研究ノート

個　人　確　率　(4)

木　村　　等・広　瀬　文　子

3.5　fineの定義について

本稿においては，質的確率$\leq$がfineであるということを，任意の事象$B(>O)$に対して，Sの分割$B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$が存在して，

$$B_i<B \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \qquad \text{(a)}$$

がなりたつことであると定義した。これは，Savageの定義と少し違っている。Savageは，この$B_i<B$を，$B_i\leq B$として定義している。すなわち，任意の事象$B(>O)$に対して，Sの分割$B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$が存在して，

$$B_i\leq B \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \qquad \text{(b)}$$

がなりたつとき，$\leq$は fine であるという。

この節では，(b)の定義にしたがった場合どのような違いが生ずるかということ等，いくつかの問題について考える。そのために，まず，atom を定義する。

定義　事象Bが，つぎの2つの条件をみたすとき，Bは atom であるという。すなわち，

1.　$B>O$

2.　$B\supset C$となる任意の事象Cに対して，

$$C\doteq O \quad あるいは \quad C\doteq B$$

のいずれかがなりたつ。

Bが atom であるということは，O以外にB自身より less probable な事象をふくまないということである。すなわち，BがOでないもののうちの最小のものであることを意味する。Atomは空間Sと，Sの部分集合の族に対して定義された質的確率$\leq$の両方の構造に依存するものであるが，言葉を簡略化するために文脈に応じて，Sがatomをもつ，あるいは，質的確率がatomをもつなどと書くことにする。fineとatomをもつこととの関係については，つぎの定理がなりたつ。

定理1　質的確率$\leq$が fine であるとき，Sが1つの atom をもつならば，Sは有限個の atom の和と equivalent である。

<証明>　Sの1つの atom をBとする。いま質的確率$\leq$が fine であるという仮定から，Sの分割$B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$が存在して，

$$B_i \leq B \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n) \qquad (1)$$

がなりたつ。ここで，あるB_{io}に対して，

$$B_{io} < B$$

がなりたつとすれば，fine であるという条件から，このB_{io}に対して，Sの分割$C_i(i=1,2,\cdots\cdots,m)$が存在して，

$$C_i \leq B_{io} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,m)$$

がなりたつ。C_iはSの分割であるから，$C_{jo}\cap B \neq O$がなりたつようなC_{jo}が存在する。すなわち，C_{jo}に対して，

$$C_{jo}\cap B \subset B \quad \text{かつ} \quad C_{jo}\cap B > O$$

がなりたつ。Bは atom であるから，

$$C_{jo}\cap B \doteq B$$

がなりたつ。したがって，

$$B \doteq C_{jo}\cap B \leq C_{jo} \leq B_{io} < B$$

となり矛盾を生ずる。このことから，分割$B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$のどの要素に対しても，$B_i < B$となることはない。すなわち，$B_i \geq B(i=1,2,\cdots\cdots,n)$がなりたつことがわかる。したがって，条件(1)と組合せて，

$$B_i \doteq B \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

がなりたつことがわかる。すなわち，Sは，あるnに対して，Bと equivalent な事象の和集合であることがわかる。

また，あるB_iが，$B_{i1}\cup B_{i2}=B_i$，$B_{i1}>O$，$B_{i2}>O$となるならば，B_iのかわりにB_{i1}，B_{i2}をとることによって，Sの分割をうる。このとき，

$$B_{i1} < B_i \leq B$$

がなりたつこととなり，前と同様に矛盾を生ずるから，B_iはこのような部分集合をふくみえない。すなわち，B_iは atom である。このようにして，定理がなりたつことがわかる。

つぎに，tight と atom をもつことの関係を考える。

定理2　Sが少なくとも1つのatomをもつならば，$\leq$はtightではない。

＜証明＞　Bを1つのatomであるとすると$S-B<S$となる。$(S-B)\cap E=O$, $E>O$を満足する事象Eをとると，$E\subset B$, $E>O$であるから，$E\doteqdot B$がなりたつ。したがって，

$$(S-B)\cup E\doteqdot(S-B)\cup B=S$$

すなわち，

$$(S-B)\cup E\geq S$$

がなりたつ。このようにして，

$$S-B\,\hat{\approx}\,S$$

をうる。すなわち，$S-B$とSはequivalentではないが，almost equivalentである。このような事象の組が存在することから，質的確率$\leq$はtightではない。

定理1によれば，fineである質的確率がatomをもつならば，Sは有限個のatomの和集合とequivalentである。すなわち，

$$S\doteqdot\bigcup_{i=1}^{n}B_i$$

ここで，$B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$はequivalentなatomである。このとき，$B_i\,\hat{\approx}\,O$がなりたつ。なぜならば，$B_i>O$がなりたつことから，任意の$E(B_i\cap E=O, E>O)$に対して，$B_i\cup E>O$は当然なりたつ。一方，$O\cap F=O$, $F>O$となるFは，B_iがすべてequivalentなatomであることから，$F\geq B_i$がなりたつ。したがって，

$$O\cup F\geq O\cup B_i=B_i$$

がなりたつ。以上2つの条件から，$B_i\,\hat{\approx}\,O$をうる。同様にして，

$$B_i\cup B_j\,\hat{\approx}\,B_k$$

がなりたつ。このように，$B<C$の関係にある2つの事象の間に$B\,\hat{\approx}\,C$がなりたつような事象の組がいろいろ存在することからもわかるように，この質的確率$\leq$はtightではない。

このようにして，fineかつatomをもつ質的確率はtightでないことがわかる。したがって，fineかつtightである質的確率はatomをもちえない。すなわち，atomlessである。atomlessとは，最小の事象がないこと，すなわち，いくらでも小さい事象が存在することを意味する。fineを(b)のように定義した上でatomlessであるという条件を加えたものが(a)によるfineの定義であろう。fineかつtightであればatomlessになるから，tightの条件をつけ加えるのであれば，fineを(a)によって定義する必要はなく(b)によ

って定義しておくので十分であろう。

いま，Sがatomをもつ場合，equivalentなatomに確率測度$1/n$をあたえることにより量的確率を導入することができる。すなわち，$B_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$を$S$の分割であるatomとするとき，

$$P(B)=\{B_i\cap B\neq O\text{となる}\,i\,\text{の個数}\}/n$$

として，Bの確率測度を定義すればよい。

$$B\leq C \quad \text{ならば} \quad P(B)\leq P(C)$$

$$B\cap C=O \text{ のとき } P(B\cup C)=P(B)+P(C)$$

がなりたつことは容易に示すことができる。しかしながら，いま，CがBと1つの atom B_iの和であるとすれば，

$$P(C)=P(B)+P(B_i)=P(B)+1/n$$

がなりたつ。上に示したように，このようなBとCの間には，

$$B\simeq C$$

という関係がなりたつから，$B\simeq C$かつ$P(B)<P(C)$となる事象B，Cが存在することになる。前節(1)では，$B\simeq C$のための条件は$P(B)=P(C)$ということであったが，これはatomlessの条件が加わった場合であって，atomをもつ場合は様子が異なっている。

