研究ノート

個　人　確　率　(3)

木村　等・広瀬文子

3.3　量的個人確率

前節においては，質的個人確率について論じたが，この節では，これに対応する量的個人確率を導入する。量的個人確率すなわち，確率測度とは，序に述べたように，事象すなわち S の部分集合に対して定義される実数値関数 $P(B)$ であり，

1.　$0 \leq P(B) \leq 1$

2.　$B \cap C = O$　ならば　$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

3.　$P(S) = 1$

を満足するものである。一般に，P は S の部分集合の族について定義されるものであるけれども，ここでは簡単のために S について定義された確率測度 P という表現をとる。

いま，S の部分集合の間に質的確率 $\leq$ が定義されており，かつ S について確率測度 P が定義されているとする。任意の部分集合 B，C に対して，$B \leq C$ のとき，またそのときにかぎり $P(B) \leq P(C)$ がなりたつならば，量的確率 P は質的確率 $\leq$ に一致するという。この場合，$P(B) < P(C)$ ならば $B < C$ がなりたつ。また，$P(B) = P(C)$ ならば $P(B) \leq P(C)$ かつ $P(B) \geq P(C)$ であるから，$B \leq C$ かつ $B \geq C$ すなわち，$B \doteq C$ がなりたつ。このようにして，量的確率の関係は質的確率の関係と全く一致する。

これに対して，任意の部分集合 B，C に対して，$B \leq C$ のとき，$P(B) \leq P(C)$ がなりたつという条件のみを満たすならば，量的確率 P は質的確率 $\leq$ とほとんど一致するという。P が $\leq$ と一致するときには，当然 $B \leq C$ のとき $P(B) \leq P(C)$ がなりたつから，P は $\leq$ とほとんど一致する。しかしながら，P が $\leq$ とほとんど一致するからといって，P と $\leq$ が一致するとはかぎらない。P と $\leq$ がほとんど一致する場合，$B \leq C$ ならば $P(B) \leq P(C)$ はなりたつけれども，その命題の裏すなわち，$C < B$ ならば $P(C) < P(B)$ がなりたつことは保証されていない。すなわち，$C < B$ であって $P(B) \leq P(C)$ がなりたつこともありうる。このとき，$C < B$ から当然 $C \leq B$ となり，$P(C) \leq P(B)$ がなりたち，$P(B) = P(C)$ をうる。す

なわち，$C<B$ であっても$P(B)=P(C)$ がなりたつことがありうるといいかえることができる。すなわち，P と$\leq$がほとんど一致するときには，量的確率が等しい2つの事象の間にも質的確率においては真の不等関係が成立することがありうることを示している。このようにして，量的確率の関係は，かならずしも質的確率の関係をあらわしてはいない。

質的確率に対応する量的確率を導入するためには，S を質的確率が同等な部分集合に n 分割できることをみとめて，その部分集合の量的確率を $1/n$ とするという方法がよくとられる。これは古典的確率が equally likely な場合の数の比によって確率を定義するのに似ている。Savage の場合は，質的確率とほとんど一致する量的確率という考え方をとることもあって，ほとんど一様な分割というものをみとめることによって，確率の数量化を行っている。

定義　ほとんど一様な n 分割：B の n 個の部分集合 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ がつぎの条件を満足するとき，ほとんど一様な n 分割という。すなわち，

（1）　$B_i \cap B_j=O \qquad (i \neq j)$

（2）　$\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i=B$

（3）　B_i の任意の $r+1$ 個の和集合は，任意の r 個の和集合より，より確からしい。すなわち，

$$\bigcup_{j=1}^{r} B_{i(j)} < \bigcup_{k=1}^{r+1} B_{i(k)}$$

を満足する。

定理1　任意の大きい自然数 n に対して，B のほとんど一様な n 分割が存在するならば，任意の自然数 m に対してほとんど一様な m 分割が存在する。

〔証明〕　任意の自然数 m に対して，$n \geq m^2$ なる n についてほとんど一様な n 分割が存在するとする。n と m の間に，つぎのような関係がなりたつ。すなわち，

$$n=ma+b \qquad a \geq m, \quad 0 \leq b<m$$

ただし，a，b は自然数である。いま B_i の a および $a+1$ 個の和集合によってC_jをつくる。たとえば，

$$C_1=\bigcup_{i=1}^{a} B_i, \quad C_2=\bigcup_{i=a+1}^{2a} B_i, \quad \cdots\cdots, \quad C_m=\bigcup_{i=n-a}^{n} B_i$$

のようにすればよい。そのとき，任意のB_iはいずれかの C_j の部分になっており，重複は

ゆるさないから，

$$C_i \cap C_j = O \quad (i \neq j), \quad \bigcup_{j=1}^{m} C_j = B$$

がなりたつ。すなわち，$C_j(j=1,2,\cdots,m)$ は B の m 分割である。いま，C_j の任意の r 個（$r<m$）の和集合に含まれる B_i の個数 u は，

$$ar \leq u \leq (a+1)r$$

を満足する。また，C_j の任意の $r+1$ 個の和集合に含まれる B_i の個数 v は，

$$a(r+1) \leq v \leq (a+1)(r+1)$$

を満足する。したがって，

$$u \leq (a+1)r = ar + r < ar + m \leq ar + a = a(r+1) \leq v$$

すなわち，

$$u < v$$

がなりたつ。B_i は，ほとんど一様な n 分割であるから，B_i の個数が1つでも多い方がより確からしいという関係がなりたつから，

$$\bigcup_{k=1}^{r} C_{j(k)} < \bigcup_{l=1}^{r+1} C_{j(l)}$$

がなりたつ。このようにして，大きい自然数 n に対してほとんど一様な n 分割が存在すれば，小さい自然数 m についてはほとんど一様な m 分割を構成することができる。よって，任意の自然数 m に対してほとんど一様な m 分割が存在する。

任意の n について，ほとんど一様な n 分割の存在をみとめるならば，後で示すように量的確率の存在を示すことができるわけであるが，Savage は直接，任意の n に対するこのような n 分割の存在をみとめないで，大きい数 n についてこのような分割が存在すれば，任意の数についての分割が存在するという命題をあげている。このことは，直接ほとんど一様な n 分割をみとめることは強すぎる仮定であると考えたものと思われる。

ここで，Savage のほとんど一様な分割という概念について考えてみる。いま，たとえば事象 A の起る確率を⅓とする。試行のくり返しにおいて，A の起ることを1，起らないことを0とかくことにすると，11は A が2回続いて起ることを意味し，101は最初 A が起り，2回目は起らず，3回目には起ったことを意味する。2回の試行について，すべての場合をあげれば，00，01，10，11となる。これに小数点をつけて，0.00，0.01，0.10，0.11とかくならば，2進法によって表示された数と考えることができる。つぎに，たとえ

ば0.10について考える。[0.10, 0.11) に含まれるすべての実数は，0.101100110…，0.101111111…等，小数の最初の2桁は10である。したがって，0.10は区間[0.10, 0.11)に対応するものである。そこで，00，01，10，11の確率は4/9，2/9，2/9，1/9であり，おのおの対応する区間の確率測度と考えてよいであろう。すなわち，

$$P([0.00,\ 0.01))=4/9$$
$$P([0.01,\ 0.10))=2/9$$
$$P([0.10,\ 0.11))=2/9$$
$$P([0.11,\ 1.00))=1/9$$

とする。試行回数をふやしたとき，たとえば，

$$P([0.100,\ 0.101))=4/27$$
$$P([0.101,\ 0.110))=2/27$$

であり，一方，区間の関係としては，

$$\begin{aligned}[0.100,\ 0.101)\cup[0.101,\ 0.110)&=[0.100,\ 0.110)\\&=[0.10,\ 0.11)\end{aligned}$$

となり，この2つの区間は共通部分をもたない。したがって，確率測度の関係として，

$$\begin{aligned}P([0.100,\ 0.101))+P([0.101,\ 0.110))&=4/27+2/27=2/9\\&=P([0.10,\ 0.11))\end{aligned}$$

がなりたつ。このようにして，1つの区間がいくつかの区間の和集合として分割されるときには，この区間の確率測度は分割された区間の確率測度の和に等しいことがわかる。このことからも，確率を上のように区間の確率測度と考えることは合理的である。

区間[0, 1)をできるだけ確率が等しくなるように4つの区間に分割することを考える。3回の試行の段階で考えれば，

$$\begin{aligned}P([0.000,\ 0.001))&=8/27\\P([0.001,\ 0.011))&=P([0.001,\ 0.010))+P([0.010,\ 0.011))\\&=4/27+4/27=8/27\\P([0.011,\ 0.101))&=P([0.011,\ 0.100))+P([0.100,\ 0.101))\\&=2/27+4/27=6/27\\P([0.101,\ 1.000))&=P([0.101,\ 0.110))+P([0.110,\ 0.111))\\&\quad+P([0.111,\ 1.000))\\&=2/27+2/27+1/27=5/27\end{aligned}$$

となる。4回の試行の段階で考えれば同様に，

$P([0.0000,\ 0.0010))=24/81$，$P([0.0010,\ 0.0101))=20/81$

$P([0.0101,\ 0.1001))=18/81$，$P([0.1001,\ 1.0000))=19/81$

となる。このように，試行の回数をふやすにしたがって，各区間の確率測度の差は小さくなり4等分に近づいていく。しかしながら，有限回の試行の段階たとえば，この場合4等分は不可能である。このようにして，有限の段階にとどまるかぎり，Savageのいうほとんど一様な分割のみが可能であることがわかる。

定理1において前提されている大きい自然数 n に対して，ほとんど一様な n 分割が存在するという考え方については，つぎのような考え方も可能であろう。すなわち，S を分割するために，まず，C という事象を考える。この C と同等か，あるいは C に近い事象 B_i を選んでいく。偶然，$S=\bigcup_1^n B_i$ となることもあろうが，一般には $S-\bigcup_1^n B_i=E$ なる E が C より小さいものとして残るであろう。このとき，E を C にとって前の操作をくり返すならば，そのうちに E にあたる残差の事象は無視できる程となり，S のほとんど一様な分割に到達すると考える。このように考えるならば大きい自然数 n に対する n 分割を最初に考えることは自然であろう。

質的確率 $\leq$ の関係を混乱のないかぎり，表現を簡単にするために大小関係とよぶことにする。

補助定理1　2つのほとんど一様な n 分割があるとき，一方の r 個の和集合よりも他方の $r+2$ 個の和集合の方が大きい。

〔証明〕 いま，S のほとんど一様な2つの n 分割を B_i，C_i $(i=1,2,\cdots,n)$ とする。一般性を失うことなく，

$$B_1\leq B_2\leq\cdots\cdots\leq B_n$$

$$C_1\geq C_2\geq\cdots\cdots\geq C_n$$

がなりたつとする。B_i，C_i がほとんど一様な n 分割であることから，

$$\bigcup_1^r C_i < \bigcup_{n-r}^n C_i$$

$$\bigcup_{n-r}^n B_i < \bigcup_1^{r+2} B_i$$

がなりたつ。一方，定理13より[1]，

$$\bigcup_{n-r}^{n} C_i \leqq \bigcup_{n-r}^{n} B_i$$

がなりたつから，

$$\bigcup_{1}^{r} C_i < \bigcup_{n-r}^{n} C_i \leqq \bigcup_{n-r}^{n} B_i < \bigcup_{1}^{r+2} B_i$$

