研究ノート

小標本における2×2分割表とχ^2分布

木　村　　　等

I　多項分布とχ^2分布

多項分布とχ^2分布の関連をR．A．フィッシャー〔1〕にしたがって述べる。n個の球を無作為にk個の箱に投げ入れる場合について考える。箱iに入った球の数をx_iとすれば，x_1，x_2，…，x_kの結合分布は，

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k} \tag{1}$$

となる。ここで，p_iは球が箱iに落ちる確率である。このとき，

$$\begin{aligned}E(x_i)&=\sum x_i\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k}\\&=np_i\sum\frac{(n-1)!}{x_1!\cdots(x_i-1)!\cdots x_k!}p_1^{x_1}\cdots p_i^{x_i-1}\cdots p_k^{x_k}\\&=np_i(p_1+\cdots+p_k)^{n-1}\\&=np_i=m_i\end{aligned} \tag{2}$$

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=n(p_1+\cdots+p_k)=n \tag{3}$$

いま，x_iが互に独立なポアソン分布

$$e^{-m_i}\frac{m_i^{x_i}}{x_i!} \tag{4}$$

にしたがうとする。ここで，

$$\begin{aligned}E(x_i)&=\sum_{x_i=0}^{\infty}x_ie^{-m_i}\frac{m_i^{x_i}}{x_i!}=e^{-m_i}\sum_{x_i=1}^{\infty}\frac{m_i^{x_i}}{(x_i-1)!}=e^{-m_i}m_i\sum_{y_i=0}^{\infty}\frac{m_i^{y_i}}{y_i!}=m_ie^{-m_i}e^{m_i}\\&=m_i\end{aligned}$$

$$E(x_i(x_i-1))=\sum_{x_i=0}^{\infty}x_i(x_i-1)e^{-m_i}\frac{m_i^{x_i}}{x_i!}=e^{-m_i}m_i^2\sum_{x_i=2}^{\infty}\frac{m_i^{x_i-2}}{(x_i-2)!}=m_i^2e^{-m_i}e^{m_i}$$

$$=m_i^2$$

$$V(x_i)=E(x_i^2)-\{E(x_i)\}^2=E(x_i(x_i-1))+E(x_i)-\{E(x_i)\}^2$$
$$=m_i^2+m_i-m_i^2=m_i$$

x_1, x_2, …, x_k の結合分布は,

$$\prod_{i=1}^{k} e^{-m_i}\frac{m_i^{x_i}}{x_i!}=e^{-\sum m_i}\prod_{i=1}^{k}\frac{m_i^{x_i}}{x_i!} \tag{5}$$

となる。ここで, $\sum x_i=T$ の分布を考える。T が T_0 である確率は,

$$p(T=T_0)=\sum_{\sum x_i=T_0} e^{-\sum m_i}\prod_{i=1}^{k}\frac{m_i^{x_i}}{x_i!}=e^{-n}\sum_{\sum x_i=T_0}\prod_{i=1}^{k}\frac{m_i^{x_i}}{x_i!}$$

$$=e^{-n}\frac{1}{T_0!}\sum_{\sum x_i=T_0}\frac{T_0!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}m_1^{x_1}m_2^{x_2}\cdots m_k^{x_k}=e^{-n}\frac{1}{T_0!}(m_1+m_2+\cdots+m_k)^{T_0}$$

$$=e^{-n}\frac{n^{T_0}}{T_0!} \tag{6}$$

となる。すなわち, T は平均 n, 分散 n のポアソン分布にしたがう。T_0 を n にとって, (5)を(6)でわれば, $\sum_{i=1}^{k}x_i=n$ という条件のもとでの x_i の条件つき分布がえられる。すなわち,

$$\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}\frac{m_1^{x_1}m_2^{x_2}\cdots m_k^{x_k}}{n^n}=\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}\left(\frac{m_1}{n}\right)^{x_1}\left(\frac{m_2}{n}\right)^{x_2}\cdots\left(\frac{m_k}{n}\right)^{x_k} \tag{7}$$

ここで,

$$\frac{m_i}{n}=p_i$$

であるから, (7)は(1)に一致する。したがって多項分布(1)にしたがう x_i は, $\sum x_i=n$ を条件とし, 独立なポアソン分布にしたがうものと考えることができる。x_i は, 平均 m_i 分散 m_i のポアソン分布にしたがうことから,

$$y_i=\frac{x_i-E(x_i)}{\sqrt{V(x_i)}}=\frac{x_i-m_i}{\sqrt{m_i}} \tag{8}$$

は, m_i が大きいとき, 極限においては, 平均0, 分散1の正規分布にしたがう。このようにして n が充分大きいとき,

$$X^2=\frac{(x_1-m_1)^2}{m_1}+\frac{(x_2-m_2)^2}{m_2}+\cdots\cdots+\frac{(x_k-m_k)^2}{m_k}$$

$$=y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots\cdots+y_k{}^2 \tag{9}$$