つぎに，P6′(2)について考える。≤はfineかつatomlessであるとする。BとCがequivalentでないとすると一般性を失うことなく，$B<C$と仮定することができる。$B\subset C$である場合，

$$C-B\leq O$$

がなりたつとするならば，$B\cap O=O$がなりたつから，

$$(C-B)\cup B\leq O\cup B=B$$

がなりたつ。一方，$B\subset C$であるから，

$$(C-B)\cup B=C$$

がなりたつ。したがって，上式は，

$$C\leq B$$

となって，条件$B<C$に矛盾する。したがって，$C-B>O$がなりたつ。ここで，≤は，fineかつatomlessであるから，Sの分割$G_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$が存在して，

（1） 木村　等・広瀬文子「個人確率（3）」『香川大学経済論叢』第45巻第5・6号，1973，134ページ定理3の7。

（2） Ibid., 149ページ。

$$C-B>G_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

がなりたつ。$(C-B)\cap B=O$ であるから，

$$(C-B)\cup B>B\cup G_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

すなわち，

$$C>B\cup G_i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

をうる。すなわち，$B\subset C$ の場合には P6′ はなりたっているわけである。[3] $B\subset C$ の条件がない場合にも $B<C$ であれば，

$$B\cup G_i<C$$

がなりたつということが P6′ の意味するものである。$B\subset C$ でない場合にも，fine の条件から，$D\subset C$，$D\leq B$ となる D が存在することを定理3において証明した。[4] ここでもし，$D\subset C$，$D\doteq B$ となる D が存在することをみとめれば，$C>B\doteq D$ であるから，$C-D>O$ となり，

$$D\cup G_i<C \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

すなわち，

$$B\cup G_i<C \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

を満足する分割 $G_i(i=1,2,\cdots,n)$ が存在することとなり，P6′ がなりたつ。このようにして，$B<C$ がなりたつとき，$B\doteq D$, $D\subset C$ となる D が存在すること，すなわち，B と equivalent な事象がどこにでも存在するということから，P6′ の成立がみちびかれる。

3.6　条件つき確率

行動の間の条件つき選好関係は 2.4[5] において導入した。すなわち，D が空でない事象であるとき，

$$\mathrm{f}\leq \mathrm{g} \qquad \text{given } D$$

という関係が考えられることを示した。ここでは，さらに事象の間に条件つき選好関係を考える。3.2[6] と同様に，f_B，f_C を定義し，

(3)　このことからわかるように Ibid. 151 ページの例は不適当である。

(4)　この証明は，Ibid. 134ページにあるが，fine であることを(a)によって定義したことによって，$D<B$ となっているが(b)によって定義すれば，全く同様にして $D\leq B$ をうる。

(5)　木村　等・広瀬文子「個人確率(1)」『香川大学経済論叢』第44巻第4・5・6号，1972，133ページ。

(6)　木村　等・広瀬文子「個人確率(2)」『香川大学経済論叢』第45巻第3号，1972，98ページ。

$$\mathbf{f}_B \leq \mathbf{f}_C \qquad \text{given } D$$

がなりたつとき，

$$B \leq C \qquad \text{given } D$$

と定義する

f $\leq$ g given D の関係においては，D 以外の状態については無視されることから，D が零事象でなければ，

$$B \leq C \qquad \text{given } D$$

がなりたつことと，

$$B \cap D \leq C \cap D \qquad \text{given } D$$

がなりたつこととは同等であることが容易にわかる。さらに，$B \cap D$，$C \cap D$ ともに $\sim D$ の状態をふくまないことから，上の関係は

$$B \cap D \leq C \cap D$$

と同等であることがわかる。このことから，つぎの定理がなりたつ。

定理 1　$\leq$ が質的確率であるならば，$\leq$ given D もまた質的確率である。また，$\leq$ が fine または tight であるならば，$\leq$ given D もまた fine または tight である。

$\leq$ が fine であるならば，零事象でない任意の D に対して，$\leq$ given D は fine である。したがって，定理 3 から，$\leq$ given D とほとんど一致する唯 1 つの確率測度 $P(B \mid D)$ が存在する。これを D があたえられたときの B の条件つき確率という。$P(B \mid D)$ は D のほとんど一様な n 分割 D_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ をもちいて，つぎのようにしてえられる。すなわち，

$$k(B,n \mid D) = \max \left\{ r \mid \bigcup_{j=1}^{r} D_{i(j)} \leq B \cap D \right\}$$

とおくと，

$$P(B \mid D) = \lim_{n \to \infty} \frac{k(B,n \mid D)}{n}$$

とかくことができる。

一方，S のほとんど一様な m 分割 B_i $(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ をつくる。

$$k(D,m) = \max \left\{ r \mid \bigcup_{j=1}^{r} B_{i(j)} \leq D \right\}$$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{k(D,m)}{m} = P(D)$$

いま，$k(D,m)=n$ とおいて，D のほとんど一様な n 分割 $D_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，$D_1\geq D_2\geq\cdots\cdots\geq D_n$ をつくる。B_i の番号をつけかえて，$B_1\leq B_2\leq\cdots\cdots\leq B_n$，$\bigcup_{i=1}^{n}B_i\leq D$ となるようにする。定理13と同様にして，(7) 任意の自然数 r（$1\leq r\leq n$）に対して，

$$\bigcup_1^r B_i\leq\bigcup_1^r D_i$$

がなりたつことがわかる。B_i, D_i がほとんど一様な分割であることから，B_i の任意の $r-1$ 個と D_i の任意の $r+1$ 個の間に，

$$\bigcup_{j=1}^{r-1}B_{i(j)}<\bigcup_1^r B_i\leq\bigcup_1^r D_i<\bigcup_{j=1}^{r+1}D_{i(j)}$$

---

(7) ある r について，$\bigcup_1^r B_i\leq\bigcup_1^r D_i$（$1\leq r\leq n$）がなりたたないとき，このような r のうち最小のものをとると，

$$\bigcup_1^{r-1}B_i\cup B_r=\bigcup_1^r B_i>\bigcup_1^r D_i=\bigcup_1^{r-1}D_i\cup D_r$$

