動的ゲームと複占均衡
——完全情報 Nash 戦略のケース——

阿　部　文　雄

I　序

我々は先に，比較的簡単なフレームワークの下で，複占市場における企業の生産物数量及び価格に関しての異時点間の最適政策を分析した。(1) その際の主要な分析目的は，微分ゲームを適用することによる動的ゲームの構成と最適価格（数量）政策の検討であった。その際我々は，必ずしも非現実的とは思われないけれども，最適解（Nash 均衡解）の存在を保証するという，微分ゲームの定式化における技術的な理由から，各企業の数量調整には一定の限界があるという仮定に従って分析を進めた。そのため最適解は，２本のいわゆる反応曲線上を除く任意の（x_1，x_2）一平面，あるいは（p_1，p_2）一平面上において，bang-bang 解になることが明らかにされた。従ってそこで得た各時点における Nash 戦略解はライバル企業の選択する戦略に直接的には依存しないスペシャルケースとなった。

本稿において我々は，上述のモデルの修正を行ない，より一般的なケースを取り扱う。新たに導入する仮定は，数量調整に技術的な限界をおくのではなく，その内部経済化という意味で，各企業の数量調整は逓増的費用を伴って遂行されるという仮定をおくことである。このような仮定の下で Nash 戦略解は，各時点でいわゆる内点解を得ることになり，静学的ゲームで得られている Nash 解の動的ゲームにおけるそれへの自然な拡張となっていることが明らかとなる

（1）　拙稿〝クールノー型複占モデルと微分ゲーム〟香川大学経済論叢第50巻第３・４号1977及び〝複占企業の最適価格政策について，同上第51巻第１・２号1978参照。

であろう。[2]

II モデル（動的ゲーム）と諸仮定

ここでは価格調整モデル[3]が検討されるので，次のような時間に関して定常的な需要関数が想定される。

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ただしここで，$a_i>0$ $(i=1,2)$，$b_{ij}>0$ $(i,\ j=1,\ 2)$ とし，生産量及び価格は非負であるとする。また，$b_{11}>b_{12}$，$b_{22}>b_{21}$ を仮定する。

$$x_i(t)\geqq 0 \quad (i=1,\ 2) \qquad (2)$$

$$p_i(t)\geqq 0 \quad (i=1,\ 2) \qquad (3)$$

また，費用関数については次のように特定化されたものを想定する。[4]

$$o_i(t)=c_ix_i(t)+k_i\dot{x}_i^2(t) \qquad (4)$$

ここで，o_i は第 i 企業の費用，c_i は通常のいわゆる平均（限界）費用，$k_i\dot{x}_i^2$ は（短期）調整費用[5]であり $k_i>0$ $(i=1,\ 2)$ とする。調整費用 $k_i\dot{x}_i^2$ は例えば第1企業のそれを見ると，需要関数より，

（2） 数学的には Starr，A. W. &. Ho，Y. C.〔5〕が初めて動的ゲームに Nash 戦略を導入した。Simaan，M. & Cruz，J. B.〔4〕参照。

（3） 本稿は上記拙稿とほぼ同様の記法を用いる。特に明記されない記号についてはそれを参照。

（4） 企業が一定の資本設備の下で生産活動を行なう場合の費用は，時間的要素を明示的に考慮すれば一般的には

$$o_i(t)=o_i\,[x_i(t),\ \dot{x}_i(t)]$$

という形で示すことができよう。この関数 o_i が，産出量水準 x_i と産出量調整 $\dot{x}_i$ に関して分離可能であるという仮定をおけば，

$$o_i(t)=o_{i1}\,[x_i(t)]+o_{i2}\,[\dot{x}_i(t)]$$

と表わすことができる。本稿で想定された費用関数はこれを更に特定化したものである。

（5） ここで費用 $k_i\dot{x}_i^2$（k_i は正の定数）を我々は，（短期）調整費用と呼ぶことにする。従って企業は産出量を正負いずれの方向へ調整させても逓増的な調整費用を負担しなければならない。このような調整費用の具体的な内容としては，原材料や雇用の調整には一般に一定の時間がかかり，そのため短期間での調整には特別の調達費用が必要とされる等の事情が考えられる。

$$k_1\dot{x}_1^2 = k_1(b_{11}^2\dot{p}_1^2 - 2b_{11}b_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2 + b_{12}^2\dot{p}_2^2)$$