をうる。このことは C_i の最大の r 個の和集合よりも B_i の最小の $r+2$ 個の和集合の方が大きいことを意味する。したがって，C_i の任意の r 個の和集合よりも B_i の任意の $r+2$ 個の和集合の方が大きい。

このようにして，2つのほとんど一様な n 分割の間の関係がつけられる。

定義　$C(r, n)$ ：ほとんど一様な n 分割 B_i の r 個の和集合を $C(r, n)$ とかく。

定義　$k(B, n)$ ：$C(r, n) \leqq B$ を満足する r の最大値を $k(B, n)$ とかく。すなわち，$k) B, n) = \max\{r \mid C(r, n) \leqq B\}$。

これらの定義は直観的な表現をもちいれば，n 分割の B_i を B の中に何個おしこめうるかということが問題であり，B_i の大きさによって B におしこめうる個数は異なるであろうから，その最大値をとるのである。たとえば，$B_1 \leqq B_2 \leqq \cdots\cdots \leqq B_n$ という関係があるとすれば

$$C(r, n) = \bigcup_{1}^{r} B_i \leqq B$$

と，とったものが r の最大値を示すことになるであろう。

補助定理2　$B \cap C = O$ ならば，

$$k(B, n) + k(C, n) - 2 \leqq k(B \cup C, n) \leqq k(B, n) + k(C, n) + 1$$

がなりたつ。

〔証明〕 $k(1) = k(B, n)$，$k(2) = k(C, n)$ とする。$B_1 \leqq B_2 \cdots\cdots \leqq B_n$ がなりたつとすれば，

$$C(k(1), n) = \bigcup_{1}^{k(1)} B_i \leqq B$$

（1）　木村等・広瀬文子「個人確率（2）」『香川大学経済論叢』第45巻第3号，1972，118ページ。

$$C(k(2),\ n)=\bigcup_{1}^{k(2)}B_i\leq C$$

がなりたつであろうが，$\bigcup_{k(1)+1}^{k(1)+k(2)}B_i\geq\bigcup_{1}^{k(2)}B_i$となるから，

$$\bigcup_{1}^{k(1)+k(2)}B_i\leq B\cup C$$

はなりたたない場合がある。この場合も，B_iの任意の$k(1)-1$個の和集合は上の特定の$k(1)$個の和集合より必ず小さいから，

$$\bigcup_{j=1}^{k(1)-1}B_{i(j)}<\bigcup_{i=1}^{k(1)}B_i\leq B$$

同様にして，

$$\bigcup_{k=1}^{k(2)-1}B_{i(k)}<\bigcup_{i=1}^{k(2)}B_i\leq C$$

がなりたつ。ここで，$B\cap C=O$であるから定理10の系[2]によって，

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{k(1)-1}B_{i(j)}\Big)\cup\Big(\bigcup_{k=1}^{k(2)-1}B_{i(k)}\Big)\leq B\cup C$$

がなりたつ。$B_{i(j)}$，$B_{i(k)}$のとり方は任意であるから，$(\bigcup_{j=1}^{k(1)-1}B_j)\cup(\bigcup_{k=0}^{k(2)-2}B_{n-k})$ととることができる。したがって，$B\cup C=S$となるとき，$k(1)-1=n-k(2)+2-1$となって，上式の左辺は$\bigcup_{1}^{n}B_i$となり，$k(1)+k(2)-2=n$がなりたつ。$B\cup C\subset S$の場合は$k(1)+k(2)-2<n$となって，$C(k(1)+k(2)-2,\ n)$を実際につくることができる。$k(B\cup C,\ n)$はこのような$k(1)+k(2)-2$の最大値であるから，

$$k(1)+k(2)-2\leq k(B\cup C,\ n)$$

すなわち，

$$k(B,\ n)+k(C,\ n)-2\leq k(B\cup C,\ n)$$

がなりたつ。

つぎに，

$$C(k(1),\ n)\leq B,\qquad C(k(2),\ n)\leq C$$

(2) Ibid.，113ページ。

がなりたつとき，

$$(B-C(k(1),\ n))\cup(C-C(k(2),\ n))$$

に何個のB_iをおしこめうるかを考える。いま，条件から，

$$B-C(k(1),\ n)<B_i \qquad (k(1)<i\leq n)$$

$$C-C(k(2),\ n)<B_j \qquad (k(2)<j\leq n)$$

がなりたつ。もし，あるi，jがあって，

$$B_i\cup B_j\leq(B-C(k(1),\ n))\cup(C-C(k(2),\ n))$$

がなりたつとすれば，$B_i\cap B_j=O$であるから，定理11(3)によって，

$$B_i\leq B-C(k(1),\ n) \text{ または } B_j\leq C-C(k(2),\ n)$$

がなりたつことになる。しかしながら，これがなりたたないことは上に述べたとおりであるから，このようなB_i，B_jは存在しないことがわかる。すなわち，数の関係によって表現すれば，

$$k(B\cup C,\ n)<k(1)+k(2)+2$$

すなわち，

$$k(B\cup C,\ n)\leq k(B,\ n)+k(C,\ n)+1$$

がなりたつ。

補助定理 3　ほとんど一様なm分割とn分割について，ある$C(r,\ m)$と$C(s,\ n)$の間に，

$$C(r,\ m)\leq C(s,\ n)$$

がなりたつならば，

$$\frac{r-2}{m}<\frac{s+2}{n}+\frac{1}{mn}$$

がなりたつ。

〔証明〕　いま，別にほとんど一様なmn分割をつくる。これを，

$$D_1\leq D_2\leq\cdots\cdots\leq D_{mn}$$

とする。

$$D'_1=\bigcup_{1}^{n}D_i,\ D'_2=\bigcup_{n+1}^{2n}D_i,\ \cdots\cdots,\ D'_m=\bigcup_{mn-n+1}^{mn}D_i$$

とすると，

（3） Ibid., 114ページ。

$$D'_1 \leq D'_2 \leq \cdots\cdots \leq D'_m$$

は，定理1の証明において示したように，1つのほとんど一様な m 分割である。したがって，補助定理1から，

$$\bigcup_{j=1}^{r-2} D'_{i(j)} < C(r, m)$$

がなりたつ。つぎに，

$$D''_1 = \bigcup_{1}^{m} D_i,\ D''_2 = \bigcup_{m+1}^{2m} D_i,\ \cdots\cdots,\ D''_n = \bigcup_{mn-m+1}^{mn} D_i$$

とすれば，これはほとんど一様な n 分割である。したがって上と同様に補助定理1から，

$$C(s, n) < \bigcup_{k=1}^{s+2} D''_{i(k)}$$

したがって，定理の条件をもちいて，

$$\bigcup_{j=1}^{r-2} D'_{i(j)} < \bigcup_{k=1}^{s+2} D''_{i(k)}$$

がなりたつ。このことから，mn 分割の $n(r-2)$ 個の和集合と $m(s+2)$ 個の和集合の間に $\leq$ の関係がなりたっていることがわかる。

一方，ほとんど一様な分割については，

$$\bigcup_{j=1}^{r} D_{i(j)} < \bigcup_{k=1}^{r+1} D_{i(k)}$$

がなりたつ。すなわち，$t<s$ ならば，

$$\bigcup_{j=1}^{t} D_{i(j)} < \bigcup_{k=1}^{s} D_{i(k)}$$

がなりたつ。したがって，対偶命題として，

$$\bigcup_{j=1}^{t} D_{i(j)} \geq \bigcup_{k=1}^{s} D_{i(k)} \quad \text{ならば} \quad t \geq s$$

がなりたつ。いま，

$$\bigcup_{j=1}^{n(r-2)} D_{i(j)} \leq \bigcup_{k=1}^{m(s+2)} D_{i(k)}$$

がなりたっているから，

$$n(r-2) \leq m(s+2)$$

がなりたつ。したがって，

$$n(r-2)<m(s+2)+1$$

をうる。両辺を mn でわれば，

$$\frac{r-2}{m}<\frac{s+2}{n}+\frac{1}{mn}$$

をうる。

補助定理 4　$\left|\frac{k(B,\ m)}{m}-\frac{k(B,\ n)}{n}\right|<\frac{3}{m}+\frac{3}{n}+\frac{1}{mn}$

〔証明〕 いま，S のほとんど一様な m 分割および n 分割に対して，$k_1=k(B,\ m)$，$k_2=k(B,\ n)$ とするならば，ある $C(k_1,\ m)$，$C\ (k_2,\ n)$ が存在して，

$$C(k_1,\ m)\leq B,\ C(k_2,\ n)\leq B$$

がなりたつ。このとき，

$$B<C(k_2+1,\ n)$$

がなりたつから，

$$C(k_1,\ m)\leq B<C(k_2+1,\ n)$$

がなりたつ。したがって補助定理 3 から，

$$\frac{k_1-2}{m}\leq\frac{k_2+3}{n}+\frac{1}{mn}$$

がなりたつ。これを整理して，

$$\frac{k_1}{m}-\frac{k_2}{n}\leq\frac{2}{m}+\frac{3}{n}+\frac{1}{mn}<\frac{3}{m}+\frac{3}{n}+\frac{1}{mn}$$

をうる。同様にして，

$$C(k_2,\ n)<C(k_1+1,\ m)$$

がなりたつことから，

$$\frac{k_2-2}{n}\leq\frac{k_1+3}{m}+\frac{1}{mn}$$

$$\frac{k_2}{n}-\frac{k_1}{m}\leq\frac{2}{n}+\frac{3}{m}+\frac{1}{mn}<\frac{3}{m}+\frac{3}{n}+\frac{1}{mn}$$

をうる。したがって，

$$\left|\frac{k(B,\ m)}{m}-\frac{k(B,\ n)}{n}\right|<\frac{3}{m}+\frac{3}{n}+\frac{1}{mn}$$

をうる。したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$N(\varepsilon)$ が存在して $m,\ n>N$ にとるかぎり，

$$\left|\frac{k(B,\ m)}{m}-\frac{k(B,\ n)}{n}\right|<\varepsilon$$

がなりたつ。

定理2　任意の大きい n について，S のほとんど一様な n 分割が存在するならば，$\leq$ にほとんど一致する確率測度 P が唯1つ存在する。なおそのうえに，任意の ρ ($0\leq\rho\leq1$) と任意の $B\subset S$ に対して，$P(C)=\rho P(B)$ を満足する C が存在する。

〔証明〕 この定理の条件から，定理1をもちいて，任意の自然数 n に対して S のほとんど一様な n 分割が存在することがわかる。この n 分割によって B に対して定義された $\frac{k(B,\ n)}{n}$ の列が基本列であるということが補助定理4に示されている。したがって，$\left\{\frac{k(B,\ n)}{n}\right\}$ は極限値をもつ。すなわち，

$$P(B)=\lim_{n\to\infty}\frac{k(B,\ n)}{n}$$

が存在する。

① まず，この $P(B)$ が確率測度であることを証明する。

1. この P は，任意の B に対して定義から，$k(B,\ n)\geq 0$ がなりたつ。したがって，$\frac{k(B,\ n)}{n}$ の極限値 $P(B)$ に対して，$P(B)\geq 0$ がなりたつ。