がなりたつ。$\bigcup_1^{r-1}B_i\cap B_r=\bigcup_1^{r-1}D_i\cap D_r=O$ であるから，

$$\bigcup_1^{r-1}B_i>\bigcup_1^{r-1}D_i \quad \text{または} \quad B_r>D_r$$

がなりたつ。しかしながら，$\bigcup_1^{r-1}B_i>\bigcup_1^{r-1}D_i$ がなりたつことは，r がこのような関係をみたす最小のものであるということに反する。したがって，$B_r>D_r$ がなりたつ。

$$B_n\geq B_{n-1}\geq\cdots\cdots\geq B_{r+1}\geq B_r>D_r\geq D_{r+1}\geq\cdots\cdots\geq D_{n-1}\geq D_n$$

したがって，

$$B_n>D_n,\ B_{n-1}>D_{n-1},\ \cdots\cdots,\ B_{r+1}>D_{r+1}$$

$$\bigcup_{r+1}^{n}B_i>\bigcup_{r+1}^{n}D_i$$

$$\bigcup_1^r B_i\cup(\bigcup_{r+1}^{n}B_i)>\bigcup_1^r D_i\cup(\bigcup_{r+1}^{n}D_i)$$

$$\bigcup_1^n B_i>\bigcup_1^n D_i$$

しかしながら，条件より $\bigcup_1^n B_i\leq\bigcup_1^n D_i$ であるから矛盾する。よって，このような r は存在しない。すなわち，

$$\bigcup_1^r B_i\leq\bigcup_1^r D_i \qquad (1\leq r\leq n)$$

がなりたつ。

なる関係がなりたつ。$k(B,n \mid D)=k$ とすれば，

$$\bigcup_{j=1}^{k} D_{\iota(j)} \leq B \cap D$$

がなりたつことから，

$$\bigcup_{j=1}^{k-2} B_{\iota(j)} < B \cap D$$

がなりたつ。したがって，$l=k(B \cap D,m)$ とすると，

$$l=k(B \cap D,m)=\max\left\{r \mid \bigcup_{j=1}^{r} B_{\iota(j)} \leq B \cap D\right\}$$

$$\geq k-2$$

したがって，

$$P(B \cap D)=\lim_{m\to\infty}\frac{l}{m} \geq \lim_{m\to\infty}\frac{k-2}{m}=\lim_{m\to\infty}\frac{k-2}{n}\cdot\frac{n}{m}$$

$$=P(B \mid D)\cdot P(D)$$

$$P(B \mid D) \leq P(B \cap D)/P(D) \qquad (1)$$

をうる。また同様にして，$k(D,m)=n$ から，

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_{\iota(j)} \leq D < \bigcup_{j=1}^{n+1} B_{\iota(j)}$$

がなりたつ。ここで，Dの $n+1$ 分割をつくり，D'_{ι} $(i=1,2,\cdots\cdots,n+1)$，$D'_1 \leq D'_2 \leq \cdots\cdots \leq D'_{n+1}$ とする。また，上の B_{ι} の番号をつけかえて，$B'_1 \geq B'_2 \geq \cdots\cdots \geq B'_{n+1}$ とする。

$$\bigcup_{1}^{n+1} D'_i \leq \bigcup_{1}^{n+1} B'_{\iota}$$

がなりたつことから，上と同様にして，

$$\bigcup_{j=1}^{r-2} D'_{i(j)} < \bigcup_{j=1}^{r} B'_{\iota(j)}$$

がなりたつ。したがって，$l=k(B \cap D,m)$ であるから，

$$B \cap D \geq \bigcup_{j=1}^{l} B'_{\iota(j)} > \bigcup_{j=1}^{l-2} D'_{\iota(j)}$$

したがって，

$$k(B\cap D,\ n+1 \mid D)\geq l-2$$

$$\lim \frac{k(B\cap D, n+1 \mid D)}{n+1} \geq \lim \frac{l-2}{n+1} = \lim\left(\frac{l-2}{m}\Big/\frac{n+1}{m}\right)$$

$$P(B|D)\geq P(B\cap D)/P(D) \qquad (2)$$

(1), (2)より,

$$P(B \mid D)=P(B\cap D)/P(D)$$

をうる。

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$がなりたつとき，事象$B$と$C$は独立であるという。また，任意個の事象についての独立性を，その任意の有限個の組$B_1, \cdots\cdots, B_n$について，

$$P(\cap_i B_i)=\Pi_i P(B_i)$$

がなりたつことであるとして定義する。Dが零事象でない場合，BとDが独立であるならば，

$$P(B\cap D)=P(B)\cdot P(D)$$

$$P(B|D)=P(B\cap D)/P(D)=P(B)$$

をうる。また逆もなりたつ。このようにして，BとDが独立である場合，DはBと無関係であるという。

B_iをSのn分割とする。

$$C=C\cap S=C\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}(C\cap B_i)$$

$$P(C)=P\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(C\cap B_i)\right\}$$

$$=\sum_i P(C\cap B_i)$$

$$=\sum_i P(C \mid B_i)\cdot P(B_i)$$

$P(C)\neq 0$のとき，

$$P(B_i \mid C)=\frac{P(B_i\cap C)}{P(C)}=\frac{P(C \mid B_i)\cdot P(B_i)}{P(C)}$$

$$=\frac{P(C \mid B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_j P(C \mid B_j)\cdot P(B_j)}$$

がなりたつ。これが Bayes の定理である。なお，$P(B) \neq 0$，$P(C) \neq 0$ のとき，

$$\frac{P(B \cap C)}{P(B) \cdot P(C)} = \frac{P(B \mid C)}{P(B)} = \frac{P(C \mid B)}{P(C)}$$

をうる。$P(B)$ は B の確率であり，$P(B \mid C)$ は C が知られたときの B の確率である。すなわち，$P(B \mid C)/P(B)$ は C が知られたとき，B に対する確率がどの程度変化するかという量である。上の等式は，このことと，B が知られたときの C に対する確率の変化とが等しいことを示している。

S に対して確率測度 P が定義されているとき，S と P の組を確率空間とよぶ。確率測度は，ある S の部分集合の族すなわち，可測集合族に対して定義されるのであるから，確率空間は，S と可測集合族 $\mathfrak{F}$ と確率測度 P とによって定まるのである。S にふくまれるすべての状態 s に対して，集合 X の要素 $x(s)$ を対応させる関数 $\mathbf{x}$ を確率変数という。集合 X の要素は本来何でもよいが，X が実数である場合が通常あつかわれている。$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ を同一の確率空間の上に定義された２つの確率変数であるとすれば，$\mathbf{z}=\{\mathbf{x},\ \mathbf{y}\}$ をすべての $s \in S$ について，$z(s)=\{x(s),\ y(s)\}$ として定義することによって，新しい確率変数をうる。$\mathbf{z}$ の値は，X の要素と Y の要素の順序のついた対であり，$X \times Y$ すなわち，X，Y のデカルト積の要素である。同様な構成は，n 個の値の組あるいは，無限個の値の組についても拡張することができる。