は，平均0，分散1の正規分布にしたがう独立な確率変数の自乗和であるから，X^2 は χ^2 分布にしたがうことがわかる。幾何学的に考えれば，

$$X^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_k^2=X_0^2 \text{（常数）}$$

を満足する（y_1，y_2，$\cdots$，y_k）の集合は，k 次元空間における，原点を中心とし半径 X_0 の球の表面である。つぎに，

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=n$$

について考える。これから（3）を辺々引き算すれば，

$$(x_1-m_1)+(x_2-m_2)+\cdots\cdots+(x_k-m_k)=0 \tag{10}$$

をうる。これを y_i で表現すれば，

$$y_1\sqrt{m_1}+y_2\sqrt{m_2}+\cdots\cdots+y_k\sqrt{m_k}=0 \tag{11}$$

をうる。$\sqrt{m_i}$ は常数であるから，(11) は原点を通る $(k-1)$ 次元超平面である。したがって，$\sum x_i=n$ を満足し，$X^2=X_0^2$ となる点の集合は，y 空間では，原点を中心とし半径が X_0 である球面と，超平面 (11) の交わりである。したがって，この集合は $(k-1)$ 次元空間の図形となる。これが自由度が $(k-1)$ となることの幾何学的な説明である。

II　2×2分割表

x_{11}	x_{12}	r_1
x_{21}	x_{22}	r_2
c_1	c_2	n

左のような2×2分割表を考える。この場合 x_{ij} に関する制限条件は，

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}&=n\\
x_{11}+x_{12}\qquad\qquad\quad &=r_1\\
x_{21}+x_{22}&=r_2\\
x_{11}\qquad+x_{21}\qquad &=c_1\\
x_{12}\qquad+x_{22}&=c_2
\end{aligned} \tag{12}$$

である。なお，r_i，c_i $(i=1,\ 2)$ は条件

$$r_1+r_2=c_1+c_2=n$$

を満足しなければならない。この条件のために上の5個の条件式のうち一次独立なものは3個となる。例えば，

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}=n\\
&x_{11}+x_{12}=r_1\\
&x_{11}+x_{21}=c_1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

が1組の一次独立な条件である。ここで標本が箱$(i,\ j)$におちる確率を$p_{ij}(i,\ j=1,\ 2)$，その他通常のかき方に従って，

$$\sum_{j=1}^{2}p_{ij}=p_{i\cdot}\quad,\quad\sum_{i=1}^{2}p_{ij}=p_{\cdot j},$$

$$E(x_{ij})=np_{ij}=m_{ij},\ E(r_i)=np_{i\cdot}=m_{i\cdot},\ E(c_j)=np_{\cdot j}=m_{\cdot j}$$

$$y_{ij}=(x_{ij}-m_{ij})/\sqrt{m_{ij}}$$

とかくこととする。$\sum m_{ij}=n\sum p_{ij}=n$ および上の関係式をもちいて，(13) から

$$
\begin{aligned}
&(x_{11}-m_{11})+(x_{12}-m_{12})+(x_{21}-m_{21})+(x_{22}-m_{22})=0\\
&(x_{11}-m_{11})+(x_{12}-m_{12})=r_1-m_{1\cdot}\\
&(x_{11}-m_{11})+(x_{21}-m_{21})=c_1-m_{\cdot 1}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

をみちびくことができる。これを，y_{ij} をもちいて書けば，

$$
\begin{aligned}
&y_{11}\sqrt{m_{11}}+y_{12}\sqrt{m_{12}}+y_{21}\sqrt{m_{21}}+y_{22}\sqrt{m_{22}}=0\\
&y_{11}\sqrt{m_{11}}+y_{12}\sqrt{m_{12}}=r_1-m_{1\cdot}\\
&y_{11}\sqrt{m_{11}}+y_{21}\sqrt{m_{21}}=c_1-m_{\cdot 1}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

となる。ここで，パラメータ m_{ij}，$m_{1\cdot}$，$m_{\cdot 1}$ は確率 p_{ij} によって定まる。したがって，各箱におちる確率 p_{ij} および周辺度数があたえられれば，(15) は，解

$$(y_{11},y_{12},y_{21},y_{22})=\left(z,\frac{r_1-m_{1\cdot}}{\sqrt{m_{12}}}-z\frac{\sqrt{m_{11}}}{\sqrt{m_{12}}},\ \frac{c_1-m_{\cdot 1}}{\sqrt{m_{21}}}-z\frac{\sqrt{m_{11}}}{\sqrt{m_{21}}},\ z\frac{\sqrt{m_{11}}}{\sqrt{m_{22}}}\right.$$
$$\left.-\frac{(r_1-m_{1\cdot})}{\sqrt{m_{22}}}-\frac{(c_1-m_{\cdot 1})}{\sqrt{m_{22}}}\right)\tag{16}$$