2. $B\cap C=O$ ならば，補助定理2によって，

$$k(B,\ n)+k(C,\ n)-2\leq k(B\cup C,\ n)\leq k(B,\ n)+k(C,\ n)+1$$

がなりたつ。したがって，

$$\frac{k(B,\ n)}{n}+\frac{k(C,\ n)}{n}-\frac{2}{n}\leq\frac{k(B\cup C,\ n)}{n}\leq\frac{k(B,\ n)}{n}+\frac{k(C,\ n)}{n}+\frac{1}{n}$$

がなりたつ。それぞれの極限値をとれば，

$$\lim\left\{\frac{k(B,\ n)}{n}+\frac{k(C,\ n)}{n}-\frac{2}{n}\right\}\leq\ \lim\frac{k(B\cup C,\ n)}{n}$$
$$\leq\ \lim\left\{\frac{k(B,\ n)}{n}+\frac{k(C,\ n)}{n}+\frac{1}{n}\right\}$$

すなわち，

$$P(B)+P(C)\leq P(B\cup C)\leq P(B)+P(C)$$

すなわち，

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)$$

をうる。

3．Sの任意のn分割に対して，$k(S, n)=n$であるから，

$$P(S)=\lim\frac{k(S, n)}{n}=\lim\frac{n}{n}=1$$

② つぎに，この$P(B)$は，$\leq$とほとんど一致することを証明する。このことを証明するために$B\leq C$がなりたつとする。いま，$k_1=k(B, n)$ とすれば，

$$C(k_1, n)\leq B\leq C$$

がなりたつ。したがって，

$$k_1\leq k(C, n)$$

すなわち，

$$k(B, n)\leq k(C, n)$$

がなりたつ。したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k(B, n)}{n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{k(C, n)}{n}$$

すなわち，

$$P(B)\leq P(C)$$

をうる。このようにして，Pは$\leq$とほとんど一致することがわかる。

③ つぎに，$\leq$にほとんど一致するPは唯1つしかないことを証明する。このために，$P(B)$ が定義される集合Bについて，$P(B)$ は1つの実数に限ることを示す。いま，Pが$\leq$とほとんど一致するとする。$B_1\leq B_2\leq\cdots\leq B_n$をほとんど一様な$n$分割とすれば，$P(B_1)=p_1$，$P(B_2)=p_2$，　，$P(B_n)=p_n$の間に，

$$p_1\leq p_2\leq\cdots\cdots\leq p_n,\quad \sum_{i=1}^{n}p_i=1$$

がなりたつ。このとき，

$$\sum_{1}^{r}p_i\leq\frac{r}{n}\qquad(r=1,2,\cdots\cdots, n)$$

がなりたつ。なぜなら，もしあるrについて，

$$\sum_{1}^{r}p_i>\frac{r}{n}$$

がなりたつとすれば，

$$\frac{r}{n} < \sum_1^r p_i \leq r \max_{1\leq i\leq r} p_i = rp_r$$

$$\frac{1}{n} < p_r \leq p_{r+1} \leq \cdots\cdots \leq p_n$$

がなりたつ。したがって，

$$1 = \sum_1^n p_i = \sum_1^r p_i + \sum_{r+1}^n p_i$$

$$> \frac{r}{n} + (n-r) \min_{r+1\leq i\leq n} p_i$$

$$> \frac{r}{n} + (n-r)\frac{1}{n} = \frac{r}{n} + \frac{n}{n} - \frac{r}{n} = 1$$

となって不合理である。したがって，

$$\sum_1^r p_i \leq \frac{r}{n} \qquad (r=1,2,\cdots\cdots,\ n)$$

がなりたつ。B_i は，ほとんど一様な n 分割であるから B_i の 任意の r 個の和集合よりも $r+1$ 個の和集合の方が大きい。すなわち，

$$\bigcup_1^{r+1} B_i > \bigcup_{n-r+1}^n B_i$$

がなりたつ。P は$\leq$にほとんど一致するから，

$$P(\bigcup_1^{r+1} B_i) \geq P\ (\bigcup_{n-r+1}^n B_i)$$

さらに，$B_i \cap B_j = O$ であるから，

$$\sum_1^{r+1} P(B_i) \geq \sum_{n-r+1}^n P(B_i)$$

すなわち，

$$\sum_1^{r+1} p_i \geq \sum_{n-r+1}^n p_i$$

がなりたつ。

$$\sum_{n-r+2}^n p_i = \sum_1^n p_i - \sum_1^{n-r+1} p_i$$

$$= 1 - \sum_{1}^{n-r+1} p_i$$

$$\geq 1 - \frac{n-r+1}{n} = \frac{r-1}{n}$$

したがって，

$$\sum_{1}^{r} p_i \geq \sum_{n-r+2}^{n} p_i \geq \frac{r-1}{n}$$

さらに，

$$\sum_{n-r+1}^{n} p_i \leq \sum_{1}^{r+1} p_i \leq \frac{r+1}{n}$$

をうる。$\sum_{1}^{r} p_i$，$\sum_{n-r+1}^{n} p_i$は，それぞれ p_i の r 個の和のうちの最小および最大のものである。

したがって，p_i の r 個の和は常に$\frac{r-1}{n}$と$\frac{r+1}{n}$の間にある。すなわち，

$$\frac{r-1}{n} \leq P(C(r,\ n)) \leq \frac{r+1}{n}$$

がなりたつ。

いま，$k_1=k(B,\ n)$ とすれば，ある$C(k_1,\ n)$ が存在し，また任意の$C(k_1+1,\ n)$ に対して，

$$C(k_1,\ n) \leq B < C(k_1+1,\ n)$$

がなりたつ。この関係は質的確率≦から得られるものであり，k_1 という数は質的確率≦と n によって定まるものである。これを量的確率 P の関係にうつせば，

$$P(C(k_1,\ n)) \leq P(B) \leq P(C(k_1+1,\ n))$$

をうる。これから，上で得られた関係によって，

$$\frac{k_1-1}{n} \leq P(B) \leq \frac{k_1+2}{n}$$

をうる。n を大きくしていけば区間$\left[\frac{k_1-1}{n},\ \frac{k_1+2}{n}\right]$は１つの実数に収束し，これが$P(B)$ の値と一致する。したがって，B に対して定義される量的確率 $P(B)$ は，この唯１つに定まる実数であって他の値はとりえない。このようにして，≦とほとんど一致する量的確率

は唯1つしかないことがわかる。

④　定理の後半を証明するために，集合の列 C_n，D_n をつぎのように構成する。すなわち，

（1）　$n=1$ のとき，ほとんど一様な B の2分割を B_1，B_2 とし，

$$P(B_1)<\rho P(B)\ \text{ならば，}\ C_1=B_1,\ D_1=O$$

$$P(B_1)\geq\rho P(B)\ \text{ならば，}\ C_1=O,\ D_1=B_2$$

とすると，

$$C_1\cap D_1=O$$

$$P(C_1)\leq\rho P(B)$$

$$P(D_1)=P(B_2)\leq(1-\rho)P(B)$$

がなりたつ。

（2）　n までの自然数について

1. $C_1\subset C_2\subset\cdots\cdots\subset C_n$
2. $D_1\subset D_2\subset\cdots\cdots\subset D_n$
3. $C_i\cap D_i=O\qquad(i=1,2,\cdots,n)$
4. $P(C_i)\leq\rho P(B),\ P(D_i)\leq(1-\rho)P(B)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$

を満足するような C_n，D_n が構成されたとする。

$$G_n=B\cap\sim(C_n\cup D_n)=B\cap\sim C_n\cap\sim D_n$$

とすると，

$$C_n\cup G_n\cup D_n=B$$

$$C_n\cap G_n=D_n\cap G_n=O$$

がなりたつことは容易にわかる。

いま，B の $2(n+1)$ 分割を $B_i(i=1,2,\cdots\cdots,\ 2(n+1))$ とする。$I=\{i\mid B_i\cap G_n\neq O\}$ とし，$i\in I$ に対する $B_i\cap G_n$ を番号をつけかえて，B'_1，B'_2，$\cdots\cdots$，B'_r とかく。

$$P(C_n)\leq\rho P(B)$$

$$P(D_n)\leq(1-\rho)P(B)$$

$$P(C_n\cup G_n)=P(B-D_n)>\rho P(B)$$

がなりたつことから，$1\leq s\leq r$ なる s が存在して，

$$P(C_n\cup(\bigcup_1^{s-1}B'_i))\leq\rho P(B)<P(C_n\cup(\bigcup_1^{s}B'_i))\ \text{を}$$

満足する。($s=1$ のとき，$\bigcup_1^{s-1} B'_i=O$ である。）このことから，

$$C_{n+1}=C_n\cup(\bigcup_1^{s-1} B'_i)$$

$$D_{n+1}=D_n\cup(\bigcup_{s+1}^{r} B'_i)$$

とすると，

$$C_{n+1}\cap D_{n+1}=(C_n\cup(\bigcup_1^{s-1} B'_i))\cap(D_n\cup(\bigcup_{s+1}^{r} B'_i))$$

$$=(C_n\cap D_n)\cup(C_n\cap(\bigcup_{s+1}^{r} B'_i))\cup(\bigcup_1^{s-1} B'_i\cap D_n)\cup(\bigcup_1^{s-1} B'_i\cap(\bigcup_{s+1}^{r} B'_i))$$

ここで，$B'_i\subset G_n$ であるから，$B'_i\cap C_n=B'_i\cap D_n=O$ $(i=1,2,\cdots,r)$ となり，B_i は分割であるから，$B'_i\cap B'_j\subset B_i\cap B_j=O$ $(i\neq j)$ となる。よって，

$$C_{n+1}\cap D_{n+1}=O$$

をうる。C_{n+1}，D_{n+1} のつくり方から，

$$P(C_{n+1})\leq \rho P(B)$$

$$P(D_{n+1})=P(B-(C_{n+1}\cup B'_s))$$

$$=P(B)-P(C_{n+1}\cup B'_s)$$

$$=P(B)-P(C_n\cup(\bigcup_1^{s} B'_i))$$

$$<P(B)-\rho P(B)=(1-\rho)P(B)$$

ここで，$G_{n+1}=B'_s$ とすれば，

$$C_{n+1}\cup G_{n+1}\cup D_{n+1}=B$$

$$C_{n+1}\cap D_{n+1}=C_{n+1}\cap G_{n+1}=G_{n+1}\cap D_{n+1}=O$$

がなりたつから，

$$P(C_{n+1})+P(G_{n+1})+P(D_{n+1})=P(B)$$

$$P(C_{n+1})+P(G_{n+1})=P(B)-P(D_{n+1})$$

$$\geq P(B)-(1-\rho)P(B)$$

$$=\rho P(B)$$

$$P(C_{n+1})\geq \rho P(B)-P(G_{n+1})$$

$$G_{n+1}=B'_s \leq B_i = C(1, 2(n+1))$$

であるから，

$$P(G_{n+1}) \leq P(C(1,2(n+1))) \leq \frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

