研究ノート

個　人　確　率

木　村　　等・広　瀬　文　子

本稿は，Savage が Foundation of Statistics (1954) において展開している個人確率の理論を紹介しようとするものである。Savage のこの書物は，すでに絶版であり，Savage 自身考え方を変えているようであるが，重要な文献であるので，あえてここに紹介をこころみる。

1. 序

確率をどのようにとらえるかということについては，いろいろな立場がある。Savage が客観主義的な立場とよんでいる頻度論的確率論においては，たとえば，サイコロをふったとき1の目の出る確率をつぎのように定義する。すなわち，n 回サイコロをふったとき，r 回1の目が出たとする。この比 r/n を1の目の相対頻度とよぶ。この相対頻度の，n を大きくしていったときの，極限値をもって，1の目の出る確率とよぶ。このような立場をとるかぎり，くりかえしの可能なものでなければ，確率を定義することはできない。したがって，たとえば「火星に生物がいる確率」という言葉は意味をもたない。統計学者の多くは，このような立場にたって確率を考え，統計学を論じてきたのである。ここで，統計的推論における区間推定について確率との関連を述べてみる。たとえば，母集団パラメータ μ の推定においては，μ の下および上の信頼限界をそれぞれ t_1，t_2，信頼度を α とすれば，

$$P(t_1\leq\mu\leq t_2)=\alpha$$

という関係がなりたつ。これを言葉で表現すれば，「μ が t_1 と t_2 との間にある確率は α である」ということになる。ところが，標本がとられ，その標本から統計量 t_1，t_2 がもとめられたとき，我々はその値を知らないけれども，μ は一定の値をもつものであるから，

$$t_1\leq\mu\leq t_2$$

という不等式は，なりたつか，なりたたないか，いずれかであって確率とは関係のないものである。しかるに，推定論において，この不等式が成立する確率が α であるという表

現をとっているのは，つぎのような考え方からである。すなわち，1つの標本についての「μ は t_1 と t_2 の間にある」という命題は，真か偽のいずれかであるが，我々は，その真偽について知ることができない。一方，統計量 t_1，t_2 は確率変数であるから，何度も標本をとりなおして，そのつど信頼限界 t_1，t_2 をもとめ「μ は，かくかくの信頼限界の間にある」という判断をくりかえすならば，あるときはこの命題が真であって，正しい判断をし，あるときはこの命題が偽であって，あやまった判断をしていることになろう。このような判断のくりかえしの無限の系列において，正しい判断をしている確率が，頻度論的意味における確率になる。そして，この頻度論的確率が α であるということを示すのが

$$P(t_1 \leq \mu \leq t_2) = \alpha$$

という関係式の意味である。現実には，標本は1回しかとらず，その結果としての判断は，正しいか，あやまっているかのいずれかである。しかしながら，その背後に，標本をくりかえしとり，同様な操作をくりかえすならば，正しい判断を下す確率は，信頼度として定めた α であることが保障されている。頻度論的確率を基礎とした推定論は上述のようなものであった。もちろん，これでは不十分であって，この頻度論的確率 α と，現実にもとめられた唯1つの不等式

$$t_1 \leq \mu \leq t_2$$

の成立に対する信頼の程度との間に，理論的な関連づけが必要であるという考えがある。あるいは，頻度論的確率の媒介なしに「μ は t_1 と t_2 との間にある」という命題に対する信頼の程度を考えるべきであるという立場がある。このような考え方から，確率論としては個人確率あるいは主観確率が，統計理論としてはベイジアンの立場が生まれてくるのである。

主観確率は，上に述べた頻度論的確率が，対象をくりかえしの可能なものという狭い範囲に限るというのに対して，もっと広い範囲の命題の成立についての主観的評価を確率と考える。Savage は，これを個人確率とよんで合理的人間の行動をもとにしてとらえようとしている。すなわち，ある人が横断歩道でないところで道路を横切ったとする。この人は，自動車にはねとばされるという危険のあることは知っているが，その時点では自動車にはねとばされることはほとんどないと考えたから道路を横切ったのである。すなわち，このことから，この人の自動車にはねとばされるということに対する主観確率は相当小さいものであったということが判断される。このような考え方に対して，たとえば，「火星には空気がある」および「火星には水がある」等の知識が得られた段階では，「火星に生物

がいる」ということは相当たしかなように思われる。このような情報，すなわち，いくつかの命題の集合 B と1つの命題 A とがあるとき，B が真であることを知ったときには，これを証拠として A がなりたつことをどの程度信じうるかというようなものを主観確率と考えることもできる。またこのような場合は，B を証拠としたときの A の成立する程度を人の主観に関係なく，命題 A,B の論理的構造をもとにして，必然的に成立する論理的関係として考えることもできるであろう。このような考え方が，Savage が necessary view とよんでいる論理的な確率の考え方である。

この外に，確率を測度としてとりあつかう測度論的な考え方がある。たとえば，サイコロをふったとき，1の目が出ること，2の目が出ること，……，6の目が出ること等を基本事象といい，おのおのを数1，2，…，6であらわす。基本事象の集合を事象という。たとえば，$A=\{1,3,5\}$ は「奇数の目が出る」という事象をあらわす。とくに，空集合に対応する事象を空事象，全ての基本事象からなる集合 $\{1,2,\cdots,6\}$ に対応する事象を全事象という（Savage の書物では，これらをそれぞれ O，S であらわしている)。集合とそれに対応する事象とは区別する必要がないので，集合そのものを事象とよぶことにする。また，事象は全事象 S の部分集合であるという表現をとるのが普通である。ここで，任意の事象 A に対してつぎの条件を満足する実数 $P(A)$ が対応するとき，$P(A)$を確率という。すなわち，