と表わされ，第1企業の負担する調整費用は，両企業の選択する価格調整政策に依存していることが知れる。(第2企業についても同様）従って，利潤関数は次のようになる。

$$\pi_i(t) = p_i(t)x_i(t) - c_ix_i(t) - k_i\dot{x}_i^2(t) \quad (i=1,\ 2) \tag{5}$$

更に状態方程式として

$$\dot{p}_i(t) = u_i(t) \qquad (i=1,\ 2) \tag{6}$$

$$p_i(0) = p_i^0 \ \text{(given)} \qquad (i=1,\ 2) \tag{7}$$

が想定され，ここでは $u_i(t)$ は第 i 企業の制御変数である。

又，両企業はそれぞれ次のような目的関数をもつ。

$$M_i = \int_0^T \pi_i(t)dt \qquad (i=1,\ 2) \tag{8}$$

最後に，このモデルで各企業が利用可能な情報として次のような2種類の完全情報が仮定される。

（イ） perfect information

自社及びライバル企業の過去及び現在の価格水準がすべて既知であること。

（ロ） complete information

自社及びライバル企業の費用関数及び需要関数が既知であること。

以上のことをまとめておこう。

<問題>

$$\underset{u_i(t)}{\text{Maximize}}\ M_i = \int_0^T M_i(t)dt \qquad (i=1,\ 2)$$

subject to

$$\pi_i(t) = p_i(t)x_i(t) - c_ix_i(t) - k_i\dot{x}_i^2(t) \qquad (i=1,\ 2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}$$

$$x_i(t) \geqq 0 \qquad (i=1,\ 2)$$

$$p_i(t) \geqq 0 \qquad (i=1,\ 2)$$
$$\dot{p}_i(t) = u_i(t) \qquad (i=1,\ 2)$$
$$p_i(0) = p_i^0 \ \text{(given)}$$

III 最適解の必要条件

上述の問題に最適解（Nash 均衡解）が存在するとすれば，その必要条件は次のように与えられる。[6]

＜必要条件＞

次のように定義されたハミルトニアン

$$H_i(t) = p_i(t)x_i(t) - c_i x_i(t) - k_i \dot{x}_i^2(t) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}(t)u_j(t) \tag{9}$$
$$(i=1,\ 2)$$

に対して，

〔A〕
$$\frac{d\lambda_{ij}(t)}{dt} = -\frac{\partial H_i(t)}{\partial p_j(t)} \qquad (i,\ j=1,\ 2) \tag{10}$$

〔B〕
$$H_1[u_1^*(t),\ u_2^*(t)] \geqq H_1[u_1(t),\ u_2^*(t)] \tag{11}$$
$$H_2[u_1^*(t),\ u_2^*(t) \geqq H_2[u_1^*(t),\ u_2(t)] \tag{12}$$

〔C〕 横断条件

$$\lambda_{ii}(T) = 0 \qquad (i=1,\ 2) \tag{13}$$

を満足する連続関数 $\lambda_{ij}(t)$ $(i, j=1,\ 2)$ が存在しなければならない。

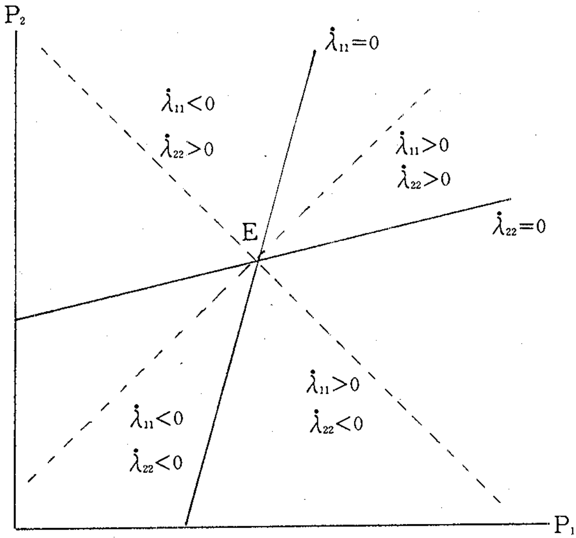
条件〔A〕は簡単な計算によって次のように表わされる。[7]

