度, N_i は全計画期間中の種類 i の製品の生産高予定, P は月数で表わされた計画期間。

相対的労働集約度指数の数値的意味は、種類 i の製品生産に中断がなく、かつ第 j 組の設備の等しい稼働率の下で i 製品の予定高を完遂しうような最小月数ということである。

この計算をもとにして、1に近いかそれより大きな数値 K_{ij} の諸製品が選び出される。これらの選び出された製品の生産の量的配分は製品の組立とその主要部品の加工の組合せ比率に関する日程計画上の採用された標準に応じて行われる。

第2段階での問題の数学的定式化のためにつぎのような記号を導入する。 x_{ik} —— 第 k 月に生産するように計画される i 製品の量 ($i=1, \dots, l; k=1, \dots, P$), c_i —— i 製品の卸売価格, F_{jk} —— 第 j 組の設備の第 k 月における時間フォンド, C_k —— 諸卸売価格の総額。その範囲内で第 k 月における製品生産を計画しうる 諸卸売価格の総額, Δ_{jk}, q_k —— 設備稼働率及び生産規模の等しさの許容偏差。

製品産出の配分にあたっては見積り稼働率係数の範囲内で設備を稼働させる必要があるので、設備の時間フォンドは次のような形で定められる。

$$F_{jk} = \frac{r_k}{R} \sum_{i=1}^n t_{ij} N_i - \sum_{i=l+1}^n t_{ij} Q_{ik} \quad (2)$$

$$(k=1, 2, \dots, P; j=1, 2, \dots, m)$$

ここで r_k —— 第 k 月の労働日数, R —— 計画期間の労働日数, Q_{ik} —— 第1段階で第 k 月に生産するように配分された相対的に高い労働集約度の製品 i の量 ($i=l+1, \dots, n$)。

同様に C_k は

$$C_k = \frac{r_k}{R} \sum_{i=1}^n c_i N_i - \sum_{i=l+1}^n c_i Q_{ik} \quad (3)$$

$$(k=1, \dots, P)。$$

等しさの許容偏差 Δ_{jk} および q_k の経済的意味はつぎの点にある。

部品はどれもそれぞれ生産時間とそれが生産される前の時間とを異にする。すなわち、例えば、補強部品、回転軸、ブッシュ、軸、軸受けのようなあまり時間のかゝらない部品は組立開始前10日、つまり多くの場合生産物が完成する月に生産される。ところが車体、台車、クランク軸、操縦装置等のような長い時間のかゝる部品は組立前30日から50日に加工を始める。それ故設備の稼働率計算を月ぎめで行うことには——この月ぎめで生産が計

画されているのだが、—ある程度制約がある。

しかしシリーズ式機械製造では、作業ごとの部品製造グラフは作れないので、設備稼働率の等しさの十分な証明を製品の完成が計画されている月ぎめ計算で行うべきである。この際、稼働率の等しさということで厳密な等しさをとるべきではなく、一定範囲の許容偏差をもった各月の稼働率規模が大體等しければよしとする。

卸売価格で表わされる生産規模に関しても、経済学的には、生産規模の厳密な等しさには確実な根拠がない。何故なら我々はここでは個々の商品の生産高規模を問題にしているのではなく、総生産高規模を問題にしているからである。

各月の設備稼働率と卸売価格表現での生産規模の等しさは次の制約連立1次不等式で表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^l t_{ij} x_{ik} \leq F_{jk} + \Delta_{jk} \quad (=k=1, \dots, P; j=1, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^l c_i x_{ik} \leq C_k + q_k \quad (k=1, \dots, P) \\ \sum_{k=1}^p x_{ik} = N_i \quad (i=1, \dots, l) \end{array} \right. \quad (4)$$

連立1次不等式(4)は量 Δ_{jk} と q_k を定める手掛りを与えることに注意しよう。等式(2)と(3)から

$$\sum_{k=1}^p F_{jk} = \sum_{i=1}^l t_{ij} N_i$$

$$\sum_{k=1}^p C_k = \sum_{i=1}^l c_i N_i$$

なることがみちびきだされる。故に

$$\sum_{k=1}^p \Delta_{jk} = 0, \quad \sum_{k=1}^p q_k = 0$$

である。

したがって $p-1$ ヶ月間 $\sum_{i=1}^l t_{ij} x_{ik} = F_{jk} + \Delta_{jk}$ なら、ある1ヶ月の最大マイナス偏差は $(p-1)\Delta_{jk}$ である。しかし、このような最大偏差の確率はとるに足りないほど小である。ただし、たいいてい場合は $\pm \frac{\Delta_{jk}}{2}$ の範囲にあるだろうから。上でのべたことはすべて卸売価格表現での生産規模の偏差にもあてはまる。