1.　$0 \leqq P(A) \leqq 1$

2.　$A \cap B=O$（集合として共通部分をもたないとき，事象としては互いに素であるという）であるとき，

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

3.　$P(S)=1$

上の3条件は，集合の測度の条件と本質的に同じである。すなわち，集合について定義された実数値関数 $m(A)$ が

M1.　$m(A) \geqq 0$

M2.　$A \cap B=O$ ならば $m(A \cup B)=m(A)+m(B)$

を満足するとき，$m(A)$ を測度という。直観的にいえば，測度は直線上での長さ，平面上での面積，空間における体積等に相当するもので，これらを一般化したものである。この条件を確率の条件と比較すれば，確率は最大値として1をもつということだけが異っていて，本質的には差異がない。そこで確率を確率測度とよび，このような確率のとりあつか

いを測度論的な考え方という。S が有限集合の場合には問題はないが，S が無限集合，とくに連続体である場合には，いろいろなタイプの測度が考えられる。たとえば，M２の条件の一般化したものを有限加法性とよんでいるが，無限集合については，無限個の和を考えることができるのであるから，M２を

M2′. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots\cdots = O$ がなりたつとき，

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

のように拡張することもできる。M2′ の条件を完全加法性，あるいは可算加法性という。測度としては，有限加法性をもつもの，完全加法性をもつもの，いずれも考えうるが，確率論においてよく用いられるのは，完全加法性をもつルベーグ測度である。高次元の空間，あるいはもっと抽象的な空間についても同様であるので，１次元ユークリッド空間，すなわち直線について述べる。すなわち，S を１次元ユークリッド空間とし，S の部分集合の集合 $\mathfrak{B}$ について，

B1. $\mathfrak{B}$ にふくまれる有限あるいは可算無限個の集合の和集合および積集合はまた $\mathfrak{B}$ にふくまれる。

B2. $\mathfrak{B}$ にふくまれる集合の補集合は $\mathfrak{B}$ にふくまれる。

という２つの条件がなりたつならば，$\mathfrak{B}$ にふくまれる集合について，完全加法的な測度が定義できる。これをルベーグ測度という。とくに，$\mathfrak{B}$ が，

B3. $\mathfrak{B}$ はすべての有界な半開区間〔a, b）をふくむ。

という条件を満たすとき，$\mathfrak{B}$ をボレル集合族といい，$\mathfrak{B}$ にふくまれる集合をボレル集合という。ボレル集合は，半開区間をもとにして，可算無限個の和集合，積集合をつくることによって構成できる集合である。半開区間〔a, b）の測度を

$$m\,[a,\ b) = b - a$$

と定義すると，M1，M2′ を満足するボレル集合についてのルベーグ測度が定義できる。

確率をルベーグ測度とする考え方には反対論がある。しかしながら，確率を事象すなわち集合の測度としてとりあつかうことは，数学的に厳密な議論が可能であるので，どの立場の論者も採用していることである。しかしながら，それぞれの立場の確率をあたえるような測度は如何なるものであるかが問題なのである。

2. 不確実性のもとにおける決定

2.1 人間，世界，状態，事象

人間は，知識あるいは情報をもとにして，いくつかの行動の中から，実行すべき行動を選択し，決定する。この情報と決定を結ぶ推論を論ずるのが統計学であると考えられる。そして，推論は一般に論理にかかわるものである。すなわち，真であることが知られている命題から，論理的に導出できる命題はまた真である。このことによって，人間は行動の決定を行なうことができる。たとえば，「風が吹けば桶屋がもうかる」という命題が経験法則として確立されたならば，「風が吹く」という情報が得られたときには，当然論理的帰結として「桶屋がもうかる」ことが知られる。したがって，ある人は桶屋になって金をもうけることにするであろう。このように，情報を処理して，行動の決定に結びつけるのが論理である。一方，「風が吹いたとき，桶屋がもうかることもあり，もうからないこともある」というように，不確実性が入って来たときの推論は，理論のみでは十分にとらえきれない。しかしながら，このように，命題Aから命題Bが論理的には導きえない場合にも，AはBが成立するためのある程度の証拠になるという関係が考えられる場合があるであろう。ここではこのような考え方を問題にするのである。他方，同じ情報をもち，同じ状況にある人間は，同じ決定をするはずであるというように考えるならば，これは論理的な確率論の立場である。ここではこの立場をとらず，決定は個人の主観によって異なるものとしてとりあつかう。

ここでいう人間とは，理論としてとりあつかうのであるから，我々のような通常の人間ではなく，理想化された，合理的すなわち論理的な人間であるとする。すなわち，合理的人間は，あやまりなく計算し，あやまりなく推論する。しかしながら，一方では全能ではありえないから，不確実性に直面しなければならない。また人間とよんでいるが，当然企業等の1つの意志決定の単位を意味するものでもある。

人間が問題とする不確実なものの例を Savage はつぎのようにあげている。すなわち，

1. ある1つの卵がくさっているかどうか。
2. ある1ダースの卵のうちで，くさっているものがあるとすればどれか。
3. シカゴにおける昨日の正午の温度。
4. 現在シカゴとよばれている場所における紀元元年1月1日から，紀元4000年1月1日までの毎日の正午の気温。
5. 貨幣を投げ続けたときの，表と裏とからなる無限系列。
6. 十進表示による π の完全な無限桁の表示。
7. 過去から現在，未来にわたる宇宙の完全な歴史。

このような不確実性をもった現象をとりあつかうのがここでの問題である。議論をはじめる前に言葉を定義しておく。

定義　世界：行動する合理的人間がかかわりをもつ対象全体。

定義　(世界の)状態：世界についての記述。

定義　(世界の)真の状態：世界が実際にある状態。

例1では，問題になっている卵が世界であり，その卵がくさっているという状態と，くさっていないという状態の2つの状態がある。例2については，問題の12個の卵が世界であり,「全部くさっている」から，「全部くさっていない」までの 2^{12} 個の状態がある。例2の世界である12個の卵のうち，1個茶色の卵があるとして，これに着目すれば，これは例1の世界である。この場合，この茶色の卵がくさっているという状態は，12個の卵の世界について考えれば，「茶色の卵はくさっているが，他の11個はくさっていない」，「茶色の卵と白い卵がくさっている」,……，「12個全部くさっている」という 2^{11} 個の状態に対応する。このように小さい世界の状態は，大きい世界の状態の集合に対応している。したがって，どのような問題も，例7にあげた最も広い世界の一部として考えることもできるであろう。