$$\dot{\lambda}_{11}(t) = 2b_{11}p_1(t) - b_{12}p_2(t) - (a_1 + c_1 b_{11}) \tag{14}$$
$$\dot{\lambda}_{12}(t) = -b_{12}[p_1(t) - c_1] \tag{15}$$
$$\dot{\lambda}_{21}(t) = -b_{21}[p_2(t) - c_2] \tag{16}$$
$$\dot{\lambda}_{22}(t) = -b_{21}p_1(t) + 2b_{22}p_2(t) - (a_2 + c_2 b_{22}) \tag{17}$$

---

(6) Starr, A. W. & Ho, Y. C. 〔5〕参照。
(7) 影の価格 $\lambda_{ij}(t)$ の経済学的意味については，上記拙稿参照。

第1図で示されるように，$\dot{\lambda}_{11}=0$，$\dot{\lambda}_{22}=0$ を満足する直線を（p_1, p_2）−平面上に描くことができる。



第 1 図

次に条件〔B〕について。このモデルの場合，ハミルトニアン H_i が u_i に関して厳密に凹 (strictly concave) であることを考慮すれば，条件〔B〕は次の条件と同値である。

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1}=0 \iff -2k_1b_{11}(b_{11}u_1-b_{12}u_2)+\lambda_{11}=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_2}=0 \iff 2k_2b_{22}(b_{21}u_1-b_{22}u_2)+\lambda_{22}=0 \tag{19}$$

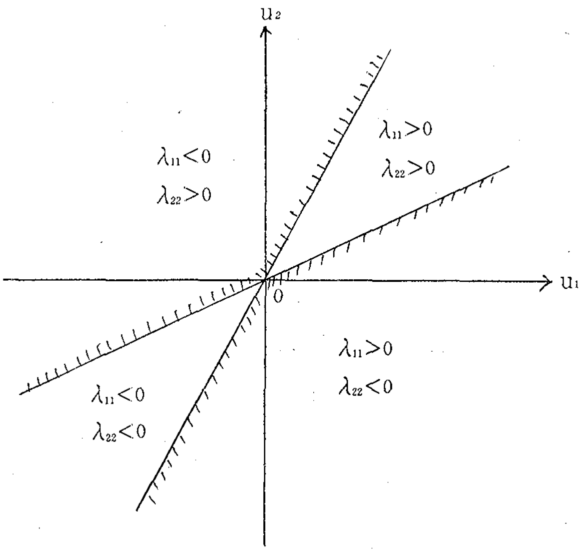
従って，Nash 均衡解（u_1^*, u_2^*）は上の連立方程式 (18) (19) の解としてユニークに与えられる。即ち，

$$\begin{pmatrix} b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_{11}}{2k_1b_{11}} \\ \dfrac{\lambda_{22}}{2k_2b_{22}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

ここで需要関数の仮定から，

$$\begin{vmatrix} b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0 \tag{21}$$

が成立している。この Nash 均衡解 (u_1^*, u_2^*) は，影の価格 (shadow price) λ_{11}, λ_{22} の符号の組み合わせにより第2図で示されるような領域で決定される。



第 2 図

IV　最適径路の特徴

前節までの分析により各時点の Nash 均衡戦略が両企業の影の価格 $\lambda_{ii}(t)$ $(i=1, 2)$ の関数として一意に決定されることをみた。この節では，(p_1, p_2)—平面上の実行可能な任意の初期点から出発する動的ゲームにおいてゲームの期間中具体的にはどのような価格政策が選択され，その結果最適径路がどのような特徴を有するかを検討しよう。