をもつ。ここで，z は任意の実数であるから，(16) は4次元空間の1本の直線をあらわすことになる。一方1つの2×2分割表から（y_{11}，y_{12}，y_{21}，y_{22}）の値が1つ定まる。これを4次元空間の点と考えれば，この点は以上の考察から，直線 (16) の上にあることがわかる。1つの表に対応して，1つの X^2 の値と，この表をうる確率が定まるから，X^2 は，この直線の上に分布するといってよいであろう。つぎに，この直線について考えてみる。$m_{1\cdot}$，$m_{\cdot 1}$ は周辺度数の期待値であり，r_1，c_1 は周辺度数の実現値である。したがって，n が大きくなったとき，極限においては $r_1-m_{1\cdot}$，$c_1-m_{\cdot 1}$ は0となるから，(16) は $(z,\ \alpha_2 z,$

$\alpha_3 z,\ \alpha_4 z)$ となり，原点を通る直線をあらわすこととなる。n が有限の場合には r_1 と $m_{1.}$，c_1 と $m_{.1}$ はかならずしも一致しないから，直線(16)はかならずしも原点を通るとはかぎらない。しかしながら，通常独立性の検定においては，仮説として，

$$(H_0) \qquad p_{ij}=p_{i.}p_{.j} \qquad (17)$$

をとり，$p_{i.}$，$p_{.j}$ を周辺度数からの最尤推定値

$$p_{i.}=\frac{r_i}{n},\quad p_{.j}=\frac{c_j}{n},\quad i,\ j=1,\ 2$$

をもちいる。このようにすれば，

$$r_1-m_{1.}=0,\quad c_1-m_{.1}=0$$

となって，直線(16)は原点を通るようになる。この場合標本数が小さい場合にも，X^2 の分布は χ^2 分布に割合近いことを〔2〕において示した。例えば〔2〕の表7は，周辺度数 r_1，r_2；c_1，c_2 がそれぞれ，7,5；5,7であるから，

$$p_{1.}=0.58333,\quad p_{2.}=0.41667,\quad p_{.1}=0.41667,\quad p_{.2}=0.58333$$

となっている。いまこの値が少しかわったとき，すなわち，直線(16)が原点を通らない場合に，X^2 の分布と χ^2 分布とのあてはまりはどうであるかをみてみる。周辺度数があたえられた場合 $p_{ij}=p_{i.}p_{.j}$ がなりたてば確率 $p(x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22}\mid r_1,\ r_2,\ c_1,\ c_2)$ はパラメータ p_{ij} あるいは，$p_{i.}$，$p_{.j}$ に依存しない，かわるのは X^2 の方である。[(1)] いま

$$p_{1.}=p_{2.}=p_{.1}=p_{.2}=0.5 \quad したがって \quad p_{11}=p_{12}=p_{21}=p_{22}=0.25$$

にとったときの X^2 の値および確率を表1，2にあげた。X^2 の値は4個になり，連続な

---

(1) $p(x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\mid r_1,r_2,c_1c_2)$

$$=\frac{n!}{x_{11}!x_{12}!x_{21}!x_{22}!}p_{11}{}^{x_{11}}p_{12}{}^{x_{12}}p_{21}{}^{x_{21}}p_{22}{}^{x_{22}}\Big/\frac{n!}{r_1!r_2!}p_{1.}{}^{r_1}p_{2.}{}^{r_2}\cdot\frac{n!}{c_1!c_2!}p_{1.}{}^{c_1}p_{.2}{}^{c_2}$$

$$=\frac{n!}{x_{11}!x_{12}!x_{21}!x_{22}!}(p_{1.}p_{.1})^{x_{11}}(p_{1.}p_{.2})^{x_{12}}(p_{2.}p_{.1})^{x_{21}}\Big/\frac{n!}{r_1!r_2!}\frac{n!}{c_1!c_2!}p_{1.}{}^{r_1}p_{2.}{}^{r_2}p_{.1}{}^{c_1}p_{.2}{}^{c_2}$$

$$=\frac{r_1!r_2!c_1!c_2!}{n!x_{11}!x_{12}!x_{21}!x_{22}!}$$

$(x_{11}+x_{12}=r_1,x_{21}+x_{22}=r_2,x_{11}+x_{21}=c_1,x_{12}+x_{22}=c_2)$，

このように $p(x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\mid r_1,r_2,c_1,c_2)$ は p_{ij} に依存しない。一方 $X^2=\sum\frac{(x_{ij}-np_{ij})^2}{np_{ij}}$ であるから，X^2 は p_{ij} に依存する。

表1　($p_{11}=p_{12}=p_{21}=p_{22}=0.25$)

0	7	7
5	0	5
5	7	12

$X^2=12.6666667$
$p=0.0016226$

1	6	7
4	1	5
5	7	12

$x^2=6.0000000$
$p=0.0441919$

2	5	7
3	2	5
5	7	12

$X^2=2.0000000$
$p=0.2651515$

3	4	7
2	3	5
5	7	12

$x^2=0.6666667$
$p=0.4419192$

4	3	7
1	4	5
5	7	12

$x^2=2.0000000$
$p=0.2209596$

5	2	7
0	5	5
5	7	12

$x^2=6.0000000$
$p=0.0265152$

表2

x_i	$p(X^2\geqq x_i)$	$p(\chi^2\geqq m_i)$	m_i ***
0.66667	1.00000 (0.44192)*	1.00000 (0.75179)**	0.
2.00000	0.55808 (0.48611)	0.24821 (0.20271)	1.33333
6.00000	0.07197 (0.07071)	0.04550 (0.04325)	4.00000
12.66667	0.00126 (0.00126)	0.00225 (0.00225)	9.33333