状態全体の集合は，例1および例2の世界では有限である。一方，例3では状態は，多分 -40 と $+40$ の間のすべての実数ということになり，状態は無限にあるといえる。例2における「少なくとも1個の卵がくさっている」というような状態の集合（この場合は $2^{12}-1$ 個の状態からなる）を事象とよんでいるが，例3においては，温度は0°C以下であるという事象は，$-0.01°$，$-0.0001°$,…… 等の無限個の状態の集合である。事象のうち，全ての事象からなる事象を，全事象とよび S であらわす。また状態を全く含まないものも事象と考えて，空事象とよび O であらわすこととする。状態自体は，s，s' 等であらわす。とくに，あたえられた事象が真の状態を含むとき，その事象が起ったという。

事象は，状態の集合であるから，全事象の部分集合である。したがって，事象の間の関係は，集合の間の関係であり，集合が満足する性質をすべて満足する。すなわち，事象の集合はブール代数となる。

2.2　結果，行動，決定

たとえば，6個の卵を使って卵焼をつくろうとして，5個の卵をわってボールに入れてあるとする。6個目の卵をわるについて，直接ボールの中にわって入れるか，一旦皿にと

ってからボールに入れるか，あるいは，6個目の卵を棄ててしまうかという3つの行動が考えられる。6個目の卵はくさっていることもあり，くさっていないこともある。したがって，それぞれの状態と行動によって得られる結果は第1表のようになるであろう。

上の例からもわかるように，結果としては金，健康状態，あるいは神の意志等人間にかかわりのあるいろいろなものが考えられるのであるから，結果とは人間の状態であるといってもよいであろう。1つの問題にかかわりのある全ての結果の集合を F であらわし，それぞれの結果を f，g，h 等によってあらわす。

2つの行動が，すべての状態に対して同じ結果を生むならば，我々の立場からは2つの

第1表　行動，状態，結果

状態／行動	くさっていない	くさっている
直接ボールへ	6個の卵の卵焼。	5個の卵が無駄になり卵焼はつくれない。
一旦，皿にとる	6個の卵の卵焼。ただし，皿を洗う必要あり。	5個の卵の卵焼。ただし，皿を洗う必要あり。
卵をすてる	5個の卵の卵焼。ただし，くさっていない卵を1個すてる。	5個の卵の卵焼。

行動として区別する必要がない。行動 f とは結局，世界の各状態 s に対して，1つの結果 $f(s)$ を対応させる関数であると考えられる。そして，1つの問題にふくまれるすべての行動の集合をFであらわすことにする。

2.3　行動の選好順序

2つの行動 f と g があたえられたとき，人間は g より f を好むかどうかを決定することができるものとする。このように，Savage は行動の順序を出発点として個人確率を論ずるのである。ここでは，Savage が「f は g より好まれることはない」という表現をとっているものを，「g は f より好まれる」というようにあらわす。すなわち，「より好まれる」という言葉を，同等の場合を含むものとしてもちいる。したがって，記号では

$$f \leq g$$

とかく。

行動の間の選好順序 $\leq$ を，一般にもちいるものとは少し変更してもちいる。すなわち，

一般に順序 $\leqq$ とは，任意の要素 x，y，z の間にある2項関係であって，

O1.　$x \leqq x$

O2.　$x \leqq y$ かつ $y \leqq x$ ならば，$x = y$

O3.　$x \leqq y$ かつ $y \leqq z$ ならば，$x \leqq z$

の条件を満足するものである。このとき，この関係を半順序または順序といい，要素の間に順序の定義された集合 X を半順序集合または順序集合という。とくに，順序集合 X の任意の要素 x，y に対して，

O4.　$x \leqq y$ または $y \leqq x$

という条件がなりたつとき，$\leqq$ を線形順序あるいは全順序といい，この順序集合 X を線形順序集合あるいは全順序集合という。しかしながら，行動については，f と g が相異なる行動であるとしても，$f \lesssim g$ でありかつ $g \lesssim f$ であることもありうると考えられる。したがって，条件O2 は行動の順序の場合には適当でない。そこで，O2 をはぶき，O1，O4 を合併して，条件1とし，O3 を，条件2として行動の間の線形順序の公理とする。すなわち任意の x，y，z に対して

1.　$x \lesssim y$ または $y \lesssim x$

2.　$x \lesssim y$ かつ $y \lesssim z$ ならば，$x \lesssim z$

を満足するとき，線形順序であるという。これによって，公理P1をつぎのように定める。

P1　　選好関係 $\lesssim$ は，行動の間の線形順序である。

この公理から，任意の2つの行動 f，g の間には，$f \lesssim g$ または $g \lesssim f$ のいずれかの順序がつけられることがわかる。行動の集合が有限である場合は，すべての行動の対について検討することができるから，この順序にしたがってならべることができる。すなわち，つぎの定理をうる。

定理1　F が行動の有限集合であるとするならば，すべての $g \in F$ に対して，

$$f \lesssim g \lesssim h$$

を満足する f，$h \in F$ が存在する。

$f \lesssim g$ のとき，$g \gtrsim f$ とかくことにすれば，この関係 $\gtrsim$ もまた線形順序であることは容易にわかる。つぎに，順序 $\lesssim$ からみちびかれるいくつかの関係について考える。