予定表を作成する際には連立1次不等式(4)は生産設備の等しい稼働率と卸売価格表現での等しい産出規模の遵守を保障する。完成指定期限の遵守と組生産の計画方法は連立1次不等式(4)のある変更を通じて定式化される。

例えば、上級機関が完成品の期限前発送の権限を工場に委任せず、種類*i*の製品の生産期限のある一定の四半期と定めれば、数学的モデルにおけるこの x_{ik} にとっては、 $k=a_1, a_2, a_3$ である——ここで a_1, a_2, a_3 は当該の3ヶ月である。組生産を確保するには x_{ik} によって構成的に同一性質の組に属するセット製品*i*を表示すべきであり、量 t_{ij} を T_{ij} ——第*j*組の設備での種類*i*セットの全予定量を製造するに要する時間——にかえるべきである。これに応じて c_i は C_i にかえられ、連立1次不等式(4)の最後の等式は

$$\sum_{k=1}^p x_{ik} = 1$$

とかけられる。

これらの条件の下で連立1次不等式(4)の整数解を得ることが望ましい。

相対的に低い労働集約度の製品の生産を集中する方法はつぎのような最適化関数の形で定式化される。

$$\sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^l \delta_{ik} \rightarrow \text{最小}$$

この時 δ_{ik} は

$$x_{ik} > 0 \text{ なら } \delta_{ik} = 1,$$

$$x_{ik} = 0 \text{ なら } \delta_{ik} = 0$$

である。

遺憾ながら最小化関数は線型でないのだが、このことはシンプレックス法によって問題を解く際に制約行列とともに最小化関数を適用することを妨げる。それ故、製品の月ぎめ生産配分問題はその全座標が非負で、連立1次不等式(4)の諸条件を満足させるようなあるベクトル $P\{x_{ik}\}$ を見い出すことに帰着する。

第2段階での問題の解は制約行列のシンプレックス変換によって実現する。出発行列の成分は連立1次不等式(4)の未知数の係数から成る。第2段階における行列変換の経済的意味は生産の月ぎめ配分にある。この場合同一製品の生産の連続性は、与えられた*i*に関する x_{ik} が*k*に関して行列の基底に入り込めば、確保される。

第3段階で問題の最適解が見い出される。これを見い出すために、得られた基底計画の

分析をもとにして、関数

$$f(x) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^l x_{ik}' \rightarrow \text{最大}$$

が構成される。ここで x_{ik}' は基底計画における量 N_i に近いような値 x_{ik} である。

関数を基底計画行列に置換後、最適技術を得るまでシンプレックス変換が続く。

3. 問題の解例

上述の解法はレニングラードの靴製造機械製造工場《Вперед》で適用された。各作業に独特の構造と運動をする機械を用いねばならない——靴製造の——技術過程の特殊性は構造・型・労働集約度に関して製品ごとに鋭い差異をつけている。すなわち、全機械は1時間当たり0.1トンから6トンまでの振幅を有し、製造の労働集約度は180標準時間から2000標準時間の振幅を有している。

数多くの予定表技術の作成にあたって、普通の方法では各3ヶ月の安定した設備稼働率を確保するのに成功していないのが実情である。すなわち1961年の第1四半期には7つの月ぎめ予定表配分技術が作成された。しかし実行に移された比較的良好な技術ですら設備稼働率を等しくするという要求を満足させなかった。設備稼働率の月別変動は1ヶ月平均作業規模で67%から139%にのぼった。

製品の労働集約度の構成を詳細に分析し、生産配分技術の簡単な組替によって設備の等しい稼働率を得ようとする試行錯誤的な試みは結局線型計画の必要性を認めることとなった。

この問題の解の第1段階では、工場の製品別作業分類にとって、つぎのような関係がはっきりした。すなわち、 $K_{ij} < 0.4$ なら製品の四半期予定計画は同一月に集中すべきこと、 $K_{ij} = 0.4 \sim 1.2$ なら生産は2つの月に配分さるべきこと、最後に $K_{ij} > 1.2$ なら生産は3つの月に配分さるべきこと。

配分さるべき10種の製品のうち3種は相対的に高い労働集約度をもっていることがわかり、残りの7種のために制約行列が作成されて基底計画が見い出された。

可能解を見い出すための行列変換の際にはつぎの算法が用いられた。

手続1. 先行行列の各列 $\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta}$ ごとに諸成分の和を計算する ($a_{\alpha\beta}$ は行列の α 行と β 列の交わるところにある成分)。つぎの手続のために和が正つまり $\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} > 0$ であるような列を選び出す。このような列が7個あるとしよう。