２つの確率変数 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ について，すべての事象の組 $X_0 \subset X$，$Y_0 \subset Y$，ただし，$x(s) \in X_0$，$y(s) \in Y_0$ とする，が独立であるとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は統計的に独立であるという。独立性の定義は，任意の数の確率変数についても拡張できることは同様である。

3.7 経験による確かさへの接近

原因が同一であっても結果はかならずしも同一ではない不確実性をもった現象について，経験すなわち観測をくりかえすならば，次第に原因が何であるかがはっきりしてくるという通常みとめられている原理に関して，個人確率論的に定式化するのがこの節の目的である。

ここで，サイコロの例をあげるのであるが，サイコロの確率は頻度論的に解釈され，かならずしも適当ではないが，理解をたすけるために簡単な例をあげる。正しいサイコロ A と，１の目が出る確率が $1/5$ であるような歪んだサイコロ B があるとする。いま，手にしているサイコロがどちらであるかを知るために，何回もサイコロをふってみる。100回ふって１の目が23回出たとする。このようなことは A のサイコロでは起りにくいことであり，

一方Bのサイコロでは起ってもおかしくないことである。そこで，このサイコロはBであると判断する。さらに，ふる回数をふやして，200回のうち42回1の目が出，さらに1,000回では197回1の目が出たということになれば，サイコロがBであるということは，より信頼できることになるであろう。このようなことがこの節の問題なのである。

上の例においては,原因は,サイコロがAであるのか，Bであるのかのいずれかである。一般に原因としては考えうるすべてをつくさなければならない。したがって，1つ1つの原因は，世界Sの分割と考えることができる。そこで，原因としてのSの分割を$B_i(i=1, 2, \cdots, m)$とし，B_iに対する個人確率を$P(B_i)=\beta(i)$とする。上の例では，この$\beta(i)$は問題のサイコロがAであるのか，Bであるのかに対する個人的，先験的確信の度合である。つぎに，r番目の観測結果をx_rとかき，観測は互いに独立であるとする。上の例では，サイコロをふったときr番目に出た目が1の目であるかどうかということであり，この例では当然観測は独立である。このようにして，観測値の列$x_1, x_2, x_3, \cdots$は条件B_iのもとで独立な確率変数の列であるとする。また簡単のために，x_rは有限個の値のみをとるとする。なぜなら，この有限性の仮定をとり除くことは可能であるが，そのために，我々の考えたい本質的な問題以外に数学技術上の問題を生ずることになるので，このように仮定するのである。ここで，さらにx_rは有限個の整数のみをとるとしても一般性を失うことはない。$\mathbf{x}(n)=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$によって，確率変数列$x_1, x_2, \cdots$の最初の$n$個をあらわす。また，$\mathbf{x}(n)$を簡単のために$\mathbf{x}$とかくこともある。いま条件$B_i$のもとで，すなわち，$B_i$にふくまれる状態$s$が真なるとき，$r$番目の確率変数$x_r$が特定の値$x_r$をとる確率を$\xi(x_r \mid i)$とかく。すなわち，

$$P(x_r(s)=x_r \mid B_i)=\xi(x_r \mid i) \qquad (1)$$

とする。条件B_iのもとでx_rが独立であるから，確率変数の組$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$が特定の値の組$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$をとる確率$P(x \mid B_i)$は，

$$P(x \mid B_i)=P(x(s)=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \mid B_i) \qquad (2)$$

$$=\prod_{r=1}^{n} \xi(x_r \mid i)$$

となる。ここで，$x=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$を$C$として，Bayesの定理に代入すれば，

$$P(B_i \mid x)=\frac{P(x \mid B_i)P(B_i)}{P(C)}=\frac{P(x \mid B_i)P(B_i)}{\sum_j P(x \mid B_j)P(B_j)}$$

$$=\frac{\beta(i)\prod_r \xi(x_r \mid i)}{\sum_j \beta(j)\prod_r \xi(x_r \mid j)} \qquad (3)$$

をうる。

$P(B_i \mid x)$ は，x が観測されたという条件のもとで原因 B_i の起る確率，上の例では，1,000回中197回1の目が出たということを知ったとき，問題のサイコロが B であるということに対する確率の程度であって，事後確率とよばれるものである。(3)からわかるように，$\beta(i)$ が0であるならば，x の如何なる値に対しても事後確率 $P(B_i \mid x)$ は0である。このことは，起りえないと確信していること，あるいは，事実上不可能なことは，如何なる証拠からも結論づけることはできないということを意味している。また，同様に常識的なこととして，B_i のもとで x が起らないならば，すなわち，$P(x \mid B_i)=0$ ならば，B_i の事後確率 $P(B_i \mid x)$ もまた0である。

2つの原因すなわち，分割の2つの要素 B_1，B_2 に対する x が観測されたときの事後確率について比較をこころみる。すなわち，

$$\frac{P(B_1 \mid x)}{P(B_2 \mid x)}=\frac{\beta(1)}{\beta(2)}\cdot\frac{\prod_r \xi(x_r \mid 1)}{\prod_r \xi(x_r \mid 2)}$$

$$=\frac{\beta(1)}{\beta(2)}\cdot\prod_r R'(x_r)$$

$$=\frac{\beta(1)}{\beta(2)}\cdot R(x)$$

について考える。分母，分子ともに0ならば，この比は意味をもたないし，考える必要もない。また，分子が0でなく分母が0である場合，この比は無限大になってしまうが，このような特別な場合も除いて考えることにする。$R'(x_r)$ および $R(x)$ は，それぞれ x_r および x があたえられたときの B_1，B_2 の尤度比とよばれており，統計理論上重要な量である。最初にあげたサイコロの例のうち，100回中23回1の目が出たという場合について，この量を求めれば，

$$\frac{\binom{100}{23}\left(\frac{1}{5}\right)^{23}\left(\frac{4}{5}\right)^{77}}{\binom{100}{23}\left(\frac{1}{6}\right)^{23}\left(\frac{5}{6}\right)^{77}}=\left(\frac{6}{5}\right)^{23}\left(\frac{24}{25}\right)^{77}$$

となる。

$\mathbf{x}$が観測されたとき，Rが特定の値をとる確率について考える。B_1が真であるときに起るような$x=\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$の値について$n$が十分大きい場合を考えると，このような$x$の，条件$B_1$のもとでとる確率は，他の条件$B_2$のもとでとる確率より大きいであろうから，$R$の値は大きなものとなるであろう。もちろん，$P(B_1)=0$の場合は条件付確率$P(x|B_1)$は無意味であるから考えない。また，$B_1$の条件付分布と$B_2$の条件付分布が等しいときには，$P(R'(x_r)=1|B_1)=1$となって，$B_1$と$B_2$を区別することは不可能であるから考えないこととする。すなわち，$P(B_1)=0$，$P(R'(x_r)=1|B_1)=1$とならない場合，任意の$0\leq\rho<\infty$に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P(R(x)\geq\rho \mid B_1)=1$$