定義　$f \lesssim g$ かつ $g \lesssim f$ であるとき，$f \doteq g$ と定義する。$f \doteq g$ を f と g は同等であるとよむことにする。

線形順序の公理1から，任意の2つの行動 f，g の間に，$f \lesssim g$ または $g \lesssim f$ がなりた

つ。ここで g として f をとれば，上の関係式は，$f \leq f$ または $f \leq f$ となる。すなわち，f について $f \leq f$ の関係がなりたつ。したがって，$f \leq f$ かつ $f \leq f$ がなりたつ。これは，上の定義の条件において，g を f でおきかえたものであるから，定義にしたがって，$f \doteq f$ をうる。このように関係 $\doteq$ は反射律を満足する。また，$f \doteq g$ なるときは，定義から，$f \leq g$，$g \leq f$ が同時になりたつ。したがって，$g \leq f$，$f \leq g$ がなりたち，$g \doteq f$ がなりたつ。すなわち，関係 $\doteq$ は対称律を満足する。つぎに，$f \doteq g$，$g \doteq h$ とすれば，定義から，$f \leq g$，$g \leq h$ がなりたつ。したがって，$f \leq h$ がなりたつ。一方，$g \leq f$，$h \leq g$ がなりたつことから，$h \leq f$ がなりたつ。この2つの関係から，定義によって $f \doteq h$ をうる。すなわち，$\doteq$ は推移律を満足する。一般に，ある関係が反射律，対称律，推移律の3つの性質をもつとき，この関係は同値関係であるという。このことから，$\doteq$ を行動の間の同値関係とよんだのである。

定義　$f \leq g$ であって，$g \leq f$ がなりたたないとき，$f < g$ であると定義する。$f < g$ は「g は f より真に選好される」とよむ。

$f < g$，$g < h$ がなりたつとする。これを論理記号でかけば，

$$(f \leq g) \cap (\sim(g \leq f)) \cap (g \leq h) \cap (\sim(h \leq g))$$

となる。このことから，

$$(f \leq g) \cap (g \leq h)$$

がなりたつから，

$$f \leq h$$

をうる。一方，$h \leq f$ がなりたつとすれば，この関係と，$f \leq g$ から，$h \leq g$ をうる。一方仮定から，$\sim(h \leq g)$ がなりたつ。すなわち，$h \leq g$ はなりたたない。したがって，矛盾となり，$h \leq f$ は否定され，

$$f < h$$

をうる。すなわち，関係 $<$ は推移律を満足する。$f < g$ を $g > f$ とかくことにすれば，$<$ が推移律を満足することから $>$ もまた推移律を満足する。関係 $<$，$\doteq$ が導入された結果，線形順序の公理1はつぎのようにかきかえることができる。すなわち，

定理2　任意の行動 f，g の間には，

$$f < g,\ f \doteq g,\ g < f$$

のうち唯1つの関係がなりたつ。

〔証明〕 線形順序の公理1から，任意の f，g に対して，$f \leq g$ または $g \leq f$ がなりた

つ。論理記号でかけば,

$$(f \leq g) \cup (g \leq f)$$

となる。ここで論理的可能性をすべてあげれば,

$$(f \leq g) \cap (g \leq f)$$

すなわち, $f \doteq g$ がなりたつか,

$$(f \leq g) \cap (\sim (g \leq f))$$

すなわち, $f < g$ がなりたつか, または,

$$\sim (f \leq g) \cap (g \leq f)$$

すなわち, $g < f$ がなりたつかのいずれかである。すなわち, 定理が証明されたことになる。

いま,「$f \doteq g$ または $f < g$」という命題を考え, 論理式によって計算すればつぎのようになる。

$$\begin{aligned}(f \doteq g) \cup (f < g) &= \{(f \leq g) \cap (g \leq f)\} \cup \{(f \leq g) \cap (\sim (g \leq f))\} \\ &= (f \leq g) \cap \{(g \leq f) \cup (\sim (g \leq f))\} \\ &= (f \leq g) \cap 1 \\ &= f \leq g\end{aligned}$$

このようにして,「$f \doteq g$ または $f < g$」という命題は,「$f \leq g$」という命題に一致することがわかる。

定理3　$f < g$ かつ $g \leq h$ ならば, $f < h$。

〔証明〕 条件を論理式でかけば,

$$(f \leq g) \cap (\sim (g \leq f)) \cap (g \leq h)$$

となる。したがって,

$$(f \leq g) \cap (g \leq h)$$

よって,

$$f \leq h$$

をうる。つぎに, $h \leq f$ とすれば, $g \leq h$ がなりたつことから,

$$g \leq f$$

をうる。これは, $\sim (g \leq f)$ に矛盾する。したがって, $h \leq f$ はなりたたない。すなわち,

$$f < h$$

がなりたつ。

系1 $f < g$ かつ $g \doteq h$ ならば，$f < h$。

同様にして，$f < g$ かつ $f \doteq h$ ならば，$h < g$ もなりたつことがわかる。すなわち，選好の不等関係に，同等なものを代入しても同じ不等関係がなりたつことがわかる。つぎに3つの行動の関係を考える。

定義 $f \leq g \leq h$ または，$h \leq g \leq f$ のとき，g は f と h の間にあるという。

f，g，h の3つの行動について，$f \leq g$ または $g \leq f$，$g \leq h$ または $h \leq g$，$h \leq f$ または $f \leq h$ という関係がなりたつ。そこで，

$$(f \leq g) \cap (g \leq h) \cap (h \leq f)$$

とすれば，前の2つから，$f \leq h$ となり，結局 $f = g = h$ となる。

$$(f \leq g) \cap (g \leq h) \cap (f \leq h)$$

とすれば，$f \leq g \leq h$ となり，g は f と h の間にあることになる。同じように8つの場合すべてについて検討すれば，$f \leq g \leq h$，$f \leq h \leq g$，$g \leq h \leq f$，$g \leq f \leq h$，$h \leq f \leq g$，$h \leq g \leq f$，および $f = g = h$ をうる。$f = g = h$ の場合，$f \leq g \leq h$ がなりたつのであるから，すべてが等しい場合を含めて，3つの行動のうちの1つは，他の2つの間にあると考えてよいであろう。