手続2. 選り出した列の各々について解決（一般的な）成分 $a_{\alpha'\beta}$ ($\beta=1, \dots, \gamma$) を決定する。

手続3. 制約列ベクトルの α' 行にある成分を選り出した列の解決成分で除して値を決定する。

$$\frac{a_{\alpha'o}}{a_{\alpha'\beta}} = d_{\beta} \quad (\beta=1, \dots, \gamma)$$

手続4. 先行手続で得られた値を手続1で得た成分の和にかける。

$$d_{\beta} \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta} \quad (\beta=1, \dots, \gamma)$$

手続5. 手続4で得られた結果を比較する。解決（一般的な）列として最大積 λ_{β} をもった列を選り出す。

手続6. 通常のシンプレックス法で先行行列の変換を行い、変換後手続1に帰る。

最初の可能解、換言すれば、設備の等しい稼働率と等しい産出規模という視点からの、生産予定表の最初の配分技術は12ステップで得られた。

最初の可能解の基底非負値は第1表で与えられている。

第1表の分析から、生産予定表の最初の配分技術は設備稼働率が等しいことと商品の生産規模が等しいことに関して満足すべきものなのだが、生産条件に関しては受け入れがたいものであることがわかる。例えばΦΓИ—0製品の4月産出高77と6月産出高23、ある

第1表 最初の可能解の基底非負値

製品記号	4月	5月	6月
OM—4	11.4 (X_{11})	10.4 (X_{12})	2.2 (X_{13})
ΓΠ—150	—	—	15 (X_{23})
ΑΓΒ—8c	—	—	5 (X_{33})
ΦΓИ—0	77.2 (X_{41})	—	22.8 (X_{43})
ΠИΓ	—	20 (X_{52})	—
ΑΓΒ—66т	2.1 (X_{61})	—	2.9 (X_{63})
МНΠ	—	19.7 (X_{72})	30.3 (X_{73})

いはOM—4製品の4月産出高11、5月産出高10、6月産出高2という計画はきわめて不当である。さらに、生産高を同じに保ちながら製品OM—4、ΦΓИ—0、ΑΓΒ—66т及びМНΠの生産を同一月に集中する方向で次の行列変換を試みれば、この可能解は改善される。それ故最適化関数の定式化は

$X_{11} + X_{23} + X_{33} + X_{41} + X_{52} + X_{63} + X_{73} \rightarrow$ 最大
という形をとる。

(定式化された関数に関する) 最適解は6ステップをへて得られる。

最適技術の基底非負値は製品ΑΓΒ—8cとΦΓИ—0の生産を完全に集中し、製品OM—4とМНΠの生産を等量に配分したという点で、若干修正されている。

修正された最適産出計画は第2表で与えられており、この表で生産の高度のシリーズ性は一目瞭然である。すなわち、4種の製品は同一月に集中して生産され、残りの生産は最小月数に等しく配分されており、この際これらの製品の生産の連続性が確保されている。

《Вперед》工場の生産予定表作成方法の仕上は同工場の技術的・経済的作業指数の改善に重要な影響を与えた。第

第2表 1961年第2四半期の産出計画

製品記号	第2四半期の計画個数	4月	5月	6月
OM-4	24	12	12	—
ГП-150	15	—	—	15
АГВ-8с	5	—	—	5
ФГИ-0	100	100	—	—
ПИГ	20	—	20	—
АГВ-66т	5	2	3	—
МНП	50	—	25	25
СПР*	243	80	80	83
АГВ-12*	12	6	6	—
ЭЛШВ*	80	25	25	30

* これらの生産は第1段階で配分されている。

1 四半期に比べて第2 四半期には労働者の仕事待ちが3分の1に縮まり、規定外労働時間の適用が減少したことがこのことの証拠である。他の最も重要な指数、なかんずく総生産高及び労働の生産性に関して計画の遂行が改善された。このことは製品産出配分予定表を確固たるものとすることが生産経済に好影響を与えることの全く明瞭な証明である。

4. 他の最適生産予定表作成方法のスケッチ

計画における数学的方法と電子計算機の適用は計画の質、なかんずく製品産出予定表構成の質をいちじるしく改善した。現在文献には設備の等しい稼働率をまもった月・あるいは四半期ごとの製品産出予定表の作成を保障する数学的モデルが若干記述されている。

このようなモデルの二つについて適用の合目的性を吟味することにする。

第1のモデル¹⁾の眼目は生産予定の配分にあたって毎月の最適な技術を見い出すにある。最適性判別規準は工作機械の全グループの最大限に可能な稼働率にあり、これは国家が予め定めた計画よりも大量にそれぞれの製品を産出するという計画によって達成される。方法の数学的定式化はきわめて簡単だし、最適解を見い出す算法も標準的であるが、それを

1) Р. М. Петухов, М. В. Недлина. Тезисы доклада на научной конференции в Московском инженерно-экономическом институте. 1961.