まず，最適径路の中で特別の性質を有するものから検討してみよう。即ち，均衡点Eに到達する最適径路の中で，その到達の仕方が直線的に，換言すれば

両企業の Nash 均衡戦略の比（$u_2^*(t)/u_1^*(t)$）が不変のまま均衡点へ到達する径路があるか否かである。今，分析上の簡単化のために丁度終端時刻 $t=T$ で均衡点 E に到達する最適径路についてみれば，横断条件により，$\lambda_{11}(T)=\lambda_{22}(T)=0$ でなければならない。そこで，$\dot{\lambda}_{11}(t)=\alpha\dot{\lambda}_{22}(t)$ を満足する点を考えれば，これは均衡点 E を通る直線

$$p_2=\frac{2b_{11}+\alpha b_{21}}{b_{12}+2\alpha b_{22}}p_1-\frac{(a_1+c_1b_{11})-\alpha(a_2+c_2b_{22})}{b_{12}+2\alpha b_{22}} \tag{22}$$

で表わすことができる。他方，もしこの直線上を最適径路が通るとすれば，$\lambda_{22}(t)/\lambda_{11}(t)=\alpha$ でなければならないから，このとき Nash 均衡戦略比（$u_2^*(t)/u_1^*(t)$）は，(20) 式より次の様に示される。

$$\frac{u_2^*(t)}{u^1{}_1^*(t)}=\left(\frac{b_{21}}{2k_1b_{11}}+\frac{\alpha b_{11}}{2k_2b_{22}}\right)\Big/\left(\frac{b_{22}}{2k_1b_{11}}+\frac{\alpha b_{12}}{2k_2b_{22}}\right) \tag{23}$$

従って，(22)式の直線の勾配と(23)式で表わされた Nash 均衡戦略比（$u_2^*(t)/u_1^*(t)$）が等しいならば，最適径路は直線的に均衡点へ到達可能である。このことは次式を意味する。

$$\frac{2b_{11}+\alpha b_{21}}{b_{21}+2\alpha b_{22}}=\left(\frac{b_{21}}{2k_1b_{11}}+\frac{\alpha b_{11}}{2k_2b_{22}}\right)\Big/\left(\frac{b_{22}}{2k_1b_{11}}+\frac{\alpha b_{12}}{2k_2b_{22}}\right) \tag{24}$$

これは α に関して2次式となっており，容易に知れるように，符号の異なる2実根をもつことがわかる。

以上の分析は，同時に，均衡点近傍における最適径路の特徴をも明らかにする。即ち，均衡点へ到達する任意の最適径路は，少なくとも均衡点の近傍においては，上述の均衡点へ到達する4本の最適径路（第1図点線参照）上に乗るか，漸近的に接近しなければならないことである。そこで，任意に与えられた初期点から最適径路がどのように均衡点に到達するかを図示するために次のような数値[(8)]を使ってみよう。

---

(8) これらのうち a_i，c_i，b_{ij} については，Henderson，J. M. & Quandt，R. E.，Microeconomic Theory: A Mathematical Approach，2nd. Ed.（邦訳『現代経済学』小宮・兼光訳）1971，の第6章で使われたものである。

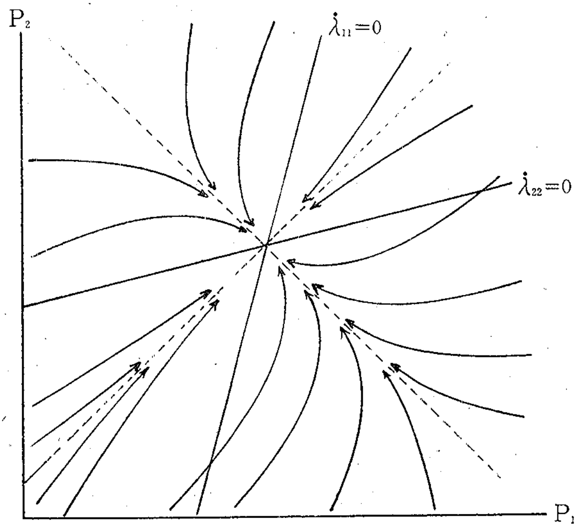
$a_1=88,\ c_1=10,\ b_{11}=b_{22}=4,\ k_1=k_2=0.1$

$a_2=56,\ c_2=8,\ b_{12}=b_{21}=2$

この様な数値に対して，α を求めれば，$\alpha=\pm 1$ となる。又，Nash 均衡戦略については次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} u_1^*(t)&=\frac{1}{4.8}[2\lambda_{11}(t)+\lambda_{22}(t)] \\ u_2^*(t)&=\frac{1}{4.8}[\lambda_{11}(t)+2\lambda_{22}(t)] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{u_2^*(t)}{u_1^*(t)}=\frac{1+2\alpha(t)}{2+\alpha(t)} \tag{25}$$