がなりたつこと，すなわち，観測回数を増加すれば，尤度比はいくらでも大きくなることを示す。そのために，$P(x_r|B_1)>0$かつ$P(x_r|B_2)=0$となるようなx_rが存在する場合と，このようなx_rが存在しない場合にわけて考える。

第1の場合，すなわち，$P(x_r|B_1)=\xi(x_r|1)>0$，かつ$P(x_r|B_2)=\xi(x_r|2)=0$となるx_rが存在する場合。条件B_2のもとでの生起確率が0でないxが，条件B_1のもとで起る確率をϕとする。$\xi(x_r|2)\neq 0$であるから，

$$R'(x_r)=\xi(x_r|1)/\xi(x_r|2)<\infty$$

がなりたつ。したがって，

$$\phi=P(R'(x_r)<\infty \mid B_1)$$

とかくことができる。$\xi(x_r|1)>0$，$\xi(x_r|2)=0$となるx_rが存在するという条件から，$R'(x_r)<\infty$となるx_rは，B_1のもとで起りうるすべての値をカバーしていない。したがって，

$$\phi<1$$

x_rについての独立な観測をn回くりかえすとき，$\xi(x_r|1)>0$，$\xi(x_r|2)=0$となるx_rが起らない，すなわち，n回すべて$R'(x_r)<\infty$である確率は，

$$\begin{aligned}P(R(x)<\infty \mid B_1)&=P(R'(x_1)\cdot R'(x_2)\cdot\cdots\cdot R'(x_n)<\infty \mid B_1)\\&=P(R'(x_1)<\infty \mid B_1)\cdot P(R'(x_2)<\infty \mid B_1)\cdot\cdots\cdot P(R'(x_n)<\infty \mid B_1)\\&=\phi^n\end{aligned}$$

となる。したがって，$\xi(x_r|1)>0$，$\xi(x_r|2)=0$となるx_rが，n回のうち少なくとも1回起る確率は，$1-\phi^n$である。この場合，$R'(x_r)=\xi(x_r|1)/\xi(x_r|2)=\infty$となるか

ら，当然 $R(x)=\infty$ となる。したがって，

$$P(R(x)=\infty \mid B_1)=1-\phi^n$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty} P(R(x)=\infty \mid B_1)=\lim_{n\to\infty}(1-\phi^n)=1$$

がなりたつ。すなわち，尤度比 $R(x)$ が有限にとどまる確率 ϕ^n はいくらでも小さくなり，尤度比 $R(x)$ が ∞ である確率が 1 に近づくことがわかる。

第 2 の場合，$\xi(x_r \mid 1)>0$，かつ $\xi(x_r \mid 2)=0$ となる x_r が存在しないとき，すなわち $\phi=1$ の場合。x_r は有限個の値のみをとることを仮定したから，$R'(x_r)=\xi(x_r \mid 1)/\xi(x_r \mid 2)$ もまた有限個の値のみをとり有界である。したがって，$\log R'(x_r)$ は，独立かつ有界な確率変数となる。いま，

$$I=E(\log R'(x_r) \mid B_1)$$

とすれば，大数の弱法則によって，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\sum_{r=1}^{n}\log R'(x_r)\right)/n-E(\log R'(x_r) \mid B_1)\right|\leq\varepsilon \mid B_1\right)=1 \qquad (4)$$

となる。また，

$$\sum_{r=1}^{n}\log R'(x_r)=\log\left(\prod_r R'(x_r)\right)=\log R(x)$$

であるから，(4)式の P の中の不等式は，

$$|\log R(x)/n-I|\leq\varepsilon$$

とかける。したがって，

$$\varepsilon\geq\log R(x)/n-I\geq-\varepsilon$$

$$\log R(x)/n\geq I-\varepsilon$$

$$\log R(x)\geq n(I-\varepsilon)$$

したがって，

$$R(x)\geq e^{n(I-\varepsilon)}$$

をうる。これを(4)式に代入すれば，

$$\lim_{n\to\infty} P(R(x)\geq e^{n(I-\varepsilon)} \mid B_1)=1$$

をうる。

$$I=E(\log R'(x_r) \mid B_1)$$

$$=E(-\log R'^{-1}(x_r)\mid B_1)^{(8)}$$
$$\geq -\log E(R'^{-1}(x_r)\mid B_1)^{(9)}$$
$$=-\log 1$$
$$=0$$

ここで，等号がなりたつのは，すべての x_r について，$R'^{-1}(x_r)$ が同一の値をとるときである。

$$R'^{-1}(x_r)=\frac{\xi(x_r\mid 2)}{\xi(x_r\mid 1)}=\frac{P(x_r\mid B_2)}{P(x_r\mid B_1)}$$

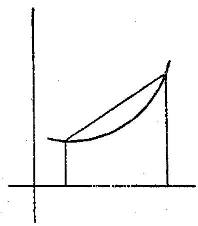
であるから，これがすべての r に対して一定であるのは，第1の場合は，すべての x_r が等しい場合であるが，これは結果が唯1つしかないという場合であって，ここで問題としている不確実性のある場合ではない。第2の場合は，すべての x_r に対して，この比が一定値 λ である場合である。すなわち，

---

(8) 線形空間の凸集合で定義された実数値関数 $f(x)$ が，定義域に属する任意の2点 x, y と $\alpha+\beta=1$ を満たす任意の α, $\beta>0$ に対して，

$$f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

を満足するとき，関数 $f(x)$ は凸関数であるという。グラフで示せば右図のように，関数が常に弦の下になっている。また等号が成立するのは，$x=y$ となるときのみであることはグラフから容易にわかる。いま，$-\log x$ は，$0<x<\infty$ で凸関数であることがわかる。上の2点および2つの係数は数学的帰納法によって，任意の有限の n に容易に拡張することができる。一方，$P_r=P(R'^{-1}(x_r)\mid B_1)$ は，有限個かつ $\sum_r P_r=1$ を満足するから，



$$E(-\log(R'^{-1}(x_r))\mid B_1)=\sum_r(-\log R'^{-1}(x_r))P(R'(x_r)\mid B_1)$$
$$\geq -\log(\sum_r R'^{-1}(x_r)\cdot P(R'(x_r)\mid B_1))$$
$$=-\log E(R'^{-1}(x_r)\mid B_1)$$