工場内計画の実際に適用しても役には立つまい。

実際、設備稼働率の最適（最大）技術の発見は不可避免的に——この観点からすれば——最適な製品名の決定と結びついている。しかしこの決定の権限は企業にはなく、国民経済会議及び国家計画委員会に属している。さらに、かゝる方法を多くの機械製造工場に適用すれば、国民経済計画における原材料・技術の供給バランスの再検討をせまられることは不可避である。そしてこの再検討もまた国家計画委員会の権限なのである。最後に、場合によっては最適品目技術を見い出すことが合目的であろうが、この問題を解くことは年間を通して必要なのであり、年間の最適品目の決定後にその月毎の配分にあたるべきである。しかしこのことは最初に設定された問題に回帰することにはかならない。

注目に値する今一つの月ぎめ産出予定表配分の数学的方法は、この方法の考案者²⁾によって最適性判別基準として設備の全グループの最高の等稼働率の実現をとる。

この方法の長所は最初の可能解が簡単に得られることと、最適値を見い出すために標準的な算法が利用できることである。

しかし、この方法は生産予定表の作成に対して提起される計画・組織上の多くの要求を無視し、また得られた解において、相対的に労働集約度の低い製品を同一月に集中して産出されるようになっていない場合に予定表の作成の改善が不可能であることによってなによりもまず一連の欠陥を有する。最後に、設備の稼働率が等しいことを絶対者に高めることは設備稼働率の経済的内容に合致しない。すでにのべたように、生産が月で数えられている設備の稼働率は部品調製に際しては当該計算に正確には一致しないであろう。それ故最も等しい（月別生産の）設備稼働率を得ようとする努力は、あたかもそうすることが最初から合目的でなかったかのように、経済的意味を失っている。

私がこのように述べる判断の確証として、第3表に設備稼働率の等しさを最大化する方法によって得た《Вперед》工場の第2四半期の予定表技術を掲げておく³⁾。

この技術をまえに考えられ工場によって採用された技術（第2表）と比較すれば、第3表に掲げられた配分の不十分さは一目瞭然である。すなわち、この技術によれば、労働集約度の高い製品 СПР は4月に88、5月に87、6月に68という風に不等量生産されねば

2) Ф. И. Биншток, Л. И. Смоляр. Тезисы доклада на научной конференции в Московском инженерно-экономическом институте. 1961.

3) 採用した技術では、等しさ $V=0.94$ 、 $V=1$ の時、全製品は四半期の3つの月に等しく配分される。

第3表 稼働率の等しさを最大にする方法によって
得た四半期予定表 配分技術

製品記号	第2四半期の計画個数	4月	5月	6月
OM-4	24	—	—	24
ГП-150	15	8	—	7
АГВ-8с	5	1	—	4
ФГИ-0	100	41	—	59
ПИГ	20	20	—	—
АГВ-66т	5	—	5	—
МНП	50	16	10	24
СПР	243	88	87	68
АГВ-12	12	5	5	2
ЗЛШВ	80	23	57	—

ならぬし、АГВ-12は4月と5月にそれぞれ5、6月に2、ЗЛШВは4月に23と5月に57生産されねばならぬ。

さらに、相対的に低い労働集約度の製品ГП-150、ФГИ-0、АГВ-8сは同一月に集中しては生産されていない。

すでに指摘したように、我々が吟味している方法の数学的定式化では、労働集約度の低い製品の産出を同一月に集中することによる予定表構成の一層の改善は実現しない。かといって、得られた解をその場で修正する

ことは結果的に相異なる設備グループの稼働率におけるあまりに重大な変更を行うこととなり、等稼働率達成のための全労力を無にすることとなる。

最後にもう一度強調しておく必要のあることは、機械製造工場の生産予定配分のための数学的方法の適用は、この数学的方法を通常的分析方法と結びつけたときのみ、かつ、全ての計画・組織上の要求を完全に考慮した上でのみ、満足すべき結果に達するということである。

〔本訳にあたって木村等教授の懇切な御教示を得た。—訳者〕