* 括弧の中は $p(X^2=x_i)$

** 〃 $p(m_{i-1}\leqq\chi^2<m_i)$

*** m_i については〔2〕参照

χ^2 分布とのあてはまりは，〔2〕の表7，8の場合より悪いことがわかる。表3は $n=100$ の場合のものである。X^2 の値の小さいところに，あてはまりのよくないところがみうけられる。

以上の例から，周辺度数を固定した場合，$p_{i\cdot}$，$p_{\cdot j}$ として r_i/n，c_j/n をもちいるならば，直線(16)は極限の状態と同じように原点を通ることとなり，最もχ^2分布に近いものが得られると考えてよさそうである。つぎに n を固定した場合の可能な全ての表をつく

り，周辺度数 r_i，c_j のものについて，$p_{i\cdot}=r_i/n$，$p_{\cdot j}=c_j/n$ によって X^2 の値を計算する。こうして得られた確率 $p(X_0^2)$ を，$p_{1\cdot}=p_{2\cdot}=p_{\cdot 1}=p_{\cdot 2}=0.5$ としたとき，その周辺度数をうる確率を重みとして加重平均する。特定の周辺度数をうる確率を計算するためには，$p_{i\cdot}=p_{\cdot j}=0.5$ をもちい，その表における X^2 を計算するためには $p_{i\cdot}=r_i/n$，$p_{\cdot j}=c_j/n$ をもちいることは矛盾であろうが，平均的なものをみるという考え方でこのようにとりあつかった（表4）。この場合 χ^2 分布と相当よい適合を示している。もちろん，重みの計算において，0.1，0.9というような確率をもちいて，$r_1=1$，$r_2=9$ というようにバランスの悪い周辺度数に大きな重みをあたえて平均すれば χ^2 分布との適合は悪くなる。なお上で述べた矛盾をさけて，$p_{i\cdot}=p_{\cdot j}=0.5$として，すなわち，各箱におちる確率 p_{ij} を全て0.25として，nを固定した全ての2×2分割表について X^2 と確率を計算して分布をつくるならば，周辺度数に制限のない場合となり，自由度3の χ^2 分布に近いものとなる(2)（表5）。

III 非心 χ^2 分布

もう一度最初にかえって，n 個の球を k 個の箱に投げ入れる場合を考える。前と同じように1つの球が箱 i におちる確率を p_i，箱 i に落ちた球の数を x_i とする。p_i は未知であるから，これに対して q_i という仮設をたてて検定を行なうとする。p_i と q_i の差を p_i の標準偏差ではかる。すなわち，

$$p_i-q_i=k\sqrt{\frac{p_i(1-p_i)}{n}}=\frac{c_i}{\sqrt{n}} \tag{18}$$

とする。真の p_i と仮説の q_i との差が大きくなれば一見して仮説はあやまりとわかり，検定の手続きなど不要になるであろう。したがってこの常数kはそれ程大きなものを考える必要はない。したがって，n が大きくなって行くとき，$c_i/\sqrt{n}$ は0に近づくと考えてよい。ここで，仮説 q_i のもとで X^2 を求める。

$$X^2=\sum\frac{(x_i-n_i)^2}{n_i}$$

ただし，$n_i=nq_i$. x_i の真の期待値は $m_i=np_i$ であるから，$\sum\{(x_i-m_i)^2/m_i\}$ が χ^2 分布に近づくことは前に述べた通りであるが，n_i をもちいたときどうなるかがここでの問題である。

---

(2) 〔2〕における分類（a）の場合である。

$$\frac{x_i-n_i}{\sqrt{n_i}}=\frac{x_i-m_i+m_i-n_i}{\sqrt{n_i}}=\frac{x_i-m_i}{\sqrt{m_i}}\sqrt{\frac{m_i}{n_i}}+\frac{m_i-n_i}{\sqrt{n_i}} \tag{19}$$

$$\frac{m_i}{n_i}=\frac{n_i+m_i-n_i}{n_i}=1+\frac{m_i-n_i}{n_i}=1+\frac{np_i-nq_i}{nq_i}$$

$$=1+\frac{n(p_i-q_i)}{nq_i}=1+\frac{c_i}{q_i\sqrt{n}} \tag{20}$$

この値は，n が大きくなるにつれて，$c_i/\sqrt{n}$ が0に近づくから，1に近づく。前に述べたように，$(x_i-m_i)/\sqrt{m_i}$ は n が大きくなるにつれて，平均0，分散1の正規分布に近づく。したがって，

$$y_i=\frac{(x_i-m_i)}{\sqrt{m_i}}\sqrt{\frac{m_i}{n_i}}$$

もまた，n が大きくなるにつれて，平均0，分散1の正規分布に近づく。

$$X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i-n_i)^2}{n_i}=\sum_{i=1}^{k}\left(y_i+\frac{m_i-n_i}{\sqrt{n_i}}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}(y_i+a_i)^2 \tag{21}$$