がなりたつ。したがって，

$$P(C_{n+1}) \geq \rho P(B) - \frac{1}{n+1}$$

をうる。同様にして，

$$P(D_{n+1}) \geq (1-\rho) P(B) - \frac{1}{n+1}$$

をうる。したがって，(1)，(2)より，任意の自然数 n に対して，

1. $C_1 \subset C_2 \subset \cdots\cdots \subset C_n \subset \cdots\cdots$
2. $D_1 \subset D_2 \subset \cdots\cdots \subset D_n \subset \cdots\cdots$
3. $C_n \cap D_n = O \qquad (n=1, 2, \cdots)$
4. $\rho P(B) - \frac{1}{n} \leq P(C_n) \leq \rho P(B)$

   $(1-\rho) P(B) - \frac{1}{n} \leq P(D_n) \leq (1-\rho) P(B)$

を満足する C_n，D_n が存在する。

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \qquad D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

とすれば，

$$\bigcup_{n=1}^{N} C_n = C_N \subset C, \qquad \bigcup_{n=1}^{N} D_n = D_N \subset D$$

$$\rho P(B) - \frac{1}{N} \leq P(C_N) \leq P(C)$$

が任意の N についてなりたつことから，

$$\rho P(B) \leq P(C)$$

をうる。同様にして，

$$(1-\rho) P(B) \leq P(D)$$

をうる。また，

$$C \cup D \subset B, \ C \cap D = O$$

がなりたつことから，

$$P(C)+P(D) \leq P(B)$$

がなりたつ。したがって，

$$P(C) \leq P(B)-P(D)$$

したがって，

$$\rho P(B) \leq P(C) \leq P(B)-(1-\rho)P(B)=\rho P(B)$$

したがって，

$$P(C)=\rho P(B)$$

をうる。これによって，定理の後半が証明された。

上の定理２においては，質的確率がほとんど一様な n 分割が存在するという性質をもつとき，この質的確率にほとんど一致する確率測度を定義することができることを示した。ここで，ほとんど一様な n 分割可能という性質について考えてみる。本質を失うことはないので，簡単のために量的表現をもちいる。いま，もし１点 x が正の確率 q をもつならば，この x をふくむ分割 B_i の確率は常に q より大きくなる。n が十分大きいとき，この B_i は他の B_j のいくつかの和より大きいということがおこり，分割はほとんど一様という性質をもちえない。このように，ほとんど一様な分割が可能であるということは，このようなことが起らないこと，すなわち，S はいくらでも小さな事象に分割できることであり，ある意味での連続性を意味すると考えられる。上の定理２は，このことをもちいて質的確率にほとんど一致する確率を導入したのである。

つぎに，いくらでも小さい事象が存在するということについての別の表現を考える。すなわち，任意の $B>O$ に対して，S の分割 B_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が存在して，

$$B_i < B \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

がなりたつとき，またこのときにかぎって，質的確率 $\leq$ は fine であるという。すなわち，任意の事象 B によっておさえられる分割が存在することを仮定するのである。fine である質的確率に対して，これにほとんど一致する確率測度が定義できることを示すのであるが，その前に必要な概念を定義しておく。

定義　$B \fallingdotseq C$ ：２つの集合 B，C に対して，任意の集合 G，H が $G>O$，$H>O$ かつ，$B \cap G = C \cap H = O$ を満足するならば，$B \cup G > C$ かつ，$C \cup H > B$ がなりたつとき，B と C は almost equivalent であるといい，$B \fallingdotseq C$ とかく。

上の定義から，$B \doteq C$ すなわち，B と C が equivalent であるならば，B と C は almost equivalent であることが導かれる。なぜならば，$B \doteq C$ ならば，$B \lesssim C$ がなりたつ。$O < H$ かつ $C \cap H = O$ ならば，定理10によって[4]，$B \lesssim C \cup H$ がなりたつ。また同様にして，$C \lesssim B$ がなりたつことから，$O < G$ かつ $G \cap B = O$ ならば，$C \lesssim B \cup G$ がなりたつ。このようにして，$B \risingdotseq C$ がなりたつことがわかる。しかしながら，この逆は，かならずしもなりたたない。すなわち，almost equivalent であるからといって，equivalent であるとはかぎらない。一方，$B \risingdotseq C$ ということは，いくら小さいものであっても O でないものを C に加えれば B の方が小さく，B に加えれば C の方が小さくなるということであるから，数でいえば $B = C$ となるものである。すなわち，$B \risingdotseq C$ と $B \doteq C$ の関連は質的確率 $\lesssim$ が数の大小関係とどの程度一致するかを示すものである。

定義　tight：almost equivalent な2つの事象はかならず equivalent であるということがなりたつとき，このような質的確率 $\lesssim$ を tight であるという。

定理3　質的確率 $\lesssim$ が fine であるとするならば，つぎの7つの命題がなりたつ。

1.　$B > O$，$C > O$ に対して，$O < D < B$ を満足するような $D \subset C$ が存在する。

2.　$B \risingdotseq G$，$C \risingdotseq H$ かつ，$B \cap C = G \cap H = O$ ならば，$B \cup C \risingdotseq G \cup H$。

3.　$B \risingdotseq C$，$G \risingdotseq H$，$B \cup C \risingdotseq G \cup H$ かつ，$B \cap C = G \cap H = O$ ならば，$B \risingdotseq G$。

4.　S の almost equivalent な部分集合への分割は，ほとんど一様な分割である。

5.　任意の事象は，2つの almost equivalent な事象に分割できる。

6.　任意の事象は，任意の自然数 n に対して，2^n 個の almost equivalent な事象に分割できる。

7.　$\lesssim$ にほとんど一致する確率測度 P が唯1つ存在する。また，任意の事象 B と任意の実数 ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) に対して，$P(C) = \rho P(B)$ となるような $C \subset B$ が存在する。もし，$B > O$ ならば $P(B) > 0$ がなりたつ。さらに，$B \risingdotseq C$ であるための必要かつ十分な条件は，$P(B) = P(C)$ となることである。

〔証明〕

1.　$B > O$，かつ $\lesssim$ が fine であることから，S のある n 分割 B_i ($i = 1, 2, \cdots\cdots, n$) が存在して，

$$B_i < B \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

---

(4)　Ibid., 112ページ。

がなりたつ。いま，すべての i について，

$$B_i \cap C \leq O$$

であるとするならば，定理10によって，

$$O \geq \bigcup_{i=1}^{n}(B_i \cap C)=(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \cap C=S \cap C=C$$

となり，$C>O$ の仮定に反する。したがって，ある j が存在して，

$$B_j \cap C>O$$

がなりたつ。$D=B_j \cap C$ とすれば，Dは$D \subset C$，$D \subset B_j$ を満足するから，

$$O<D \leq B_j<B$$

を満足する。

2. (*a*) $B \cup C<S$ の場合：$\sim(B \cup C)>O$ であるから，$(B \cup C) \cap E=O$，$E>O$ を満足するような E が存在する。このような任意のEを考える。

$$(B \cup C) \cap E=(B \cap E) \cup (C \cap E)=O$$

がなりたつことから，

$$B \cap E=O \quad \text{かつ} \quad C \cap E=O$$

がなりたつ。$E>O$ がなりたつことから，E の 2 分割すなわち，

$$E_1 \cap E_2=O,\ E_1>O,\ E_2>O,\ E_1 \cup E_2=E$$

を満足する E_1，E_2 が存在する。$B \cap E_1=O$，$B \Leftrightarrow G$であるから，

$$B \cup E_1>G$$

同様に，$C \cap E_2=O$，$C \Leftrightarrow H$であるから，

$$C \cup E_2>H$$

がなりたつ。

$$(B \cup E_1) \cap (C \cup E_2)=(B \cap C) \cup (B \cap E_2) \cup (E_1 \cap C) \cup (E_1 \cap E_2)=O$$

がなりたつことから，

$$\begin{aligned} G \cup H &< (B \cup E_1) \cup (C \cup E_2) \\ &=(B \cup C) \cup (E_1 \cup E_2) \\ &=(B \cup C) \cup E \end{aligned}$$

をうる。一方，$(B \cup C) \cup E \leq S$ を満足することから，$G \cup H<S$ がなりたつ。したがって，上と同様にして，$(G \cup H) \cap F=O$，$F>O$を満足するような F に対して，

$$B\cup C<(G\cup H)\cup F$$

がなりたつ。したがって，

$$B\cup C\simeq G\cup H$$

がなりたつ。

(b) $B\cup C\doteq S$の 場合 ： もし，$G\cup H<S$ であるとするならば，$(G\cup H)\cap E=O$，$E>O$ となるような E が存在する。この E の2分割を$E_1>O$，$E_2>O$ とする。E_1，E_2 は当然 G，H とは互いに素である。したがって，

$$B<G\cup E_1,\ C<H\cup E_2$$

をうる。

$$(G\cup E_1)\cap(H\cup E_2)=(G\cap H)\cup(G\cap E_2)\cup(E_1\cap H)\cup(E_1\cap E_2)=O$$

であるから，

$$\begin{aligned}B\cup C&<(G\cup E_1)\cup(H\cup E_2)\\&=(G\cup H)\cup E\leq S\doteq B\cup C\end{aligned}$$

がなりたち，矛盾が生じる。したがって，$G\cup H\geq S$ すなわち，$G\cup H\doteq S\doteq B\cup C$ がなりたつ。このようにして，この場合，$B\cup C$ と $G\cup H$ は equivalent である。したがって，当然 almost equivalent である。

よって，(a) の場合も，(b) の場合もともに定理の命題2がなりたつことがわかる。

3. この命題を帰謬法によって証明する。いま，$B\simeq G$ でないとすれば，一般性を失うことなく，$E>O$，$B\cap E=O$，$B\cup E\leq G$ となるような E が存在すると仮定することができる。$B\cup C<S$ となる場合と，$B\cup C\doteq S$ となる場合にわけて考える。