(9) $E(R'^{-1}(x_r)\mid B_1)=E\left(\frac{\xi(x_r\mid 2)}{\xi(x_r\mid 1)}\mid B_1\right)$

$$=\sum_r\frac{\xi(x_r\mid 2)}{\xi(x_r\mid 1)}P(x_r\mid B_1)$$
$$=\sum_r\frac{\xi(x_r\mid 2)}{\xi(x_r\mid 1)}\xi(x_r\mid 1)$$
$$=\sum_r\xi(x_r\mid 2)$$
$$=1$$

$$\frac{\xi(x_r \mid 2)}{\xi(x_r \mid 1)}=\lambda \qquad (r=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

このとき

$$\lambda=\lambda\cdot 1=\lambda(\sum_r \xi(x_r \mid 1))$$
$$=\sum_r \lambda\xi(x_r \mid 1)$$
$$=\sum_r \frac{\xi(x_r \mid 2)}{\xi(x_r \mid 1)}\cdot\xi(x_r \mid 1)$$
$$=\sum_r \xi(x_r \mid 2)$$
$$=1$$

をうる。したがって，すべての x_r に対して，この比が1となることになる。すなわち，

$$P(R'(x)=1 \mid B_1)=1$$

となることであって，このような場合は，B_1 の条件付分布と B_2 の条件付分布が等しいときであり，B_1 と B_2 を区別することは不可能であるから考えないことにしているものである。したがって，上の不等式の等号がなりたつことはない。このようにして，

$$I>0$$

をうる。したがって，十分小さい $\varepsilon>0$ に対して，

$$I-\varepsilon>0$$

がなりたつから，

$$\lim_{n\to\infty} e^{n(I-\varepsilon)}=\infty$$

がなりたち，任意の $0\leq\rho<\infty$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P(R(x)\geq e^{n(I-\varepsilon)}\geq\rho \mid B_1)=1$$

がなりたつ。

$$\lim_{n\to\infty} P(R(x)\geq\rho \mid B_1)=1$$

において，

$$R(x)\geq\rho$$

について考える。

$$\frac{P(B_1 \mid x)}{P(B_2 \mid x)}=\frac{\beta(1)}{\beta(2)}R(x)\geq\frac{\beta(1)}{\beta(2)}\rho=\rho'$$

$$P(B_2 \mid x)\leq\frac{P(B_1 \mid x)}{\rho'}\leq\frac{1}{\rho'}$$

$\beta(1), \beta(2)$は定数であるから，ρ'は任意にとれる。したがって，$\varepsilon = 1/\rho'$とすれば，

$$\lim_{n\to\infty} P(P(B_2 \mid x) \leq \varepsilon \mid B_1) = 1$$

がなりたつ。これは，B_2に$i=1$以外のすべてのB_iを代入しても，常になりたつ。

$$\sum_i P(B_i \mid x) = 1$$

であるから，

$$\sum_{i=2}^{n} P(B_i \mid x) \leq (n-1)\varepsilon$$

$$P(B_1 \mid x) > 1-(n-1)\varepsilon = \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i \neq 1} P(B_i \mid x) \leq (n-1)\varepsilon \mid B_1) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P(P(B_1 \mid x) > \alpha \mid B_1) = 1$$

ただし，αは1に近い任意の数とする。結局，B_1が原因であるとき，観測をくり返した結果，その観測の条件のもとでB_1であると判断される確率はいくらでも1に近くなることが，観測を増加すれば確率1でいえるということである。

観測がなされていない時点において，観測を行ったと仮定して正しい結論をうる確率について考えてみる。すなわち，特定の観測がなされた上での問題としてではなく論理の問題としての観測と確率について考える。原因がB_1であるとき，観測xにもとづいて原因をB_1とする確率がαより大きい確率は，

$$P(P(B_1 \mid x) > \alpha \mid B_1)$$

であり，原因がB_2であるとき，観測xにもとづいて原因をB_2とする確率がαより大きい確率は，

$$P(P(B_2 \mid x) > \alpha \mid B_2)$$

であり，……。したがって，観測xにもとづいて正しい結論を得る確率は，上の確率の期待値であるから，

$$\sum_i \beta(i) P(P(B_i \mid x) > \alpha \mid B_i)$$

とかける。ここで，$\beta(i)$ $(i=1, \cdots, m)$は0でないとし，相異なるi, jに対して，$\xi(x_r \mid i), \xi(x_r \mid j)$が相異なる分布であるとする。このとき，観測回数$n$が大きくなったときは前に示したように，どの$P(P(B_i \mid x) > \alpha \mid B_i)$も1に近づくから，期待値もまた1に近づく。すなわち，観測回数が増加し，データがふえれば大きい確率で正しい結論をみちび

きうると高く評価してよいということである。ここでは，論理の問題としての観測と，正しい結論をうる確率との間の関係について論じたが，特定の観測にもとづいての判断については節をあらためて論ずる。

3.8 事象の symmetric sequence

観測の系列から，ある事象の起る確率を推定することは統計学における重要な問題の1つである。客観主義的な立場からは，この問題は重要であるのみならず自然である。なぜならば，この立場にたつならば，たとえば1つの貨幣をなげたときの表の出る確率は，この貨幣についての実験によってのみ決定しうるものであって，他のいかなる方法によっても決定しえないものであるからである。しかしながら，個人確率の立場にたつならば，いかなる確率も当該個人にとって未知ということはありえない。あるいは，未知でないといえないまでも，少なくとも自分自身に問いかけることによってのみ決定できるものであり，外の世界に問いかけることを必要としないであろう。このように，この立場からは統計学の典型的な問題の1つをとりあつかうことができないのである。このことは，個人確率の概念がまちがいであるか，あるいは，少なくとも不適当であるということを示すものとして考えられてきた。したがって，このような問題をとりあつかうためには，客観確率と個人確率の両方を含むような理論を展開する必要があるように考えられる。しかしながら，de Finetti はその必要はなく，貨幣をなげた場合の確率もまた主観的確率としての解釈が可能であると考えている。本節はこのような立場からの考え方の大要を述べることにする。