公理 P1 のもつ意味，というよりは公理というものの意味は，2種類あると考えられる。1つは経験の抽象という考え方であり，他の1つは規範的なものとする考え方である。第1の立場では，理論というものは，経験の整理，抽象であると考える。この立場においては，経験から得られたいくつかの命題を公理としてとりあげ，これを出発点として論理的に構成されたものが理論であるということになる。したがって，そこで得られた命題が，現実と関連するときは，予測という形をとる。予測があやまった場合すなわち，論証を展開して得られた命題と事実との間に矛盾があった場合，公理そのものを検討しなければならない。論理自体も人間の考え方がしたがっている法則であるから，自然的な事実についての法則と考えられるであろう。事実人は，確かであると信じている命題から論理的に導かれたものは信じるが，論理的に否定されたものは信じない。

しかしながら，論理の主要な価値は，その規範的な性格にあるというのが Savage の考えである。すなわち，論理は思考の規則として守るべきものであり，我々の知識を正確に構成し，またある知識から他の知識を導き出すために，あやまりその他の攪乱を排除して意識的に努力してしたがおうとするという意味で規範的な法則である。

論理を規範的であるという考え方と同じように，公理 P1 およびこれから論ずる理論は，決定を矛盾なく行なうための，また単純な決定にもとづいて複雑な決定を行なうため

の規範的な法則であると考える。

2.4 Sure-thing principle

ある人が土地を買いたいと思っている。選挙の結果，保守党が勝つか，革新党が勝つかによって，この土地の値うちも変わるだろうと考えた。そして，保守党が勝つとなれば，どうしようかと考えた結果，買うことに決めた。また，革新党が勝つとなれば，どうしようかと考えた結果，やはり買うことに決めた。このように，どちらの場合にも買うのであれば，どちらが起るかということを知らなくても買うことに決めるであろう。これをもう少し形式的に述べるとつぎのようになる。すなわち，事象 B が起ることを知ったときにも，$\sim B$が起ることを知ったときにも，いずれの場合にも，f より g を選好するとするならば，人は常に，f より g を選好するであろう。この場合，B は起ることのない事象であっても上の命題自体はなりたつ。B が実際に起りうるものであるという条件のもとで，B が起ることを知ったとき，f より g を真に選好し，$\sim B$ が起ることを知ったとき，f より g を選好するならば，人は f より g を真に選好するであろう。

上述の考え方を Savage は sure-thing principle とよんでいる。ここで，Bが起ることを知ったとき，f より g を選好するということを理論的に表現することを考える。我々はこれまで，行動の間に選好による順序をつけうると考えて来た。しかし，これは状態としては，すべての起りうる場合全体，すなわち，S 全体について考えて比較ができるとしているのであって，一部すなわち，S の部分集合 B，別の言葉をもちいれば，事象Bが起るときのみの比較については考えていないのである。ここではじめて，事象Bが起ったときという制限のついた場合の行動の比較が問題となるのである。この制限つきの比較を，制限なしの S全体での比較によって定義しなければならないわけである。B が起ったときという制限つきの比較においては，B が起らない場合は問題になっていない。したがって，B 以外の状態についての f と g の値に依存することなく比較がされなければならない。そこで，B 以外の状態について，すなわち，すべての $s \in \sim B$ については，$f(s)=g(s)$ として考えてよいであろう。したがって，B 以外の状態については，f と g とが一致するように修正したとき，なお S 全体についてなされる行動の比較において，f$\leq$g とされるときに，B の起ることが知られたとき，g が f より選好されるという定義する。このことを形式的には，

$$\mathrm{f} \leq \mathrm{g} \quad \text{given } B$$

とあらわすことにする。

Bがあたえられたときの f≦g を定義するにあたって，～Bにおいては，f と g が一致するように修正するわけであるが，B以外の状態についての f と g の値には関係ないのであるから，この修正の仕方に選好順序が依存するものではないということを認めておかなければならない。すなわち，2つの行動 f と g について述べれば，～Bでは f と g は一致し，かつ全体として f≦g であるならば，～Bにおいて f と g を修正して，f′，g′ をつくったとき，f′，g′ がどのように修正されたものであっても，Bにおいてはそれぞれ f と g とに一致し，～Bにおいては f′ と g′ が一致するかぎり，全体としては f′≦g′ がなりたつということになる。

状態 s の全体 S を x 軸上の区間〔0，1〕，結果 f の全体 F を y 軸上の区間〔0，1〕にとる。行動 f は，状態 $s \in S$ を結果 $f \in F$ に対応させる関数であるから，図1のような

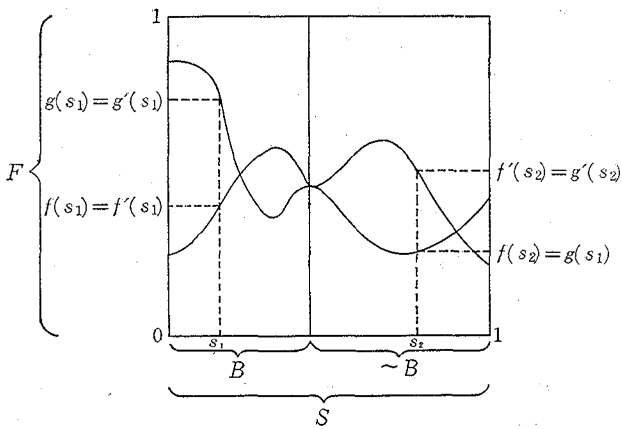

図　1

グラフによって表現される。ここで，f と g，f′ と g′ は～Bにおいて一致しており，Bにおいては，f と f′，g と g′ が一致している。これは，f と g を～Bにおいて一致するように2通りに修正したものである。この f，g，f′，g′ について，上に述べたことを公理P 2とする。すなわち，