(a) $B\cup C<S$ の場合 ： この場合，$\sim(B\cup C)>O$ がなりたつから，$E>O$ に対して，$E>E'>O$，$\sim(B\cup C)\supset E'$ となるような E'が存在する。$(B\cup C)\cap E'=O$ であるから，$B\cup C\simeq G\cup H$ がなりたつことをもちいて，

$$(B\cup C)\cup E'>G\cup H$$

がなりたつ。これは，

$$(B\cup E')\cup C>G\cup H$$

と考えてよいから，定理11の系1[5]によって，

$$B\cup E'>G \quad または \quad C>H$$

---

(5) Ibid., 115ページ。

をうる。一方，

$$G \geq B \cup E > B \cup E', \quad G \cap H = O$$

がなりたつことは仮定されているから，$B \cup E' > G$ は成立せず，

$$C > H$$

がなりたつ。

いま，$G \cap \sim C \leq O$ がなりたつとすれば，定理9の系2より[6]，$G \leq C$ がなりたつ。したがって，

$$B \cup E \leq G \leq C$$

となり，$B \fallingdotseq\!\!\!\!/ \, C$ の仮定に反する。すなわち，$G \cap \sim C > O$ がなりたつ。

また，$E > O$ であるから，$E = E_1 \cup E_2, E_1 > O, E_2 > O$ を満足するような E_1, E_2 が存在する。また，$E_2 > O$，$G \cap \sim C > O$ について，この定理の1から，

$$E_2 > E'' > O, \quad G \cap \sim C \supset E''$$

を満足する E'' が存在する。$C \cap E'' = O$ であるから，$C > H$ をもちいて，

$$C \cup E'' > H \cup E''$$

がなりたつ。また，$E'' \subset G$ であるから，$H \cap E'' = O$ である。したがって，$G \fallingdotseq\!\!\!\!/ \, H$ から，

$$H \cup E'' > G$$

をうる。仮定から，$G \geq B \cup E$ がなりたつから，

$$C \cup E'' > B \cup E = (B \cup E_1) \cup E_2, \quad E'' < E_2$$

がなりたつことから，定理11の系1によって，

$$C > B \cup E_1$$

をうる[7]。これは，$B \fallingdotseq\!\!\!\!/ \, C$ に矛盾する。

(b)　$B \cup C \doteq S$ がなりたつ場合：この場合 $G \cup H \doteq S$ がなりたつ。なぜならば，もし，$G \cup H < S$ とすると，$\sim(G \cup H) > O$ であるから，$\sim(G \cup H) \supset E, E > O$ を満足するような E が存在する。$(G \cup H) \cap E = O$ であるから，

$$(G \cup H) \cup E < (G \cup H) \cup \sim(G \cup H) = S \doteq B \cup C$$

これは，$G \cup H \fallingdotseq\!\!\!\!/ \, B \cup C$ に反する。したがって，$G \cup H \doteq S$ がなりたつ。この場合をさらに

(6)　Ibid., 112ページ。

(7)　$B_1 \cup B_2 < C_1 \cup C_2$ かつ $B_1 \cap B_2 = O$ ならば，$B_1 < C_1$ または $B_2 < C_2$ がなりたつ（定理11の系1）ということは，$B_1 \cup B_2 < C_1 \cup C_2$，$B_1 \cap B_2 = O$ かつ $B_1 \geq C_1$ ならば，$B_2 < C_2$ がなりたつということと同等である。

2つの場合にわけて$B\cup E<G$から矛盾をみちびく。

（1） $C\cap G\doteq O$がなりたつならば，定理9の系2により，$G\leq\sim C$がなりたつから，

$$B\cup E<G\leq\sim C\doteq B$$

となり矛盾する。

（2） $C\cap G>O$がなりたつならば，$C\cap G>E_1, E_1>O$，$E_1<E$を満足するようなE_1が存在する。したがって，

$$C<B\cup E_1<B\cup E\leq G$$

がなりたつ。一方，

$$\begin{aligned}(B\cap G)\cup(B\cap H)\cup E&=(B\cap(G\cup H))\cup E\\&\doteq(B\cap S)\cup E\\&=B\cup E<G=G\cap S\doteq G\cap(B\cup C)\\&=(B\cap G)\cup(C\cap G)\end{aligned}$$

$$(B\cap G)\cap\{(B\cap H)\cup E\}=(B\cap G\cap H)\cup(B\cap G\cap E)=O$$

であるから，定理9の系1より[8]，

$$(B\cap H)\cup E<C\cap G$$

がなりたつ。また

$$\begin{aligned}(C\cap G)\cup(C\cap H)=C\cap(G\cup H)\doteq C\cap S=C<G=G\cap S\doteq G\cap(B\cup C)\\=(B\cap G)\cup(C\cap G)\end{aligned}$$

$$(C\cap G)\cap(C\cap H)=C\cap G\cap H=O$$

がなりたつから，

$$C\cap H<B\cap G$$

がなりたつ。$(B\cap G)\cap(C\cap G)=O$であるから，

$$(C\cap H)\cup(B\cap H)\cup E<(B\cap G)\cup(C\cap G)$$

$$(H\cap(B\cup C))\cup E<G\cap(B\cup C)$$

$$(H\cap S)\cup E<G\cap S$$

$$H\cup E<G$$

をうる。これは，$G\Leftrightarrow H$に矛盾する。

このようにして，(*a*)，(*b*) ともに，不合理を生ずるから，仮定$B\Leftrightarrow G$でないはなりた

（8） Ibid., 111ページ。

たない。すなわち，$B \doteqdot G$ がなりたつ。

4．$B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ について，

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B, \qquad B_1 \doteqdot B_2 \doteqdot \cdots\cdots \doteqdot B_n$$

がなりたつとする。この定理の2から，B_i の任意の $r(1 \leq r \leq n-1)$ 個の和集合は，また互いに almost equivalent である。すなわち，

$$\bigcup_{j=1}^{r} B_{i(j)} \doteqdot \bigcup_{k=1}^{r} B_{i(k)}$$

したがって，B_i，$i \neq i(k)(k=1,2,\cdots\cdots,r)$ を右辺に加えれば，かならず右辺の方が大きくなる。すなわち，

$$\bigcup_{j=1}^{r} B_{i(j)} < (\bigcup_{k=1}^{r} B_{i(k)}) \cup B_i = \bigcup_{k=1}^{r+1} B_{i(k)}$$

すなわち，ほとんど一様な分割である。

5．任意の事象 B が2つの almost equivalent な事象 B_1，B_2 に分割できることを，B_1，B_2 を構成することによって示す。おおまかに考えれば，この質的確率が fine であるから，任意の $H>O$ に対して，

$$E_i < H \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

を満足するような B の分割 $E_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が存在する。この分割について，

$$\bigcup_{i=1}^{r} E_i \cup E_{r+1} > \bigcup_{i=r+2}^{n} E_i$$

$$\bigcup_{i=1}^{r} E_i < E_{r+1} \cup (\bigcup_{i=r+2}^{n} E_i)$$

となるような r が存在することは，事象間の比較ができることから，容易にみとめることができよう。この $\bigcup_{1}^{r} E_i$ と $\bigcup_{r+2}^{n} E_i$ は B を2等分したものに近いものであるから，H を小さくしていけば，almost equivalent なものに達するであろうことが予想できる。このような考え方によって，つぎのような帰納法による構成法をとる。

$n=1$ のとき，B の2分割 E_1，E_2 をつくる。すなわち，

$$B = E_1 \cup E_2, \quad E_i > O \ (i=1,2), \quad E_1 \cap E_2 = O$$

ここで，$E_1 \doteq E_2$ がなりたつならば，$E_1 \doteqdot E_2$ となるから，これはもとめる2分割になって

いる。いま，$E_1 \doteqdot E_2$がなりたたないとき，一般性を失うことなく$E_1 > E_2$とすることができる。これをもちいて，

$$C_1 = O,\quad G_1 = E_1,\quad D_1 = E_2$$

とおけば，

$$C_1 = O < B = E_1 \cup E_2 = G_1 \cup D_1$$

$$C_1 \cup G_1 = O \cup E_1 = E_1 > E_2 = D_1$$

がなりたつ。

つぎに，nまでの自然数kについて，

1. $C_k \leq D_k \cup G_k,\quad C_k \cup G_k > D_k$
2. $C_{k+1} \supset C_k,\quad D_{k+1} \supset D_k,\quad G_{k+1} \subset G_k$
3. $\sim G_{k+1} \cap G_k \geq G_{k+1}$
4. $C_k \cup D_k \cup G_k = B$, かつ C_k, D_k, G_kは互いに素

を満足するようなC_k, G_k, D_k $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$が定義できたとする。C_{n+1}, G_{n+1}, D_{n+1}をつぎのようにしてつくる。すなわち，まずG_nの2分割G'_n, G''_n $(G'_n \leq G''_n)$をつくる。G'_nに対して，Bの分割$F_i (i=1,2,\cdots\cdots,m)$が存在して，

$$F_i < G'_n \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

がなりたつ。$F'_i = F_i \cap G_n (i=1,2,\cdots\cdots,m)$をつくり，空でない$F'_i$に番号をつけなおして，$F'_1, F'_2,\cdots\cdots, F'_r$とする。$F_i$は$B$の分割であり，$G_n$は$B$の部分集合であるから，

$$\bigcup_{i=1}^{m} F_i \cap G_n = G_n$$

がなりたつ。F'_1, $F'_2,\cdots\cdots, F'_r$は$F_i \cap G_n$ $(i=1,2,\cdots\cdots,m)$のうち，空事象を除いたものであるから，

$$\bigcup_{i=1}^{r} F'_i = G_n$$

がなりたつ。したがって，

$$C_n \leq G_n \cup D_n = (\bigcup_{1}^{r} F'_i) \cup D_n$$

$$C_n \cup (\bigcup_{1}^{r} F'_i) = C_n \cup G_n > D_n$$

がなりたつ。いま，$C_n \cup F'_1$と$(\bigcup_{2}^{r} F'_i) \cup D_n$を比較して，後者の方が大きければ，$C_n \cup (\bigcup_{1}^{2} F'_i)$と $(\bigcup_{3}^{r} F'_i) \cup D_n$ を比較する，というように進めていって，はじめて

$$C_n \cup (\bigcup_{1}^{s} F'_i) > (\bigcup_{s+1}^{r} F'_i) \cup D_n$$

がなりたつようなsをもとめる。$C_n \leq (\bigcup_{1}^{r} F'_i) \cup D_n$，$C_n \cup (\bigcup_{1}^{r} F'_i) > D_n$がなりたっているのであるから，$1 \leq s \leq r$ を満足するsが存在して，

$$C_n \cup (\bigcup_{1}^{s-1} F'_i) \leq F'_s \cup (\bigcup_{s+1}^{r} F'_i) \cup D_n$$

かつ，

$$C_n \cup (\bigcup_{1}^{s-1} F'_i) \cup F'_s > (\bigcup_{s+1}^{r} F'_i) \cup D_n$$

がなりたつ。零事象は不等号の向きに影響をあたえることはないから，F'_sは零事象ではない。そこで，

$$C_{n+1} = C_n \cup (\bigcup_{1}^{s-1} F'_i)$$

$$G_{n+1} = F'_s$$

$$D_{n+1} = (\bigcup_{s+1}^{r} F'_i) \cup Dn$$

とすれば，あきらかに，

$$C_{n+1} \supset C_n,\quad D_{n+1} \supset D_n,\quad G_{n+1} \subset G_n$$

であり，かつ

$$C_{n+1} \leq G_{n+1} \cup D_{n+1},\quad C_{n+1} \cup G_{n+1} > D_{n+1}$$

がなりたつ。また，

$$C_{n+1} \cup D_{n+1} \cup G_{n+1} = C_n \cup (\bigcup_{1}^{s-1} F'_i) \cup (\bigcup_{s+1}^{r} F'_i) \cup D_n \cup F'_s$$

$$= C_n \cup D_n \cup (\bigcup_{1}^{r} F'_i)$$

$$=C_n \cup D_n \cup G_n = B$$

がなりたち，C_{n+1}，D_{n+1}，G_{n+1}は互いに素であることがわかる。

つぎに，F_iのつくり方から，

$$G_{n+1}=F'_s=F_j \cap G_n \leq F_j \leq G'_n < G''_n$$

をうる。また，$G''_n \subset G_n$がなりたつから，$\sim G_n \cap G''_n = O$である。したがって，定理6[(9)]によって，

$$G_{n+1} \cup (\sim G_n) \leq G''_n \cup (\sim G_n)$$

をうる。したがって，定理5[(10)]によって，

$$\sim G_{n+1} \cap G_n \geq \sim G''_n \cap G_n$$

をうる。ここで，$G_n = G'_n \cup G''_n$がなりたつことから，$\sim G''_n \cap G_n = G'_n$である。すなわち，

$$\sim G_{n+1} \cap G_n \geq G'_n \geq G_{n+1}$$

がなりたつ。

このようにして，任意の自然数 n に対して，

1. $C_n \leq D_n \cup G_n$，$C_n \cup G_n > D_n$
2. $C_{n+1} \supset C_n$，$D_{n+1} \supset D_n$，$G_{n+1} \subset G_n$
3. $\sim G_{n+1} \cap G_n \geq G_{n+1}$
4. $C_n \cup D_n \cup G_n = B$　かつ　C_n, D_n, G_nは互いに素