$\mathbf{x}_r$ を0，1のみをとる確率変数列とする。$\mathbf{x}_r$ はまた，事象 $x_r(s)=1$，$x_r(s)=0$ の系列であると考えてもよい。$x_r(s)=1$ が起る確率を p とすれば，$x_r(s)=0$ の起る確率は $1-p$ であり，これらの事象が独立ならば，任意の0と1からなる有限系列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ に対して，

$$P(x_r(s)=x_r; r=1,2,\cdots\cdots,n \mid p)=p^y(1-p)^{n-y} \tag{1}$$

がなりたつ。ここで，y は $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ に含まれる1の個数である。いま，世界はいくつかの B_i に分割されているとし，あたえられた B_i に対して，$\mathbf{x}_r$ は，$P(x_r(s)=1 \mid B_i)=p(i)$ をもつ独立な事象の系列であるとするならば，0，1の任意の有限系列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ をうる確率は，(1)の混合

$$P(x_r(s)=x_r; r=1,2,\cdots\cdots,n)=\sum_i p(i)^y(1-p(i))^{n-y}P(B_i)$$

となる。これを一般化して，

$$P(x_r(s)=x_r\,;r=1,2,\cdots\cdots,n)=\int p^y(1-p)^{n-y}dM(p) \qquad (2)$$

とかく。

$$P(x_r(s)=x_r\,;r=1,2,\cdots\cdots,n)=P(x_r(s)=x_r\,;r=1,2,\cdots\cdots,n\,;x_{n+1}(s)=0)$$
$$+P(x_r(s)=x_r\,;r=1,2,\cdots\cdots,n\,;x_{n+1}(s)=1)$$

がなりたつこと，および $P(x_r(s)=x_r\,;r=1,2,\cdots\cdots,n)$ は系列 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ のうちの1の個数によって定まり，順序に関係なく $p^y(1-p)^{n-y}$ となることから，任意の有限系列に対して(2)式がなりたつことは，任意の n に対して，すべてが1である確率が，

$$\int p^n dM(p)$$

であることと同値である。ここで，M は1の起る確率 p に対する確率分布である。個人確率は，個人が自分自身に問いかけることによってのみ決定できると述べたが，問いかけるのは結局，個人のもつ経験に問いかけるのである。したがって，経験が十分でないときは，1つの値にすることはできず，ある程度のあいまいさをもつことになる。これが p の確率分布 $M(p)$ であると考えられる。ある状況のもとで，このように定まる確率分布 $M(p)$ を先験的確率分布とよんでいる。ここで更に経験を重ねるならば，事象の生起確率 p に対する評価は変化する。すなわち，確率分布 $M(p)$ が変化するという立場に立つこととする。上記問題をとりあつかうために，つぎのように定義される symmetric sequence を考える。

0，1のみをとる確率変数の列 $\mathbf{x}_r$ について，1の個数が b 個，0の個数が c 個あらわれる確率が数 b と c のみによって定まり，1，0の生起の有限系列には関係しないとき，この $\mathbf{x}_r$ を symmetric sequence という。

(2)式から容易にわかるように，独立な事象の列の混合は symmetric sequence である。De Finetti は逆もまたなりたつことを示している。これを定理の形にまとめれば，つぎのようになる。

定理1　0，1のみをとる確率変数の列 $\mathbf{x}_r$ が symmetric sequence であるための必要かつ十分な条件は，あたえられた n に対して，$x_r(s)$ のすべての n 個が1である確率が

$$\int p^n dM(p)$$

を満たすような，区間〔0，1〕の上の確率測度 M が存在することである。このような条

件を満たす2つの確率測度 M, M' について，〔0，1〕の部分区間 B に対して，

$$M(B)=M'(B)$$

がなりたつ。

たとえば，ある個人が「この貨幣の表の出る確率は知らないけれども，たかだか½であることは確かだ」と言ったとすれば，これは，「この貨幣をなげたときにえられる表，裏の生起系列は symmetric sequence であって，このとき定まる M は〔0，½〕で確率測度1をもつ」ということを意味する。したがって，n 回ひきつづいて1の出る確率は，たかだか $(½)^n$ となる。

いま，

$$\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_1^n x_r$$

とすれば，

$$E(\bar{x}_n \mid p)=p,\quad V(\bar{x}_n \mid p)=\frac{p(1-p)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bar{x}_n<p+\varepsilon \mid p)=1$$

がなりたつ。したがって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(\bar{x}_n<\delta) &= \lim_{n\to\infty}\int P(\bar{x}_n<p+\varepsilon\leq\delta \mid p)dM(p)\\ &=\lim_{n\to\infty}\int_{p+\varepsilon\leq\delta} 1\,dM(p)\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\delta-\varepsilon} 1\,dM(p)\\ &=M(p<\delta)\end{aligned}$$

をうる。このことはすなわち，人は将来の多数の観測の平均値は，p と大体同じように分布すると考えるということである。

つぎに，symmetic sequence のはじめの n 個が観測されたとき，この観測にもとづいて，人はこの後の系列がどのようにあらわれると考えるであろうか。まず，symmetric sequence であるということは変わらないであろう。ここで，y 個の1と $n-y$ 個の0からなる有限系列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ に対して，

$$\pi(y,n-y)=P(x_r(s)=x_r;r=1,2,\cdots\cdots,n)=\int p^y(1-p)^{n-y}dM(p)$$

とかくこととする。このとき,

$$P(x_q(s)=x_q;q=n+1,\cdots\cdots,n+m \mid x_r(s)=x_r;r=1,2,\cdots\cdots,n)$$

$$=\frac{P(x_t(s)=x_t;t=1,2,\cdots\cdots,n+m)}{P(x_r(s)=x_r;r=1,2,\cdots\cdots,n)}$$

$$=\frac{\pi(y+z,(n-y)+(m-z))}{\pi(y,n-y)} \qquad (3)$$

ただし,z は0,1の有限系列 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots\cdots,x_{n+m}$ に含まれる1の個数である。このような系列の生起確率は,$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n+m}$ のすべての系列から最初の n 個の系列が,$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ となるものを選びだし,その中での確率を考えればよいから,

$$\pi'(z,m-z)=\frac{\pi(y+z,(n-y)+(m-z))}{\pi(y,n-y)} \qquad (4)$$

をうる。すなわち,$x_{n+1},\cdots\cdots,x_{n+m}$ は(4)によって規定される新しい symmetric sequence である。この新しい symmetric sequence に対応する確率測度を M' とすれば,

$$\int p^m dM'(p)=\pi'(m,\ 0)$$

$$=\frac{\pi(y+m,n-y)}{\pi(y,n-y)}$$

$$=\frac{\int p^{y+m}(1-p)^{n-y}dM(p)}{\pi(y,n-y)}$$

$$=\int p^m\frac{p^y(1-p)^{n-y}}{\pi(y,n-y)}dM(p)$$

がなりたつ。このことから,〔0, 1〕のボレル集合 B に対して,

$$M'(B)=\pi^{-1}(y,n-y)\int_B p^y(1-p)^{n-y}dM(p)$$

がなりたつと考えてよいであろう。

このことから,たとえば,$M(B)=0$ ならば $M'(B)=0$ をうる。このことは,人が p は B に含まれないと考えたならば,いかなる論拠をもってしても「B には含まれない」という彼の意見を変えることはできないことを意味する。また,p の1つの値に対して M が1となる場合すなわち,人がある特定の値 p_0 に対して確信をもつならば,

$$\pi(y,n-y)=\int p^y(1-p)^{n-y}dM(p)=p_0^y(1-p_0)^{n-y}$$

となり,M' もまた p_0 において確率測度1をもつ。このような場合を除けば M' は M と異

なるものとなる。すなわち，経験によって意見が変わるのである。

n 回の観測の後の p の分散は，

$$V=\int p^2dM'(p)-\left(\int pdM'(p)\right)^2=\frac{\pi(y+2,\ n-y)}{\pi(y,n-y)}-\left\{\frac{\pi(y+1,n-y)}{\pi(y,n-y)}\right\}^2$$