P2　もし，f，g および f′，g′ について，

1. ～Bにおいては，f は g に一致し，f′ は g′ に一致する。
2. Bにおいては，f は f′ に一致し，g は g′ に一致する。
3. f≦g

の3条件がなりたつならば,

$$f' \leq g'$$

がなりたつ。

P2は，～Bにおける修正は全体としての選好関係に影響をあたえないことを述べている。このことから，f≤g given B を，$s \in \sim B$ について $f(s)=g(s)$ であるようにしたとき f≤g がなりたつことであると定義できることになる。このようにして，≤ given B が定義できたのであるから，任意の f，g について，～B の部分を一致させたものを f′, g′ とすれば，P2 から，f′≤g′ または g′≤f′ がなりたつ。すなわち，f≤g given B または g≤f given B がなりたつことがわかる。また，f≤g given B, g≤h given B がなりたつとき，f′ を $s \in B$ に対しては $f'(s)=f(s)$，$s \in \sim B$ に対しては $f'(s)=g(s)$ とし，h′ を $s \in B$ に対しては $h'(s)=h(s)$，$s \in \sim B$ に対しては $h'(s)=g(s)$ とする。f≤g given B から f′≤g，g≤h given B から g≤h′。したがって，f′≤h′ をうる。f′, h′ のつくり方から，これは f≤h given B を意味する。このようにして，≤ given B は線形順序であることがわかる。≤ given B は～B における部分を修正して，≤ の関係を考えるのであるから，≤ についてと同様な議論ができ，関係 ≥ given B, > given B, < given B, ≐ given B が定義でき，≤ についてと同様な命題がなりたつ。しかしながら定義からもわかるように，f≤g であるからといって，f≤g given B とはならない。たとえば図2の例では，B においては f は g より大きい。一方～B におい

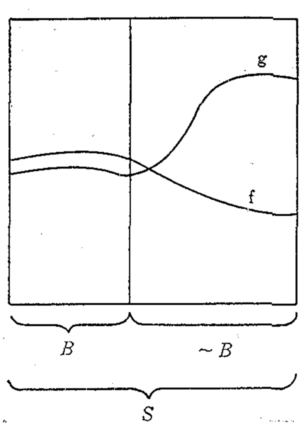

図 2

てはgの方がfよりずっと大きい。この場合全体としてはf≦gとなりうるのである。同様に，f≐g であるからといって f≐g given B にはならない。しかしながら，1つの行動fについては，f≐f と同時に f≐f given B がなりたつ。≐ given B の場合は，もっと条件をゆるめて，$s\in B$ について，$f(s)=g(s)$ がなりたつならば，f≐g given B がなりたつことがわかる。何となれば，

$$h_{00}(s)=f(s) \quad s\in B,\quad h_{00}(s)=f(s) \quad s\in\sim B$$
$$h_{01}(s)=f(s) \quad s\in B,\quad h_{01}(s)=g(s) \quad s\in\sim B$$
$$h_{10}(s)=g(s) \quad s\in B,\quad h_{10}(s)=f(s) \quad s\in\sim B$$
$$h_{11}(s)=g(s) \quad s\in B,\quad h_{11}(s)=g(s) \quad s\in\sim B$$

とすれば，h_{00}，h_{10} は条件によって，ともにfと一致するから，$h_{00}\leq h_{10}$ がなりたつ。したがって，P 2によって $h_{01}\leq h_{11}$ がなりたつ。すなわち，f≦g given B がなりたつ。また同様にして，g≦f given B がなりたつ。したがって，f≐g given B をうる。

時間的な関連のある決定問題，すなわち，事象Bが起るかどうかを観察したのちにfとgいずれをとるかを決定する，あるいは，事象Bが現に起ったことを知ったときfとgいずれをとるかを決定する問題を，時間関係ぬきの問題としてとりあつかうのが，≦ given B の考えである。

ここで，上に述べた関係 ≦ given B をもちいて sure-thing principle を整理しておく。2つの行動 f，g から，つぎのような4つの行動 h_{00}，h_{01}，h_{10}，h_{11} をつくる。

h_{00} はBにおいてfに，～Bにおいてfに一致する。

h_{01} はBにおいてfに，～Bにおいてgに一致する。

h_{10} はBにおいてgに，～Bにおいてfに一致する。

h_{11} はBにおいてgに，～Bにおいてgに一致する。

いま，

$$f\leq g \text{ given } B$$

がなりたつならば，

$$h_{00}\leq h_{10},\quad h_{01}\leq h_{11}$$

がなりたつ。また，

$$f\leq g \text{ given } \sim B$$

がなりたつならば，

$$h_{00}\leq h_{01},\quad h_{10}\leq h_{11}$$

がなりたつ。したがって，

$$f \leq g \text{ given } B, \quad f \leq g \text{ given} \sim B$$

がともになりたつならば，

$$h_{00} \leq h_{10} \leq h_{11}$$

$$h_{00} \leq h_{01} \leq h_{11}$$

がなりたつ。したがって，

$$h_{00} \leq h_{11}$$

すなわち，

$$f \leq g$$

がなりたつ。このようにして，sure-thing principle がなりたつことがわかる。

なお，たとえば実際に起りうるBに対して $f<g$ given B，$f \leq g$ given $\sim B$ であれば，$h_{00}<h_{10}$，$h_{01}<h_{11}$，$h_{00} \leq h_{01}$，$h_{10} \leq h_{11}$ がなりたつことから，$h_{00}<h_{11}$ すなわち，$f<g$ をうる。