ここで，$\alpha(t)=\lambda_{22}(t)/\lambda_{11}(t)$ である。そこでこれらの数値に対して最適径路を図示すれば，大まかではあるが<第3図>の如く示される。図からも明らか



第 3 図

な様に，任意の初期点から出発する最適径路は，上述の4本の直線径路（第3図点線）のいずれかに接近しながら均衡点へ到達する。その際，これまで重要な役割を演じてきた，いわゆる反応曲線（$\dot{\lambda}_{11}=0$ 曲線及び $\dot{\lambda}_{22}=0$ 曲線）は，価格体系に対する強力な吸引力を示さないことが分る。言うまでもなく，これ

は調整費用の存在に依るものである。

V　結論的覚書

少数大企業から構成される寡占乃至複占市場を考える場合，その市場調整はいわゆる一般均衡モデルで通常想定されるものと明らかに異なるものを考える必要がある。一般均衡モデルで通常想定される市場調整は，多数の取引主体とは別の第三者的（中立的）調整者の存在を仮定している。そしてこの調整者が市場を clear させる方向で予備的プロセス（模索過程）を経て一般均衡価格を成立させると考えられている。それに対し寡占乃至複占市場の場合，一般に中立的調整者の存在を仮定しないのが普通であり，数量あるいは価格調整は取引主体（企業）自らの判断で直接的かつ相互依存的に行なわれる。いわば市場調整に必要な情報収集能力を企業が有していることを想定するのである。

小論文で取り扱った複占市場は，この情報収集能力を高度に兼備した企業から構成されていると考えられよう。複占企業が Nash 戦略を行なう上で完全情報の仮定のはたす役割は決定的である。(9) というのは，もしこの仮定を置かなければ，各企業は特別の場合を除き Nash 均衡戦略を決定（計算）することができないからである。換言すれば，この仮定が満たされない場合 Simaan, M. & Cruz, J. B. の指摘するように，(10) 各企業は別の戦略，例えばシュタッケルベルグ（Stackelberg）戦略とかミニマクス（Mini-Max）戦略等を選択する方が合理的であるかもしれないのである。

さて最後に，これまでの分析を通じて明らかとなった完全情報 Nash 戦略ゲームの最適解の有する重要な含意に一言触れておこう。我々のモデルにあっては，ゲーム開始から最終時刻に至る各企業の選択する Nash 均衡戦略の時間径路は通常の最適制御問題と同様に，実際上，初期時点で完全に計算されてしま

(9) Simaan, M. & Cruz, J. B.〔4〕では，Nash 戦略の一般的仮定として，①すべてのプレイヤーは，他のプレイヤーの目的関数を知っていること，②戦略が計算されたとき，同時にアナウンスされること，の2点が指摘されている。

(10) Simaan, M. & Cruz, J. B.〔4〕参照。

う。ただ各企業とも，自社及びライバル企業の選択する戦略（価格政策）が事前に分ったとしても，これを変更することによって利益を得ることができないのである。これは静学的な Nash 戦略ゲームにおいて，ひとたび Nash 均衡解に到達したとすればその点から離脱できないのとアナロガスな特徴である。

参考文献

〔1〕 Clemhout, S., Leitmann, G. and Wan, H. Y., "A Differential Game Model of Duopoly", Econometrica, vol. 39, No. 6 (1971) 911—938.

〔2〕 Clemhout, S., Leitmann, G. and Wan, H. Y., "A Differential Game Model of Oligopoly", Journal of Cybernetics, vol.3, No. 1 (1973)

〔3〕 Leitmann, G. & Schmitendorf, W. E., "Profit Maximization Through Advertising: A Nonzero-Sum Differential Game Approach", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC—23, No. 4 (1978) 645—650.

〔4〕 Simaan, M. & Cruz, J. B., "On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games", JOTA, vol, 11, No. 5 (1973)

〔5〕 Starr, A. W. & Ho, Y. C., "Nonzero-Sum Differential Games", JOTA, vol. 3, No. 3 (1969) 184—206.