ここで，

$$a_i=\frac{m_i-n_i}{\sqrt{n_i}}=\frac{n(p_i-q_i)}{\sqrt{nq_i}}=\frac{nc_i}{\sqrt{nq_i}\sqrt{n}}=\frac{c_i}{\sqrt{q_i}} \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{k}y_i\sqrt{n_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i-m_i)}{\sqrt{m_i}}\sqrt{\frac{m_i}{n_i}}\sqrt{n_i}=\sum_{i=1}^{k}(x_i-m_i)=0 \tag{23}$$

(y_i+a_i) は，n が大きくなったとき，平均 a_i，分散1の正規分布に従う確率変数である。したがって，$\Sigma(y_i+a_i)^2$ は非心 χ^2 自乗分布に従う。y_i は制限条件(23)によって制約されるから，自由度は $k-1$ である。また非心度は，

$$\delta=\sum_{i=1}^{k}a_i^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-n_i)^2}{n_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i^2}{q_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n(p_i-q_i)^2}{q_i}=n\sum_{i=1}^{k}\frac{(p_i-q_i)^2}{q_i}$$

である。

つぎに2×2分割表について考える。箱(i, j)におちる確率を p_{ij} とすれば，周辺確率は

$$p_{11}+p_{12}=p_{1\cdot},\quad p_{21}+p_{22}=p_{2\cdot},\quad p_{11}+p_{21}=p_{\cdot1},\quad p_{12}+p_{22}=p_{\cdot2}$$

となる。ここで縦横の分類が独立であるとすれば，

$$q_{11}=p_{1\cdot}p_{\cdot1},\quad q_{12}=p_{1\cdot}p_{\cdot2},\quad q_{21}=p_{2\cdot}p_{\cdot1},\quad q_{22}=p_{2\cdot}p_{\cdot2}$$

となるから，独立性の検定のためには，箱(i, j)におちる確率に対する仮説として q_{ij} を

とって検定を行なえばよい。このとき，非心度は，

$$\delta=\sum_{i,j}\frac{(m_{ij}-n_{ij})^2}{n_{ij}}=\sum_{i,j}\frac{(np_{ij}-nq_{ij})^2}{nq_{ij}}=n\sum_{i,j}\frac{(p_{ij}-q_{ij})^2}{q_{ij}}$$

となる。さらに前に述べたように，独立の仮定が成り立つとき，周辺確率を $p_{i\cdot}=r_i/n$, $p_{\cdot j}=c_j/n$ としたとき，

$$X^2=\sum_{i,j}\frac{(x_{ij}-nq_{ij})^2}{nq_{ij}}$$

の分布は χ^2 分布に近い。したがって，ここでも，

$$p_{i\cdot}=p_{i1}+p_{i2}=r_i/n,\quad p_{\cdot j}=p_{1j}+p_{2j}=c_j/n$$

をみたす p_{ij} について考える。このような制限を加えれば，p_{11} がわかれば，他の p_{ij} は全て決定される。また q_{ij} も，r_ic_j/n^2 として求めることができる。そこで表6～表11では，周辺度数と，p_{11}，q_{11}，および δ を表頭にかかげておいた。これ等計算例からみれば，r_1 と r_2，c_1 と c_2 の間に差がない場合は小さな n の場合にも連続な非心 χ^2 分布とよくあっている。一方10,40;10,40のように差が大きい場合は，同じ非心度に対しても，p_{11} が q_{11} から小さい方にずれる場合と，大きい方にずれる場合とで相当な差があり，連続分布との適合もよくない。

ちなみに検定力関数をもとめた（表12～表17)。n が小さい場合は，n が変ったとき，検定力関数の様子は相当変化する。また，r_i，c_j に差がある場合，検定力関数は当然対称ではなく，極限におけるものとは相当へだたりがある場合がある。

表 3

		50
		50
50	50	100

$p_{1\cdot}=p_{\cdot 1}=0.5125$，$p_{2\cdot}=p_{\cdot 2}=0.4875$

$p_{11}=0.262256$，$p_{12}=p_{21}=0.249844$，$p_{22}=0.237656$

X_0^2	$P(X^2 \geqq X_0^2)$	$P(\chi^2 \geqq m_i)$
0.125117	1.000000	1.000000
0.280311	0.841615	0.652539
0.290324	0.695180	0.593237
0.755906	0.548744	0.469516
0.775931	0.433042	0.381483
1.551900	0.317340	0.280655
1.581938	0.239271	0.210655
2.668295	0.161201	0.144902
2.708345	0.116272	0.101086
4.105091	0.071342	0.064931
4.155153	0.049327	0.042126
5.862287	0.027312	0.025220
5.922362	0.018148	0.015207
7.939883	0.008985	0.008471
8.009970	0.005754	0.004743
10.337879	0.002524	0.002455
10.417979	0.001562	0.001275
13.056276	0.000601	0.000613
13.146389	0.000361	0.000295
16.095073	0.000121	0.000131
16.195199	0.000070	0.000059
19.454271	0.000020	0.000024
19.564409	0.000012	0.000010
23.133869	0.000003	0.000004