2つの行動 f，g をどのようにとっても，かならず「$f \leq g$ given B」がなりたつとすれば，B の要素である状態についての行動の結果は，決定のために役にはたたない。このようなBは事実上は起らないのと同様である。したがって，このようなBを零事象であるとよぶ。零事象について，つぎのような定理がなりたつ。

定理4

1. 空事象Oは，零事象である。
2. B が零事象である必要かつ十分な条件は，すべての f と g について，$f \doteq g$ given B がなりたつことである。
3. B が零事象であって，$B \supset C$ ならば，Cは零事象である。
4. $\sim B$が零事象であるならば，$f \leq g$ given B と $f \leq g$ は同等である。
5. $f \leq g$ given S と $f \leq g$ は同等である。
6. S が零事象ならば，すべての f，g について，$f \doteq g$ がなりたつ。

〔証明〕

1. 命題「$s \in O$ならば，$f(s) \leq g(s)$」は，前提$s \in O$が偽であるから，結論の如何にかかわらず真である。すなわち，上の命題は，行動 f，g をどのようにとっても成立する。このようにして，Oは零事象であることがわかる。

2. B が零事象であるならば，任意の f，g に対して，

$$f \leq g \ \text{given}\ B$$

である。このことは，f，g をどのようにとってもなりたつから

$$g \leq f \ \text{given}\ B$$

したがって，

$$f \doteq g \ \text{given}\ B$$

をうる。

つぎに，任意の f，g に対して，

$$f \doteq g \ \text{given}\ B$$

がなりたつならば，$f \doteq g$ given B の定義から

$$f \leq g \ \text{given}\ B \ \text{かつ}\ g \leq f \ \text{given}\ B$$

がなりたつ。したがって，任意の f，g に対して

$$f \leq g \ \text{given}\ B$$

がなりたつことから，B は零事象であることがわかる。

3．任意の2つの行動 f，g を考える。いま，f′ として，C においては f に一致し，$\sim C$ においては g に一致するものをつくる。B は零事象であるから，

$$f' \leq g \ \text{given}\ B$$

がなりたつ。いま，$C \subset B$ であるから，$\sim B \subset \sim C$ がなりたつ。したがって，$\sim B$ において，f′ は g と一致している。したがって，$f' \leq g$ given B から，

$$f' \leq g$$

がなりたつ。f′ のつくり方から，これは，

$$f \leq g \ \text{given}\ C$$

を意味する。このようにして，任意の f，g に対して，

$$f \leq g \ \text{given}\ C$$

がなりたつ。このようにして C は零事象であることがわかる。

4．いま，

$$f \leq g \ \text{given}\ B$$

がなりたつとする。$\sim B$ は零事象であるから，この f と g の間に

$$f \leq g \ \text{given}\ \sim B$$

がなりたつ。したがって，sure-thing principle から

$$f \leq g$$

をうる。

逆を証明するために，その対偶を証明する。すなわち，

$$f>g \text{ given } B$$

とする。$\sim B$は零事象であるから，

$$f\geqq g \text{ given } \sim B$$

がなりたつ。したがって，sure-thing principle から，

$$f>g$$

がなりたつ。このことから，$f\leqq g$ ならば，$f\leqq g$ given B がなりたつことがわかる。

5. 4における$\sim B$を空事象O，BをSとすれば，5がなりたつことがわかる。

6. Sが零事象であるから，すべての f，g に対して，

$$f\leqq g \text{ given } S$$

$$g\leqq f \text{ given } S$$

がなりたつ。したがって，5をもちいて，それぞれ，

$$f\leqq g$$

$$g\leqq f$$

をうる。したがって，

$$f\doteqdot g$$

をうる。

ある事象が零事象であるとは，事実上不可能な事象であるとも考えられるが，Sが零事象であるという場合には，S全体が事実上起らないと考えることは無理である。この場合，事実上起らないと考えるのではなくて，事象として，何が起っても，それによって行動の選好が影響されないと考えるのが適当である。今後このようなつまらない場合は考察の対象としない。

有限個の事象 B_i の集合が，

$$B_i\cap B_j=O(i\neq j) \text{ かつ， } \bigcup_i B_i=B$$

を満足するとき，Bの分割とよぶ。このとき，つぎの定理がなりたつ。

定理5 B_i をBの分割とする。すべてのiについて，

$$f\leqq g \text{ given } B_i$$

がなりたつならば，

$$f\leqq g \text{ given } B$$

がなりたつ。さらに，少なくとも1つのjについて，

$$f < g \text{ given } B_j$$

がなりたつならば，

$$f < g \text{ given } B$$

がなりたつ。

〔証明〕 分割の数をnとする。

$n=2$ の場合は前に述べた sure-thing principle であり，すでになりたつことを示した。

つぎに，$n-1$ までについてなりたつとする。

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i = B'$$

とかくならば，B_i $(i=1,2,\cdots,\ n-1)$ は B' の分割であり，

$$f \leq g \text{ given } B_i \ (i=1,2,\cdots\cdots,\ n-1)$$

であるから，

$$f \leq g \text{ given } B'$$

がなりたつ。一方，$B' \cup B_n = B$，$B' \cap B_n = O$ であるから，B'，B_n は B の分割であり，

$$f \leq g \text{ given } B',\ f \leq g \text{ given } B_n$$

であるから，

$$f \leq g \text{ given } B$$

をうる。したがって，任意の有限個の分割について，

$$f \leq g \text{ given } B_i \ (i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$$

ならば，

$$f \leq g \text{ given } B$$

をうる。

定理の後半については，$1 \leqq j \leqq n-1$ の場合には，$f < g$ given B' がなりたち，$j=n$ の場合には，$f < g$ given B_n となるから，結局前と同様に $n=2$ の場合に帰着でき，$f < g$ given B をうる。