である。

$$dM'(p)=\pi^{-1}(y,n-y)\cdot p^y(1-p)^{n-y}dM(p)$$

において，M が一様分布であるとするならば，

$$\pi(y,n-y)=\int_0^1 p^y(1-p)^{n-y}dp=B(y+1,\ n-y+1)$$

となるから，

$$V=\frac{B(y+3,\ n-y+1)}{B(y+1,\ n-y+1)}-\left\{\frac{B(y+2,\ n-y+1)}{B(y+1,\ n-y+1)}\right\}^2$$

$$=\frac{(y+2)(y+1)}{(n+3)(n+2)}-\left(\frac{y+1}{n+2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n+3}\cdot\left(\frac{y}{n}+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{y}{n}+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{n}\cdot\frac{y}{n}\left(1-\frac{y}{n}\right)$$

となるから，y/n を一定にして n を大きくすれば，V は0に近づく。すなわち，分散はいくらでも小さくなる。M が一様分布でない場合も同様なことが示せる。

上のことは，結局，十分長い系列について観測が行なわれた後には，p の分散が小さくなる。すなわち，観測値 y/n の近くの p の値に確率測度が集中する。このことは，経験をくり返した後には観測値に近い値に確信をもつようになるということであり，前節と同様の結果が導かれる。

「個人確率 (3)」『香川大学経済論叢』 第45巻第5・6号, 1973

正 誤 表

頁	行	誤	正
126	4	満足する C が存在する。	満足する$C\subset B$が存在する。
128	14	$B_i\cap B_j=O$であるから,	$B_i\cap B_j=O(i\neq j)$ であるから,
133	29	$B\cup G>C$かつ, $C\cup H>B$がなりたつとき,	$B\cup G\geq C$かつ, $C\cup H\geq B$がなりたつとき,
135	18	$B\cup E_1>G$	$B\cup E_1\geq G$
	20	$C\cup E_2>H$	$C\cup E_2\geq H$
	24	$G\cup H<(B\cup E_1)\cup(C\cup E_2)$	$G\cup H\leq(B\cup E_1)\cup(C\cup E_2)$
136	1	$B\cup C<(G\cup H)\cup F$	$B\cup C\leq(G\cup H)\cup F$
	8	$B<G\cup E_1$, $C<H\cup E_2$	$B\leq G\cup E_1$, $C\leq H\cup E_2$
	12	$B\cup C<(G\cup E_1)\cup(H\cup E_2)$	$B\cup C\leq(G\cup E_1)\cup(H\cup E_2)$
	13	$=(G\cup H)\cup E\leq S\doteq B\cup C$	$=(G\cup H)\cup E<S\doteq B\cup C$
	19	$B\cup E\leq G$となるような	$B\cup E<G$となるような
	24	$(B\cup C)\cup E'>G\cup H$	$(B\cup C)\cup E'\geq G\cup H$
	26	$(B\cup E')\cup C>G\cup H$	$(B\cup E')\cup C\geq G\cup H$
	27	定理11の系1(5)によって,	定理11によって,
	28	$B\cup E'>G$または$C>H$	$B\cup E'\geq G$または$C\geq H$
137	2	$G\geq B\cup E>B\cup E'$	$G>B\cup E>B\cup E'$
	3	$B\cup E'>G$	$B\cup E'\geq G$
	4	$C>H$	$C\geq H$
	8	$B\cup E\leq G\leq C$	$B\cup E<G\leq C$
	13	$C>H$をもちいて,	$C\geq H$をもちいて,
	14	$C\cup E''>H\cup E''$	$C\cup E''\geq H\cup E''$
	16	$H\cup E''>G$	$H\cup E''\geq G$
	17	$G\geq B\cup G$がなりたつから,	$G>B\cup E$がなりたつから,
	19	定理11の系1によって,	定理11の系1(5)によって,
138	7	$C<B\cup E_1<B\cup E\leq G$	$C\leq B\cup E_1<B\cup E<G$

頁	行	誤	正
139	7	かならず右辺の方が	右辺の方が
	9	$\bigcup_{j=1}^{r} B_{i(j)} < \left(\bigcup_{k=1}^{r} B_{i(k)}\right) \cup B_i$	$\bigcup_{j=1}^{r} B_{i(j)} \leq \left(\bigcup_{k=1}^{r} B_{i(k)}\right) \cup B_i$
	17	$\bigcup_{i=1}^{r} E_i < E_{r+1} \cup \left(\bigcup_{i=r+2}^{n} E_i\right)$	$\bigcup_{i=1}^{r} E_i \leq E_{r+1} \cup \left(\bigcup_{i=r+2}^{n} E_i\right)$
142	4	$F_j \cap G_n \leq F_j \leq G'_n < G''_n$	$F_j \cap G_n \leq F_j < G'_n \leq G''_n$
144	11	$B_1 \cup H > C_{n+1} \cup G_{n+1} \cup V$(定理10の系による)	$B_1 \cup H \geq C_{n+1} \cup G_{n+1} \cup V$ (定理10による)
145	28	$B \cup G > C$, $C \cup H > B$	$B \cup G \geq C$, $C \cup H \geq B$
149	6	定理 3 の系 1 から,	定理 3 の系から,
	11	ならびの和よりも	ならびに対応づけるとする。この 1 つの要素とBの和よりも
	〃	存在することは,	存在することを主張するのは,
152	25	$B \cup G > C$がなりたつ。	$B \cup G \geq C$がなりたつ。
	27	$P(C) < P(B \cup G) = P(B) + P(G)$	$P(C) \leq P(B \cup G) = P(B) + P(G)$
153	4	$B < C \cup H$がなりたつ	$B \leq C \cup H$がなりたつ
	13	$B \subset S$なるBは$B=_2$	$B \subset S$なるBは$B=$
	14	矩形$B_1 \times B$	矩形$B_1 \times B_2$

「個人確率」(3) 『香川大学経済論叢』 第45巻 第5・6号, 1973, 139 ページ10行目のほとんど一様な分割を 117 ページのように定義すればこのような結論は出せない。しかし, ほとんど一様な分割の定義に等号を含めればこのような結論に達する。また, 他の命題については後者のように定義してもすべてなりたつ。