表 4 $n=40$

X_0^2	$P(X^2 \geqq X_0)$*	$P(X^2 \geqq X_0)$**	$P(\chi^2 \geqq X_0)$
0.003932	0.930411	0.930414	0.95
0.015791	0.903116	0.903077	0.90
0.064185	0.827781	0.827844	0.80
0.148472	0.695317	0.695382	0.70
0.274996	0.609282	0.609215	0.60
0.454936	0.489141	0.489081	0.50
0.708326	0.419948	0.419954	0.40
1.074194	0.296719	0.296684	0.30
1.642374	0.204737	0.204734	0.20
2.705543	0.096611	0.096573	0.10
3.841459	0.050821	0.050816	0.05
5.411894	0.020418	0.020417	0.02
6.634897	0.009713	0.009717	0.01
10.827566	0.000839	0.000839	0.001

注 * 周辺度数が０となるものもふくむ

** 周辺度数が０となるものをはぶいたもの

表　5　　$n=40$

X_0^2	$P(X^2 \geqq X_0^2)$	$P(\chi \geqq X_0^2)d \cdot f \cdot =3$
0.351846	0.953648	0.95
0.584374	0.934348	0.90
1.005174	0.774479	0.80
1.423652	0.661671	0.70
1.869168	0.591876	0.60
2.365974	0.524009	0.50
2.946166	0.415091	0.40
3.664871	0.305674	0.30
4.641628	0.193958	0.20
6.251389	0.094748	0.10
7.814728	0.045226	0.05
9.837409	0.017309	0.02
11.344867	0.009757	0.01
16.266236	0.000974	0.001

表　6

		5	$q_{11}=0.24306$
		7	$p_{11}=0.11924$
7	5	12	$\delta=3.11429$

X_0^2	$P(X^2 \geqq X_0^2)$	$P(\chi^2 \geqq m_i)$
0.00980	1.00000	1.00000
1.18531	0.94715	0.84491
1.65551	0.63924	0.71821
5.18204	0.63652	0.46658
6.12245	0.13826	0.27005
12.00000	0.13822	0.10648

表　7

		10	$q_{11}=0.15318$
		10	$p_{11}=0.25$
10	10	20	$\delta=3.0$

X_0^2	$P(X^2 \geqq X_0^2)$	$P(\chi^2 \geqq m_i)$
0.0	1.00000	1.00000
0.8	0.93791	0.87327
3.2	0.70843	0.62552
7.2	0.33783	0.29177
12.8	0.07101	0.07633
20.0	0.00346	0.01023

表 8

		20
		30
20	30	50

$q_{11}=0.16$

X_0^2	$p_{11}=0.10815$ $\delta=2.33333$ $P(X^2\geqq X_0^2)$	$p_{11}=0.21185$ $\delta=2.33333$ $P(X^2\geqq X_0^2)$	$\delta=2.33333$ $P(\chi^2\geqq m_i)$
0.0	1.00000	1.00000	1.00000
0.34722	0.93457	0.93024	0.89262
1.38889	0.77054	0.76135	0.73132
3.12500	0.54437	0.53955	0.51128
5.55556	0.30246	0.30822	0.28932
8.68056	0.12188	0.13396	0.12706
12.50000	0.03249	0.04209	0.04211
17.01389	0.00500	0.00907	0.01034
22.22222	0.00033	0.00126	0.00186
28.12500	0.00000	0.00010	0.00024
34.72222	0.00000	0.00000	0.00002

表 9

		10
		40
10	40	50

$q_{11}=0.04$

X_0^2	$p_{11}=0.01229$ $\delta=1.5$ $P(X^2\geqq X_0^2)$	$p_{11}=0.06771$ $\delta=1.5$ $P(X^2\geqq X_0^2)$	$\delta=1.5$ $P(\chi^2\geqq m_i)$
0.0	1.00000	1.00000	1.00000
0.78125	0.90218	0.82405	0.75784
3.12500	0.52668	0.47636	0.43577
7.03125	0.00005	0.19635	0.15206
12.50000	0.00000	0.05096	0.02871
19.53125		0.00749	0.00274
28.12500		0.00055	0.00013
38.28125		0.00002	0.00000
50.00000		0.00000	0.00000