系2　零事象の有限個の和集合は零事象である。

〔証明〕 $B_i (i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ を零事象とする。

$$B = \bigcup_i B_i$$

$$C_1=B_1$$
$$C_2=B_2-B_1=B_2\cap B_1^c$$
$$C_3=B_3\cap B_2^c\cap B_1^c$$
$$\vdots$$
$$C_n=B_n\cap B_{n-1}^c\cap\cdots\cdots\cap B_1^c$$

とすれば,

$$B=C_1\cup C_2\cup\cdots\cdots\cup C_n=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

となり，かつ

$$C_i\cap C_j=O\ (i\neq j)$$

である。すなわち，$C_i(i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ はBの分割である。かつ，$C_i\subset B_i$である。B_iが零事象であるから，定理4の3より C_i は零事象である。したがって，任意のf，gに対して，

$$\mathrm{f}\leq \mathrm{g}\ \text{given}\ C_i$$

となる。したがって，定理2より

$$\mathrm{f}\leq \mathrm{g}\ \text{given}\ B$$

をうる。f，gは任意の行動であるから，Bは零事象であることがわかる。

定理5において，$B=S$である場合は定理4の5によって，また，$\sim B$が零事象である場合は，定理4の4によって，結論は f≦g given B ではなくて，f≦g となる。また，f≐g given B_i $(i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ であるとき，f≐g given B となることは容易にわかる。

われわれは，行動の間の順序づけができるということを認めることから出発して，事象Bが起ったという条件のもとでの順序を考えるということを述べて来た。つぎに，行動の順序によって，結果の間に順序を導入する。そのために，constant な行動，すなわち，世界のすべての状態に対して，同じ結果をむすびつける行動を考える。このような行動は，状態に無関係に結果が定まるものといってもよいであろう。すなわち，constant な行動 f をすべてのsに対して

$$f(s)=g$$

あるいは,

$$\mathrm{f}\equiv g$$

と定義する。

f≡g，f′≡g' の2つの constant な行動に対して，行動としての順序がつけられるはずであるから，これを

$$f \leq f'$$

とすれば，結果 g，g' の間に，

$$g \leq g'$$

という選好順序があると定義する。

g≡g と f とについて，

$$f \leq g \text{ given } B, \quad g \leq f \text{ given } B$$

であれば，それぞれ

$$f \leq g \text{ given } B, \quad g \leq f \text{ given } B$$

とかく。その他，容易にわかる関係については，あらためて定義はしないでもちいる。

行動 f は，状態を定義域とし，結果を値域とする関数であるが，これをあらわすものとして $f(s)$ という記号はもちいない。$f(s)$ は状態 s に対する行動 f の結果であり，$f(s) \leq g(s)$ はこの結果に対する順序を意味するものとする。f≤g は行動に対する順序であって，この両者を区別してもちいる。

f≡g，f′≡g'，$g \leq g'$ であるとき，ある B に対して f>f′ given B となることがあると考えてよいかどうか。このことは，行動，結果の解釈に依存するものと考えられる。

たとえば，友達とピクニックに行く前に，水着か，テニスのラケットかのいずれかを買うものとする。もし，水着やラケットを手に入れることを結果と考えるならば，ピクニックにどこへ行くかという状態に関係なく，たとえば水着を買うという結果をとらなければならない。すなわち，これは constant な行動であり，水着を買うという結果 f とラケットを買うという結果 g を比較して，$f > g$ と考えて水着を買うわけである。ここでもし，ピクニックに行くところが海岸でないと知ったときには，この選好順序は逆になるであろう。すなわち，$f > g$ であっても，事象 B によっては f<g given B となりうると考えられる。しかしながら，この水着，あるいはラケットをもつことを結果と考えるのはあやまりであって，あくまでもこれは行動であると考えるべきである。この例の場合の結果とは，友達と泳いで楽しむとか，友達が泳いでいる間，砂浜でラケットをいじくりながら坐っているとかというようなものである。このように考えるならば，f≤g であって，かつ f>g given B ということはありえない。このような考えを公理としてあげる。

P3 $f \equiv g$, $f' \equiv g'$ かつ B が零事象でないとする。$f \leq f'$ given B がなりたつのは，$g \leq g'$ のときであって，またそのときにかぎる。

constant でない行動の場合には，全体での選好関係 $f \leq f'$ がなりたつからといって，全ての部分集合 B について，$f \leq f'$ given B がなりたつとはかぎらない。しかしながら，constant な行動の場合には，全体での選好関係と，部分集合の上での選好関係が一致することをこの公理は認めているわけである。

定理6 $B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ は B の分割であるとする。$s \in B_i\ (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ に対して $f(s)=f_i$, $g(s)=g_i$, かつ $f_i \leq g_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ とするならば，$f \leq g$ given B がなりたつ。さらに，ある j に対して，B_j は零事象でなく，$f_j < g_j$ がなりたつならば，$f < g$ given B がなりたつ。

〔証明〕 $f_i \leq g_i$ がなりたつことから，2つの constant な行動 $\mathrm{f}_i \equiv f_i$, $\mathrm{g}_i \equiv g_i$ の間には，

$$\mathrm{f}_i \leq \mathrm{g}_i \text{ および } \mathrm{f}_i \leq \mathrm{g}_i \text{ given } B_i$$

がなりたつ。ここで，$s \in B_i$ について f は f_i に，g は g_i に一致する。したがって，前に述べたことから，$\mathrm{f} \doteq \mathrm{f}_i$ given B, $\mathrm{g} \doteq \mathrm{g}_i$ given B であるから，

$$\mathrm{f} \leq \mathrm{g} \text{ given } B_i$$

がなりたつ。このことはすべての $B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ についてなりたつから，定理5によって，

$$\mathrm{f} \leq \mathrm{g} \text{ given } B$$

をうる。また，同様に定理5によって，ある B_j について，

$$\mathrm{f} < \mathrm{g} \text{ given } B_j$$

がなりたてば，

$$\mathrm{f} < \mathrm{g} \text{ given } B$$

をうる。