を満足するような C_n, D_n, G_n をつくることができる。

$C_n \cup D_n \cup G_n = C_{n+1} \cup D_{n+1} \cup G_{n+1} = B$ かつ $C_n \cap (G_n \cup D_n) = C_{n+1} \cap (G_{n+1} \cup D_{n+1}) = O$ であり，$C_n \leq C_{n+1}$であるから，定理11の系2[(11)]によって，

$$D_n \cup G_n \geq D_{n+1} \cup G_{n+1}$$

がなりたつ。また，$D_n \leq D_{n+1}$がなりたつことから同様にして，

$$C_n \cup G_n \geq C_{n+1} \cup G_{n+1}$$

がなりたつ。

つぎに，上で構成したC_n, D_n, G_nをもちいて，

---

(9)　Ibid., 107ページ。
(10)　Ibid., 106ページ。
(11)　Ibid., 116ページ。

$$\lim C_n = \bigcup_1^{\infty} C_n = B_1$$

$$\lim (D_n \cup G_n) = (\bigcup_1^{\infty} D_n) \cup (\bigcap_1^{\infty} G_n) = B_2$$

をつくる。任意の n について，

$$C_n \cup D_n \cup G_n = B$$

であるから，

$$(\lim C_n) \cup (\lim (D_n \cup G_n)) = B$$

すなわち，

$$B_1 \cup B_2 = B$$

がなりたつ。

つぎに，任意の $H > O$ をとると，どの要素も H より小さい B の m 分割 $E_i (i=1,2,\cdots,m)$ が存在する。いま，

$$2^{n-1} > m$$

を満足するような n をとれば，

$$G_n < H$$

を満足する。なぜならば，もし，$G_n \geqq H$ がなりたつとするならば，

$$G_n \geqq H > E_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\ m)$$

$$G_{n-1} \cap \sim G_n \geqq G_n > E_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,\ m)$$

$G_n \cap (G_{n-1} \cap \sim G_n) = O$ であるから，定理10によって，

$$G_n \cup (G_{n-1} \cap \sim G_n) > E_1 \cup E_2$$

がなりたつ。

$$G_n \cup (G_{n-1} \cap \sim G_n) = (G_n \cup G_{n-1}) \cap (G_n \cup \sim G_n)$$
$$= G_{n-1} \cap B = G_{n-1}$$

であるから，すなわち，

$$G_{n-1} > E_1 \cup E_2$$

がなりたつ。このようにして一般に，

$$G_{n-i} > \bigcup^{w} E_i \qquad (\text{ただし} w = 2^i)$$

がなりたつ。したがって，

$$G_1 > \bigcup^{w'} E_i > \bigcup_1^{m} E_i = B \qquad (\text{ただし}\omega' = 2^{n-1})$$

がなりたつことになり不合理である。このことから，$G_n < H$ をうる。

つぎに，$O < V \subset \sim G_{n+1} \cap G_n$ を満足するような事象 V をとる。この V に対して，上と同様にして，$G_l < V$ を満足する l を選ぶ。容易にわかるように，$l \geq n+1$ とすることができる。いま，$G_{n+1} \cap (G_n \cap \sim G_{n+1}) = O$ かつ $V \leq \sim G_{n+1} \cap G_n$ であるから，定理6をもちいて，

$$G_{n+1} \cup V \leq G_{n+1} \cup (G_n \cap \sim G_{n+1}) = G_n < H$$

をうる。B_1 は任意の i に対して，$B_1 \geq C_i$ を満足するから，

$$B_1 \geq C_{n+1}$$

がなりたち，$B_1 \cap H = O$ であるから，

$$\begin{aligned} B_1 \cup H &> C_{n+1} \cup G_{n+1} \cup V \qquad (\text{定理10の系による}) \\ &\geq C_l \cup G_l \cup V \\ &> D_l \cup V \\ &> D_l \cup G_l \\ &\geq B_2 \end{aligned}$$

をうる。

また，B_2 は任意の i に対して，$B_2 \geq D_i \cup G_i$ を満足し，$B_2 \cap H = O$ であるから，定理10の系をもちいて，

$$C_n \leq D_n \cup G_n < B_2 \cup H$$

がなりたつ。この関係は，すべての n についてなりたつから，

$$\lim C_n \leq \lim (B_2 \cup H)$$

すなわち，

$$B_1 \leq B_2 \cup H$$

をうる。このようにして，B_1 と B_2 は almost equivalent であることがわかる。よって，第5命題が証明された。

6. 第5命題における分割を n 回くり返すことによって，2^n個の almost equivalent な事象に分割が可能である。

7. 任意の事象が，almost equivalent な 2^n 分割が可能であり，almost equivalentな

事象への分割は，ほとんど一様な分割であることから，ほとんど一様な 2^n 分割が存在する。このことから，定理1によって，任意の自然数 m に対して，ほとんど一様な m 分割が可能となる。したがって，定理2によって，$\leq$ にほとんど一致する P が存在することと，任意の B と ρ（$0\leq\rho\leq 1$）に対して，$P(C)=\rho P(B)$ を満足する $C\subset B$ が存在することがわかる。

いま，$B>O$ であるとき，十分大きい n に対して，ほとんど一様な n 分割 $D_i(i=1,2\cdots\cdots,n)$ が存在して，その少なくとも1つの要素は，$B>D_i$ を満足する。なぜならば，もし，どのような n に対するほとんど一様な n 分割もこの性質をもっていないとすれば矛盾が生ずる。すなわち，この質的確率 $\leq$ は fine であるから，ある m 分割 $E_i(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ が存在して，

$$E_i<B \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

がなりたつ。一方，この同じ自然数 m についてのほとんど一様な m 分割を $D_i(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ とすれば，

$$D_i\geq B \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

がなりたつ。したがって，

$$D_i\geq B>E_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

がなりたつ。定理10の系によって，

$$\bigcup_{i=1}^{m} D_i>\bigcup_{i=1}^{m} E_i$$

$$S>S$$

となり，矛盾が生ずる。

このようにして，十分大きい n についてのほとんど一様な分割は，$D_i<B$ を満足する要素を少なくとも1つはふくむことから，

$$k(B,n)>0$$

をうる。したがって，

$$P(B)=\lim\frac{k(B,n)}{n}>0$$

がなりたつ。

最後に，$B\Leftrightarrow C$ がなりたつならば，$G>O, H>O, B\cap G=C\cap H=O$ に対して，

$$B\cup G>C,\ C\cup H>B$$

がなりたつ。したがって，

$$P(C) \leq P(B \cup G) = P(B) + P(G)$$

がなりたつ。これは，任意の$G > O$，$B \cap G = O$を満足するGに対してなりたつから，

$$P(C) \leq P(B)$$

がなりたつ。同様に，任意の$H > O$，$C \cap H = O$を満足するHに対して，

$$P(B) \leq P(C \cup H) = P(C) + P(H)$$

がなりたつことから，

$$P(B) \leq P(C)$$

をうる。したがって，

$$P(B) = P(C)$$

がなりたつ。

$B \eqcirc C$でないとすれば，一般性を失うことなく，$B \cap G = O$なる$G > O$が存在して，$B \cup G < C$がなりたつと考えてよい。このとき，

$$P(B \cup G) < P(C)$$

したがって，

$$P(B) + P(G) < P(C)$$

がなりたつ。一方，$G > O$ならば，$P(G) > O$となるから，

$$P(B) < P(C)$$

となる。すなわち，$B \eqcirc C$でないならば，$P(B) < P(C)$または，$P(C) < P(B)$がなりたつ。したがって，この対偶命題として，$P(B) \geq P(C)$かつ$P(C) \geq P(B)$すなわち，$P(B) = P(C)$ならば，$B \eqcirc C$がなりたつ。このようにして，$B \eqcirc C$がなりたつための必要かつ十分な条件は$P(B) = P(C)$であることがわかる。

系　$\leq$が fine かつ tight であるならば，$\leq$にほとんど一致する確率測度は strictly に一致する。また，Sの任意個の equivalent な事象への分割が可能である。

〔証明〕 $\leq$が fine であれば，$\leq$にほとんど一致する確率測度Pが存在する。したがって，

$$B \leq C \text{ ならば } P(B) \leq P(C)$$

がなりたつ。

逆に，

$$P(B) \leq P(C)$$

がなりたつとき，$P(B) < P(C)$ の場合と，$P(B) = P(C)$ の場合にわけて考える。

$$P(B) < P(C) \text{ ならば } B < C$$

は，上の命題の対偶命題であるから当然なりたつ。いま，

$$P(B) = P(C)$$

がなりたつとすれば，$\leq$ が fine であることから，定理3によって，

$$B \doteqdot C$$

がなりたつ。さらに，$\leq$ が tight であることから，

$$B \doteq C$$

をうる。したがって，

$$B \leq C$$

がなりたつ。上の2つの命題をひとつにして，

$$P(B) \leq P(C) \text{ ならば } B \leq C$$

がなりたつことがわかる。このようにして，$B \leq C$ がなりたつための必要かつ十分な条件は $P(B) \leq P(C)$ であるから，質的確率 $\leq$ と確率測度 P は strictly に一致する。

定理3の6によれば，S の任意の 2^n 個の almost equivalent な事象への分割が可能である。$\leq$ が tight であれば，almost equivalent な事象は equivalent であるから，S の 2^n 個の equivalent な事象への分割が可能であることになる。ここで，たとえば3分割することを考えれば，

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\cdots$$

となるから，4分割，16分割，64分割，……を行い，それをつけ加えていくという無限の操作をゆるすならば，3分割が可能になる。一般に，

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^{i(1)}} + \frac{1}{2^{i(2)}} + \cdots\cdots$$

となるから，上のような無限の操作をゆるすならば，任意個の分割が可能である。

定理4　質的確率 $\leq$ が fine かつ tight であるための必要かつ十分な条件は，$B < C$ を満足するすべての B に対して，

$$B \cup D_i < C \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

がなりたつような S の分割 $D_i (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ が存在することである。

〔証明〕 いま，$\leq$が fine かつ tight であるとする。$B<C$ がなりたつとすれば，B と C は equivalent ではない。$\leq$は tight であるから，B と C は almost equivalent でもない。$C \cap H=O$ なる$H>O$ に対しては当然 $C \cup H>B$ がなりたつから，$B \cap G=O$，$G>O$ を満足するいかなる G に対しても，$B \cup G>C$ がなりたつとするならば，B とC はalmost equivalent であることになり，矛盾である。このことから，$B \cap G=O$，$G>O$ を満足する G のうちに，

$$B \cup G<C$$

を満足するものが少なくとも1つ存在することがわかる。さらに，$\leq$が fine であることから，$G>O$ に対して，S の分割 $D_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が存在して，

$$D_i<G \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

がなりたつ。

$$B \cap G=O$$

であるから，定理6によって，

$$B \cup D_i \leq B \cup G<C \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