表 10

		30
		30
30	30	60

$q_{11}=0.25$

	$p_{11}=0.194010$		$p_{11}=0.13820$	
	$\delta=3.0$	$\delta=3.0$	$\delta=12.0$	$\delta=12.0$
X_0^2	$P(X^2\geqq X_0^2)$	$P(\chi^2\geqq m_i)$	$P(X^2\geqq X_0^2)$	$P(\chi^2\geqq m_i)$
0.0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.26667	0.95746	0.93216	0.99978	0.99909
1.06667	0.84953	0.82546	0.99839	0.99596
2.40000	0.68896	0.66226	0.99210	0.98413
4.26667	0.48540	0.46286	0.96959	0.94933
6.66667	0.28444	0.27227	0.90806	0.86992
9.60000	0.13353	0.13139	0.78049	0.72980
13.06667	0.04854	0.05182	0.58221	0.53888
17.06667	0.01321	0.01580	0.35477	0.33816
21.60000	0.00260	0.00385	0.16618	0.17544
26.66667	0.00035	0.00074	0.05621	0.07374
32.26667	0.00003	0.00011	0.01280	0.02475
38.40000	0.00000	0.00001	0.00179	0.00657
45.06667		0.00000	0.00014	0.00137
52.26667			0.00000	0.00022

表 11

		50
		50
50	50	100

$q_{11}=0.25$

	$p_{11}=0.20670$		$p_{11}=0.16340$	
	$\delta=3.0$	$\delta=3.0$	$\delta=12.0$	$\delta=12.0$
X_0^2	$P(X^2\geqq X_0^2)$	$P(\chi^2\geqq m_i)$	$P(X^2\geqq X_0^2)$	$P(\chi^2\geqq m_i)$
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.16000	0.96599	0.94832	0.99975	0.99936
0.64000	0.88706	0.87327	0.99872	0.99771
1.44000	0.78020	0.76481	0.99544	0.99275
2.56000	0.64130	0.62552	0.98607	0.97981
4.00000	0.48213	0.46870	0.96318	0.95084
5.76000	0.32553	0.31671	0.91559	0.89527
7.84000	0.19438	0.19062	0.83153	0.80412
10.24000	0.10130	0.10123	0.70576	0.67632
12.96000	0.04554	0.04708	0.54697	0.52322
16.00000	0.01747	0.01908	0.37851	0.36649
19.36000	0.00566	0.00671	0.22911	0.22945
23.04000	0.00153	0.00204	0.11904	0.12709
27.04000	0.00034	0.00053	0.05217	0.06179
31.36000	0.00006	0.00012	0.01895	0.02621
36.00000	0.00001	0.00002	0.00561	0.00966
40.96000	0.00000	0.00000	0.00133	0.00308
46.24000			0.00025	0.00085
51.84000			0.00004	0.00020
57.76000			0.00000	0.00004

表 12 検 定 力 関 数

		5
		7
7	5	12

δ	$P(\chi^2 \geqq c)$	p_{11}	$P(X^2 \geqq c)$
7.0	0.75358	0.057	0.96074
6.0	0.68777	0.071	0.91726
5.0	0.60878	0.086	0.84827
4.0	0.51601	0.103	0.74969
3.0	0.40997	0.122	0.62019
2.0	0.29299	0.144	0.46193
1.0	0.17008	0.173	0.28081
0.0	0.05000	0.243	0.07197
1.0	0.17008	0.313	0.20353
2.0	0.29299	0.342	0.37036
3.0	0.40997	0.365	0.54261
4.0	0.51601	0.383	0.70802
5.0	0.60878	0.400	0.85768
6.0	0.68777	0.415	0.98593
7.0	0.75358	*	

$c=3.8414588$

* p_{11} が大きい方にずれる場合 $\delta<6.125$

表 13 検 定 力 関 数

		7			8			10
		7			8			10
7	7	14	8	8	16	10	10	20

δ	p_{11}	$P(\chi^2 \geqq c)$	p_{11}	$P(X^2 \geqq c)$	p_{11}	$P(X^2 \geqq c)$
7.0	0.073	0.85497	0.085	0.95437	0.102	0.76520
6.0	0.086	0.76881	0.097	0.91703	0.113	0.67660
5.0	0.101	0.66093	0.110	0.85974	0.125	0.57317
4.0	0.116	0.53548	0.125	0.77715	0.138	0.45841
3.0	0.134	0.39940	0.142	0.66451	0.153	0.33783
2.0	0.156	0.26204	0.162	0.51875	0.171	0.21888
1.0	0.183	0.13458	0.188	0.33976	0.194	0.11061
0.0	0.250	0.02914	0.250	0.13193	0.250	0.02301