がなりたつ。すなわち，定理の前半が証明された。

つぎに，逆を証明する。すなわち，$B<C$ を満足する任意のB，C に対して，

$$B \cup D_i<C \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

を満足する分割 D_i が存在する。ここで，任意に$E>O$ をとり，$B=O, C=E$ にとれば，

$$O \cup D_i=D_i<C=E \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

すなわち，

$$D_i<E \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

を満足する D_i が存在することがわかる。よって，$\leq$は fine である。

つぎに，B と C が equivalent でないとするならば，$B<C$ としても一般性を失うことはない。定理の条件から，S の分割 $D_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$が存在して，

$$B \cup D_i<C \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

がなりたつ。$G=D_i$ とすれば，

$$B \cup G<C$$

を満足する$G>O$が存在することになるから，B と C は almost equivalent でない。したがって，この対偶として，almost equivalent ならば equivalent であるという命題が成立する。したがって，質的確率$\leq$は tight である。

ここで，質的確率≦に対して，つぎの公理をみとめることにする。

P6′ $B<C$ ならば，S の分割 $D_i(i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ が存在して，

$$B\cup D_i<C \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$$

がなりたつ。

定理4に示したように，公理P6′をみとめることは，質的確率≦が fine かつ tight であることをみとめることになる。さらに，定理3の系1から，任意の n に対して S の 2^n 分割が存在することになる。しかしながら， de Finetti や B.O Koopman のように，いきなり S の任意個の equivalent な事象への分割の存在をみとめるよりは考えやすいように思われる。たとえば，いま $B<C$ であるとする。すなわち，人が B よりも C に賭けようと思っているとする。このとき，世界を 2^n 個に分割して各要素を貨幣の表裏の特定のならびの和よりも，なお C の方に賭けるような n が存在することは，それほど困難なことではないであろう。

しかしながら，B.O Koopman は P6′をみとめないという立場をとっている。というのは，P6′をみとめれば，量的確率と質的確率との間の一致が strict なものとなるからである。B.O Koopman は，$A\supset B$，$A\fallingdotseq B$ がなりたつとき，量的確率が等しい場合すなわち，$P(A)=P(B)$ が成立する場合といえども，$A>B$ がなりたつという立場をとっている。たとえば，壁に向かって弾丸をうつとする。弾丸がどこにもあたらないということは考えられないが，弾丸の上にあらかじめつけられた数学的な点 (ideal point) が，あらかじめ壁の上にひかれた数学的な線(ideal line)にあたると考えることは論理的には可能であろう。このように，数学的な線を数学的な点がうつことの論理的な可能性から，B.O Koopman は，このような事象は空事象すなわち，弾丸がどこにもあたらないということよりも，より確からしいと考える。しかしながら，一方ではこの事象の確率測度はいずれも 0 である。この数学的な点が広さをもつ点(dot)に，数学的な線が巾をもつ線 (band) におきかえられたならば，当然空事象よりも，より確からしいと考えられる。しかしながら，その極限としての点と線についてどう考えるかは人それぞれの考え方の問題である。ここで，P6′に対応する行動についての公理P6をあげておく。P6 から P6′がえられることは明らかである。

P6 g<h がなりたつとき，f を任意の結果とする。このとき，S の分割 $D_i(i=1,2\cdots\cdots,\ n)$ が存在して，g または h が任意の Di の上では f をとり，他の点ではもとの値をとるような修正を行ってもなお

modified　g<h

あるいは,

g<modified　h

がなりたつ。

3.4　補

前節において，質的確率に一致あるいは，ほとんど一致する量的確率すなわち，確率測度を導入した。ここで，質的確率を数量化して確率測度を定義することについて考えてみる。たとえば，$S=[0,\ 1]$としたとき，Sのすべての部分集合からなる集合族の濃度は実数の濃度より大きい。ここで，数量化とは，この集合族の各要素であるSの部分集合Aに対して$0\leq x\leq 1$の1つの数xを対応させる。すなわち，この集合族から区間$[0,1]$の上への対応 $P(A)=x$を構成することである。

ここで，この$P(A)$は，

$$A\leq B \quad \text{ならば} \quad P(A)\leq P(B)$$

という関係を満たさなければならない。濃度についてみれば，この集合族の濃度は実数の濃度より大きいから，Pは1対1対応とはなりえない。たとえば，事象の方が$A\leq B\leq C\leq D\leq E$あるのに対して，数の方が0，½，1しかないのと同様であって，たとえば，

$$A\to 0$$

$$B\to 0$$

$$C\to 1/2$$

$$D\to 1/2$$

$$E\to 1$$

というような対応をつけざるをえない。この場合，事象の方が

$$A<B<C<D<E$$

という関係をもつならば，$A<B$あるいは$C<D$という関係にありながら，$P(A)=P(B)$，$P(C)=P(D)$という関係がなりたつから，この関数Pは事象の間の関係を数の関係に厳密にはうつしていない。これが，確率測度が質的確率にほとんど一致するということである。一方，事象の方でも，

$$A\doteqdot B<C\doteqdot D<E$$

という関係にあれば，事象の大小関係と数の大小関係は丁度一致している。これが，確率測度が質的確率に一致するということである。B.O.Koopman の例について考えれば，点

が線をうつことを事象Aとかくことにすれば，数量化したときには，$P(O)=P(A)=0$であるけれども，質的には$O<A$であると考えているわけである。

つぎに，almost equivalent について考えてみる。Pは$\leq$にほとんど一致する確率測度であることから，$B\doteq C$ならば$P(B)=P(C)$がなりたつ。このことは，

$$B\leq C \quad \text{ならば} \quad P(B)\leq P(C)$$

$$B\geq C \quad \text{ならば} \quad P(B)\geq P(C)$$

がなりたつことから容易にわかる。しかしながら，前に述べたように，この逆はかならずしもなりたたない。すなわち，$P(B)=P(C)$であっても$B\doteq C$とはならない。したがって，たとえば，

$$P(B)=P(C) \quad \text{かつ} \quad B<C$$

となるようなB，Cが存在しうる。一方，確率測度は数であるから，このような場合任意の$\varepsilon>0$に対して，

$$P(B)+\varepsilon>P(C)$$

がなりたつ。任意の数nに対して，ほとんど一様なn分割が存在するような質的確率あるいは，fine である質的確率はある意味で連続的であるから，このεに対応する事象が存在する。これをG ($G\cap B=O$)とする。

$$P(B)+P(G)>P(C)$$

$$P(B\cup G)>P(C)$$

がなりたつことから，

$$B\cup G>C$$

がなりたつ。例を B.O. Koopman の考え方によって示す。円の内部をB，円の周をもふくめたものをCとすれば，$B<C$がなりたつと考えられる。この場合，円周の確率測度は0であり，$P(B)=P(C)$がなりたつ。一方，円の外部に$G>O$をとれば，Gがどんなに小さいものであっても，

$$B\cup G>C$$

がなりたつ。このように，$P(B)=P(C)$を満足する事象B，Cは$B<C$であっても，Bに任意の$G(>O,\ B\cap G=O)$を加えれば，$B\cup G>C$となるのである。また，任意のGに対して，$B\cup G>C$という関係が成立するにもかかわらず，Gを取り去った場合，

$$B<C$$

となって，連続性がなりたっていない。このような質的確率はいくらでも小さい事象が存

在するという意味で連続的でありながら，P についての連続性とは一致しない。これが，P と$\leq$がほとんど一致するということの意味するものであろう。また，この完全に一致しないところで $P(B)=P(C)$ となるという関係でむすびつけられるものとして，almost equivalent という関係が考えられるのである。したがって，almost equivalent が equivalent と一致する場合すなわち，質的確率$\leq$が tight である場合には，$B\doteq C$ という関係と $P(B)=P(C)$ であらわされる関係は全く一致し，P と$\leq$は strictly に一致することになる。

確率測度としてよくもちいられるのはルベーグ測度である。ルベーグ測度は，互いに素な可算無限個の事象について，その和の測度がおのおのの測度の和になること，すなわち，完全加法性をもつものである。完全加法性をもつ測度は，S のすべての部分集合に対して定義することはできない。すなわち，このような測度が定義できる集合の族は，すべての部分集合をふくむ族ではない。前節においては，確率をすべての事象，すなわち，S のすべての部分集合に対して定義している。したがって，このような確率測度は完全加法性をもつことはできない。Banach は，1次元あるいは2次元空間において，ルベーグ可測な集合についてはルベーグ測度と一致し，幾何学的に合同な集合には同じ測度をあたえるようなすべての部分集合に対して定義される有限加法的な測度が存在することを示している。

つぎに，fine，tight 等の概念について考えるために，上で述べたルベーグ測度の有限加法的な拡張 P をもちいて，いくつかの質的確率の例をあげてみる。

<例1>　$B\leq C$を$P(B)\leq P(C)$ によって定義するならば，この質的確率$\leq$は fine かつ tight である。

任意の $B>O$ をとる。$P(B)>O$がなりたつから，十分大きい n に対する S の n 分割 B_i

$(i=1.2,\cdots\cdots,\ n)$ をつくれば，$P(B_i)=\dfrac{1}{n}<P(B)$ とすることができる。このように，

$B_i<B(i=1,2,\cdots\cdots,\ n)$ を満足する S の分割 B_i が存在するから$\leq$は fine である。

$B\doteq C$ とする。$B\cap G=O$ を満足する任意の$G>O$ に対して，$B\cup G>C$ がなりたつ。すなわち，

$$P(C)<P(B\cup G)=P(B)+P(G)$$

がなりたつ。この不等式は任意の G に対してなりたつことから，

$$P(C) \leq P(B)$$

がなりたつ。すなわち，

$$C \leq B$$

がなりたつ。つぎに，$C \cap H = O$ を満足する任意の$H > O$ に対して，$B < C \cup H$ がなりたつことから，同様にして，

$$B \leq C$$

をうる。したがって，

$$B \doteq C$$

がなりたつ。このようにして，この$\leq$は tight であることがわかる。

＜例2＞ tight であるが fine でない質的確率の例はつぎのようにして構成できる。S_1，S_2を〔0，1〕区間とし，P_1，P_2をそれぞれS_1，S_2上のルベーグ測度の有限加法的拡張とする。SをS_1，S_2によって構成する。すなわち，Sの部分集合Bは$B_1 = B \cap S_1$，$B_2 = B \cap S_2$に分割できるとする。あるいは，$S = (S_1, S_2)$ であり，$B \subset S$ なるBは$B =_2 (B_1, B_2)$ と表現してもよい。これは，Sを$S_1 \times S_2$とし，Sの部分集合として矩形$B_1 \times B$のみをとるという考え方に一致する。このようなSの部分集合B，Cに対して$B \leq C$を，$P_1(B_1) < P_2(C_1)$ がなりたつかまたは，$P_1(B_1) = P_2(C_1)$のときには$P_2(B_2) \leq P_2(C_2)$ がなりたつときであると定義する。