$c=3.8414588$

この場合は $\delta=0.0$ を中心として対称である

表 14 検 定 力 関 数

			20		20		25
			30		30		25
		10 40	50	20 30	50	25 25	50
δ	$P(\chi^2\geqq c)$	p_{11}	$P(X^2\geqq c)$	p_{11}	$P(X^2\geqq c)$	p_{11}	$P(X^2\geqq c)$
7.0	0.75358	0.007	0.96340	0.070	0.77664	0.156	0.86004
6.0	0.68777	0.012	0.89162	0.077	0.69902	0.163	0.80542
5.0	0.60878	0.018	0.78758	0.084	0.60647	0.171	0.73447
4.0	0.51601	0.025	0.65795	0.092	0.50027	0.179	0.64461
3.0	0.40997	0.032	0.51067	0.101	0.38357	0.189	0.53398
2.0	0.29299	0.041	0.35499	0.112	0.26169	0.200	0.40224
1.0	0.17008	0.052	0.20141	0.126	0.14250	0.215	0.25169
0.0	0.05000	0.080	0.06726	0.160	0.03775	0.250	0.05000
1.0	0.17008	0.108	0.22298	0.194	0.14938	0.285	0.25169
2.0	0.29299	0.119	0.36573	0.208	0.26839	0.300	0.40224
3.0	0.40997	0.128	0.49552	0.219	0.38642	0.311	0.53398
4.0	0.51601	0.135	0.60913	0.228	0.49701	0.321	0.64461
5.0	0.60878	0.142	0.70528	0.236	0.59623	0.329	0.73447
6.0	0.68777	0.148	0.78410	0.244	0.68221	0.337	0.80542
7.0	0.75358	0.153	0.84675	0.250	0.75454	0.344	0.86004

$c=3.8414588$

表 15 検 定 力 関 数

			10		20
			40		80
		10 40	50	20 80	100
δ	$P(\chi^2\geqq c)$	p_{11}	$P(X^2\geqq c)$	p_{11}	$P(X^2\geqq c)$
6.0	0.68777	(*)		0.001	0.92322
5.0	0.60878			0.004	0.65293
4.0	0.51601			0.008	0.43760
3.0	0.40997	0.001	0.00000	0.012	0.27172
2.0	0.29299	0.008	0.00001	0.017	0.14958
1.0	0.17008	0.017	0.00027	0.024	0.06549
0.0	0.05000	0.040	0.01813	0.040	0.02469
1.0	0.17008	0.063	0.14255	0.056	0.14005
2.0	0.29299	0.072	0.24939	0.063	0.24523
3.0	0.40997	0.079	0.35192	0.068	0.34637
4.0	0.51601	0.085	0.44765	0.072	0.44053
5.0	0.60878	0.091	0.53491	0.076	0.52602
6.0	0.68777	0.095	0.61286	0.079	0.60213
7.0	0.75358	0.100	0.68130	0.082	0.66881

$c=3.841588$

* p_{11} が小さい方にずれる場合 $\delta<3.125$

第16表　検 定 力 関 数

		7		10	
		5		10	
		5　7　12		10　10　20	
δ	$P(\chi^2 \geqq c)$	p_{11}	$P(X^2 \geqq c)$	p_{11}	$P(X^2 \geqq c)$
7.0	0.52787	0.057	0.59645	0.102	0.76520
6.0	0.44973	0.071	0.45806	0.113	0.67660
5.0	0.36702	0.086	0.32861	0.125	0.57317
4.0	0.28237	0.103	0.21743	0.138	0.45841
3.0	0.19940	0.122	0.12940	0.153	0.33783
2.0	0.12273	0.144	0.06560	0.171	0.21888
1.0	0.05771	0.173	0.02441	0.194	0.11061
0.0	0.01000	0.243	0.00126	0.250	0.02301
1.0	0.05771	0.313	0.00002	0.306	0.11061
2.0	0.12273	0.342	0.00000	0.329	0.21888
3.0	0.19940	0.365	0.00000	0.347	0.33783
4.0	0.28237	0.383	0.00000	0.362	0.45841
5.0	0.36702	0.400	0.00000	0.375	0.57317
6.0	0.44973	0.415	0.00000	0.387	0.67660
7.0	0.52787	*		0.398	0.76520

$c=6.6348966$

* p_{11} が大きい方にずれる場合 $\delta<6.125$

第17表　検 定 力 関 数

		7	8	10
		7	8	10
		7　7　14	8　8　16	10　10　20
δ_2	$P(\chi^2 \geqq c)$	$P(X^2 \geqq c)$	$P(X^2 \geqq c)$	$P(X^2 \geqq c)$
7.0	0.52787	0.85497	0.69682	0.76520
6.0	0.44973	0.76881	0.58884	0.67660
5.0	0.36702	0.66093	0.47238	0.57317
4.0	0.28237	0.53548	0.35430	0.45841
3.0	0.19940	0.39940	0.24211	0.33783
2.0	0.12273	0.26204	0.14323	0.21888
1.0	0.05771	0.13458	0.06424	0.11061
0.0	0.01000	0.02914	0.01010	0.02301

$c=6.6348966$

参 考 文 献

〔1〕 R. A. Fisher, "On the interpretation of chi square from contingency tables, and the calculation of P," Jour. Roy. Stat. Soc., vol 85,(1922)

〔2〕 木村 等，カイ自乗統計量について，香川大学経済論叢第50巻第1号，昭和50年4月。

〔2〕 85頁， 50
50
100 50 50，PEXACT，第2行 0.81462 は 0.84162のあやまり