このような質的確率$\leq$は fine でない。なぜならば，Sの任意のn分割を$B_i (i=1,2,\cdots\cdots, n)$ とすれば，$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ がなりたつ。したがって，

$$(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \cap S_1 = S \cap S_1 = S_1$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap S_1) = S_1$$

がなりたつ。もし，すべてのiについて，$B_i \cap S_1 = O$であるとすれば，$S_1 = \bigcup_{i=1}^{n} (B_i \cap S_1) = \bigcup_{i=1}^{n} O = O$となって矛盾を生ずる。したがって，ある$j$に対して$B_j \cap S_1 \neq O$がなりたつ。すなわち，$B_j = (B_{j(1)}, B_{j(2)})$とすれば，$B_{j(1)} \neq O$。$S_2 = (O, S_2)$ とB_jを比較すれば，

$$P_1(B_{j(1)}) > 0 = P_1(O)$$

がなりたつことから，

$$B_j > S_2$$

がなりたつ。このようにして任意の分割はS_2よりも，より確からしい要素をふくむことがわかる。したがって，$\leq$は fine ではない。いま，$B \neq C$とすれば，一般性を失うことなく$B < C$と仮定することができる。$B=(B_1, B_2)$, $C=(C_1, C_2)$とすれば，$P(B_1) < P(C_1)$または，$P(B_1)=P(C_1)$, $P(B_2) < P(C_2)$がなりたつ。前者の場合は，$P(C_1)-P(B_1) > P(G_1)$を満足し，$B_1 \cap G_1 = O$となるG_1と適当なG_2から，$G=(G_1, G_2)$を$B \cap G = O$となるようにつくる。後者の場合には，$P(C_2)-P(B_2) > P(G_2)$を満足するG_2によって，$G=(O, G_2)$を$B \cap G = O$となるようにつくれば，

$$P((B \cup G)_1^{(12)}) = P(B_1) + P(G_1) < P(C_1)$$

あるいは，

$$P((B \cup G)_1) = P(B_1) + P(O) = P(B_1) = P(C_1)$$

$$P((B \cup G)_2) = P(B_2) + P(G_2) < P(C_2)$$

となるから，いずれの場合にも，$P(B \cup G) < P(C)$となる。したがって，$B \cup G < C$がなりたつ。このようにして，$B < C$ならば，$B \cup G < C$を満足するGが存在する。すなわち，BとCが equivalent でないならば，BとCは almost equivalent でないという命題がなりたつ。したがって，この対偶命題$B \doteq C$ならば$B = C$がなりたつから，$\leq$は tight であることがわかる。

＜例3＞　fine であるが tight でない質的確率の例はつぎのように構成できる。
$S=(S_1, S_2)$とし，P_1, P_2は例2と同様にとる。$B \leq C$を，$P_1(B_1)+P_2(B_2) < P_1(C_1)+P_2(C_2)$がなりたつか，あるいは，$P_1(B_1)+P_2(B_2) = P_1(C_1)+P_2(C_2)$かつ$P_1(B_1) \leq P_1(C_1)$がなりたつことであると定義する。

$P_1(B_1)+P_2(B_2)$がいくらでも小さいBがつくれることから，この質的確率は fine であることがわかる。

一方，(S_1, O), (O, S_2)を考える。$(S_1, O) \cap G = O$を満足するGは，$G \subset S_2$を満足する。すなわち，Gは，$G=(O, G_2)$となる。したがって，$(S_1, O) \cup G = (S_1, G_2)$と$(O, S_2)$を比較すれば，

$$P_1(S_1) + P_2(G_2) > P_1(S_1) = 1 = P_2(S_2)$$

がなりたつから，

(12)　$(B \cup G)_1 = S_1 \cap (B \cup G) = (S_1 \cap B) \cup (S_1 \cap G) = B_1 \cup G_1$

$$(S_1,\ O)\cup G>(O,\ S_2)$$

同様にして，$(O,\ S_2)\cap H=O$ となるHは，(H_1, O)であるから，

$$P_1(H_1)+P_2(S_2)>P_2(S_2)=1=P_1(S_1)$$

がなりたち，

$$(O,\ S_2)\cup H>(S_1,\ O)$$

をうる。このようにして，$(S_1,\ O)$と$(O,\ S_2)$は almost equivalent である。ところが，

$$P_1(S_1)+P_2(O)=1=P_1(O)+P_2(S_2)$$

$$P_1(S_1)>P_1(O)$$

であるから，定義によって，

$$(S_1,\ O)>(O,\ S_2)$$

をうる。このようにして，$(S_1,\ O)$と$(O,\ S_2)$は almost equivalent であるが equivalent ではない。このような例がある以上，この質的確率は tight ではない。

＜例4＞ fine でも tight でもない質的確率の例は，つぎのようなものである。$S=(S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4)$とする。$B=(B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4)\leq C=(C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4)$をつぎのように定義する。

（1） $P_1(B_1)<P_1(C_1)$ がなりたつか，

（2） $P_1(B_1)=P_1(C_1)$であって，$P_2(B_2)<P_2(C_2)$ がなりたつか，

（3） $P_1(B_1)=P_1(C_1), P_2(B_2)=P_2(C_2)$ であって，$P_3(B_3)+P_4(B_4)<P_3(C_3)+P_4(C_4)$ がなりたつか，または，

（4） $P_1(B_1)=P_1(C_1), P_2(B_2)=P_2(C_2)$，$P_3(B_3)+P_4(B_4)=P_3(C_3)+P_4(C_4)$ であって，$P_3(B_3)\leq P_3(C_3)$がなりたつ。

いま，$(O, S_2,\ O,\ O)$を考える。任意のSの分割$B_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$は，$\bigcup_{i=1}^{n} B_i=S$である以上，$B_i\cap S_1\neq O$ なる B_i が存在する。このような B_i は，

$$P_1(B_i\cap S_1)>O=P_1(O,\ S_2,\ O,\ O)$$

を満足するから，

$$B_i>(O,\ S_2,\ O,\ O)$$

がなりたち，例2と同じように$\leq$が fine でないことがわかる。

$(O,\ O,\ S_3, O)$，$(O,\ O,\ O,\ S_4)$ をとれば，$(O,\ O,\ S_3,\ O)\cap G=O$となる$G$は，$G=(G_1, G_2,\ O,\ G_4)$，$G_1$，$G_2$，$G_4$ のうち少なくとも1つはOでないようなものである。した

がって，$G_1>O$ ならば事象の比較の定義1によって，$G_2>O$ ならば2によって，$G_4>O$ ならば3によって，いずれの場合も、

$$S_3\cup G\geq S_4$$

がなりたつ。また，$S_4\cap H=O$ なる任意の $H>O$ に対して，

$$S_4\cup H\geq S_3$$

がなりたつことも容易にわかる。したがって，$S_3=(O,\ O,\ S_3,\ O)$ と $S_4=(O,\ O,\ O, S_4)$ は almost equivalent である。ところが，$P_1(O)=P_1(O)$，$P_2(O)=P_2(O)$，$P_3(S_3)+P_4(O)=P_3(O)+P_4(S_4)$，$P_3(S_3)=1>0=P_3(O)$ であるから，

$$S_3>S_4$$

がなりたつ。すなわち，この$\leq$は tight でもない。

ここで，S_1 の n 分割を $B_{1,i}$，S_2 の n 分割を $B_{2,j}$，S_3 の n 分割を $B_{3,k}$，S_4 の n 分割を $B_{4,l}$ とすると，$S=\bigcup_{ijkl}(B_{1,i},\ B_{2,j},\ B_{3,k},\ B_{4,l})$ がなりたち，

$$P_1(B_{1,i(1)})=P_1(B_{1,j(2)})$$

$$P_2(B_{2,j(1)})=P_2(B_{2,j(2)})$$

$$P_3(B_{3,k(1)})+P_4(B_{4,l(1)})=P_3(B_{3,k(2)})+P_4(B_{4,l(2)})$$

であり，

$$P_3(B_{3,k(1)})=P_3(B_{3,k(2)})$$

であるから，

$$(B_{1,i(1)},\ B_{2,j(1)},\ B_{3,k(1)},\ B_{4,l(1)})=(B_{1,i(2)},\ B_{2,j(2)},\ B_{3,k(2)},\ B_{4,l(2)})$$

がなりたつ。すなわち，$(B_{1,i},\ B_{2,j},\ B_{3,k},\ B_{4,l})$，$(i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$ は S の一様な分割である。一様な分割は当然ほとんど一様な分割であるから，定理2によって，このような$\leq$にほとんど一致する確率測度が存在する。

上の4つの例からわかるように，S の任意個のほとんど一様な分割が存在すること，fine，および tight はそれぞれ独立な概念であることがわかる。

ここで，すべての集合が可測であると考えるべきかどうかについて考えてみることにする。S を体積1の立方体とする。質的確率$\leq$に strictly に一致する確率測度 P は，平行六面体に対して，その体積と一致する測度をあたえるようなものであるとする。このことから，ジョルダン測度をもつ集合のこの P による測度は，そのジョルダン測度に一致することがわかる。ジョルダン可測でない集合については，そのジョルダン内測度とジョル

ダン外測度が一致しないのであるから，これらの間の実数を測度としてあたえることとなる。したがって，連続体の濃度だけの可能性がある。このうち，ボレル集合あるいは，ルベーグ可測集合については，他の数を選ぶことが可能であるにしても，そのルベーグ測度を確率測度と考えることは不自然ではないであろう。しかしながら，さらに進んで，ルベーグ可測でない，あるいは，ボレル可測でないような集合の間の比較ということになれば現実的な内容をもたないように思われる。一方，狭い範囲の集合にのみ比較の対象をかぎることは現実的でなく，すべての集合が比較可能であるとする方が単純かつ elegant であるという考え方もあろう。しかしながら，幾何学的に合同な集合に対して同じ測度をあたえ，かつ，すべての集合に対して定義されるような有限加法的な測度は，3次元以上の空間に対しては存在しないことがわかっている。すなわち，すべての集合が可測であるとするならば，幾何学的に合同な集合が equivalent になるような比較は不可能なのである。すなわち，すべての集合が比較可能ならば，幾何学的に合同な集合が equivalent であるという概念をすてないまでも，ある程度修正するというようなこともやめて，むしろこのルベーグ可測でないような集合の比較をあきらめた方がよいように思われる。

すべての集合，すなわち，すべての事象の間の比較は行わないという考えに立つならば，当然すべての行動の間の比較もかならずしもできないことになる。これまでにとってきたすべての事象の間およびすべての行動の間の比較という考え方をすてて，事象，行動等に制限を加える。すなわち，比較可能な事象の族をボレル族，すなわち，S の上の σ–algebra とする。すべての結果の集合を可測空間すなわち，1つの σ–algebra をもつ集合とする。また，行動を事象の可測空間から結果の可測空間への可測関数とする等の変更を加えるわけである。

現代確率論は，可算加法性に多く依存しているけれども，可算加法性を公理としてみとめることはしないで，それが利用できるときに，有用な結果を生ずる仮説として考えるのがよいというのが Savage の考え方である。