# 不確実性下の企業の最適研究開発政策について*

## ——比較動学分析——

阿　部　文　雄

### I　はじめに

技術革新には多くの危険（リスク）が伴うのが普通である。新製品の開発や生産方法の革新を企てる企業が，通常の財生産の場合以上に，種々の不確実性に直面するのは，革新による成果（output）が情報という特殊な財であるという事実に基くものである。Kamien & Schwartz（〔4〕〔6〕etc）によれば，この場合の不確実性には２種類のものが存在する。(1) 技術的不確実性（technological uncertainty）と市場的不確実性（market uncertainty）である。前者に関して言えば当面の開発プロジェクトがいつ完成するかは基本的には実行される研究開発（R&D）投資に依存するであろう。しかしこの一種の投入—産出関係は企業にとって未知のものであり，過去の経験やデータ等に基いて正確に推量することは不可能である。結局アカデミックな基礎研究やＲ＆Ｄの研究段階において得られた情報をもとに確率論的に推量するしか方法はないであろう。

他方市場的不確実性について言えば，これは当該企業にとって基本的には外生的なものである。ライバル企業（群）が当面のプロジェクトにどの程度積極的であるのか，どの程度の進展をみているのか，他方もし革新者として他に先

---

＊　本稿作成に際し本学近代経済学研究会メンバーの諸先生には貴重なコメントと助言を頂いた。心より感謝申し上げたい。

（１）　2種類の不確実性については拙稿「技術革新・競争及び不確実性」『香川大学経済論叢』第53巻第４号昭和56年参照。

がけて当面の革新に成功した場合どれほどの革新利益が得られ，先行を許した場合のダメージはどうなのか等について通常極めて限定された情報しか得られないのである。結局これについても企業者自らが確率論的に推量するしか方法はないであろう。

多大の危険が伴うにもかかわらず，今日の寡占的大企業の多くは，様々な革新プロジェクトに積極的である。革新による報酬が高く予想されるほど，先を越された場合のダメージも大きく，積極的であれ消極的であれ，何らかの対応にせまられる。

ところで今日寡占的大企業間の競争は，価格競争という古典的なパターンから，製品差別化，多角化，参入阻止といった多様でかつ本質的に長期動学的な戦略に重点を移しつつあり，こういった戦略を推進する上でも技術革新競争での成否が重要な関わりをもつことが認識されるようになってきた。

かかる状況にあって大規模な R & D 政策を実行する上で企業にとって重要な関心は，いかに危険を分散し革新上の効率を上げるか，また特定のプロジェクトを実施する上で上記２つの不確実性を考慮しつつ資源をどのように時間的に配分するのが合理的であるかという問題である。このような問題はミクロ経済学における不確実性下の異時点間最適化問題としてモデル化することができる。

小論文はこのような問題を解くことによって得られる企業の R & D 政策の時間径路を分析し，進んで企業の予想する各種パラメータの変化が，上記最適 R & D 政策の時間径路にどのような変化を及ぼすかといういわゆる「比較動学分析」を試みることである。

以下小論文の構成は次のようになっている。Ⅱ節ではモデル設定がなされ，Ⅲ節では最適 R & D 政策の導出とその特徴が述べられ，Ⅳ節において比較動学分析が行なわれている。

## II　モデルの設定

小論文において展開されるモデルの基礎は kamien & Schwartz の技術革

新に関する一連の分析に依存している。[2] まず以下の仮定が置かれる。

＜仮定1＞市場的不確実性

企業はライバル企業（群）の革新がいつ完成するかに関して次のような予想を行なうものとする。即ちライバル企業の革新が完成する時刻 $v$ を確率変数と見なし，それが従う分布関数が次のように与えられるとする。

$$P_r\{v \leq t\} = 1 - e^{-ht}, \qquad h > 0 \tag{1}$$

ここで定数 $h$ は危険率と呼ばれているものであるが，以下では〝完成率〟と呼ぶ。

＜仮定2＞技術的不確実性

企業の累積的有効R＆D努力を $z$ とし，$\phi[z(t)]$ をR＆D努力が $z$ である時刻 $t$ までに革新が完成する確率であるとする。関数 $\phi[z(t)]$ について以下のことが仮定される。

$$\left.\begin{array}{ll} \phi(0)=0, & \phi'(0)=0 \\ \phi'(z) \geqq 0 & \text{for all } z \\ \phi(z)\begin{cases} <1 & \\ =1 & \end{cases} & \begin{array}{l} \text{for } 0 \leqq z < \bar{z} \\ \text{for } \bar{z} \leqq z \end{array} \end{array}\right\} \tag{2}$$

更に，$k(z) \equiv \phi'(z)/[1-\phi(z)]$ とするとき，

$$k'(z) \geqq 0 \qquad \text{for } 0 \leqq z \leqq \bar{z} \tag{3}$$

を仮定する。ここで $\bar{z}$ は，革新の完成が確実（certain）であるR＆D努力の最小の値である。

＜仮定3＞累積的有効R＆D努力の蓄積

R＆D努力 $z(t)$ とR＆D支出 $m(t)$ との間には，次のような収穫逓減的

---

（2） それらの概略については上記拙稿参照。本稿で展開されるモデルは，2つの不確実性を同時に取扱っているという点で，Kamien & Schwartz〔6〕にもっとも近いが，次の2点において異なる。①革新から得られると予想される収益が，K & S モデルでは時間（完成時刻）から独立で一定値とされている，② K & S モデルでは固定時間問題として定式化されている，ということである。②に関して言えば，もし所与とされた時刻までにプロジェクトが完成しなかった時企業は如何なる行動をとるのか，あるいはその所与とされる終端時刻をどのように合理的に設定するのかといった問題が残ると思われる。

な関係が存在するものとする。

$$\dot{z}(t)=g[m(t)] \tag{4}$$

$$z(0)=0 \tag{5}$$

$$g(0)=0,\ 0<g'(0)<1,\ 0<g'(m)<1,\ g''(m)<0 \tag{6}$$

＜仮定４＞革新からの予想収益

今 $T$ を自社Ｒ＆Ｄプロジェクトの完成時刻（確率変数）とし，〔$0, T$〕と（$T, \infty$）の２つの期間に分けて考える。

〔A〕〔$0, T$〕において次の２つの可能性が存在する。

(A-1) ライバルも完成していないケース。このとき革新競争によるペイオフはゼロである。

(A-2) ライバルが完成しているケース。このケースは〔$0, T$〕の任意の $t$ に対して確率 $F(t)=1-exp(-ht)$ で生じ，このときのペイオフは $-\pi(\pi>0)$ であると予想される。従って（$-\pi$）はライバルに革新を先行されたときの予想ダメージである。

〔B〕（$T, \infty$）においては次の３つの可能性が存在する。

(B-1) ライバルが完成していないケース。このケースは確率 $1-F(t)=exp(-ht)$ で生じ，このときの予想されるペイオフとしてその時点以後毎期 $p_0$ の独占的革新利益が得られるものとする。

(B-2) ライバルが模倣者として完成するケース。これは確率 $F(t)-F(T)=exp(-hT)-exp(-ht)$ で生じ，このときのペイオフは $p_1$ であると予想される。

(B-3) ライバルがすでに $T$ まで完成させているケース。これは確率 $F(T)=1-exp(-hT)$ で生じ，このときのペイオフは $p_2$ であると予想される。

なおここで，

$$p_0>p_1>p_2>0 \tag{7}$$

であると仮定される。

従って企業の全計画期間中の予想収益は次のように示される（$\rho$ は主観的割

引率)。

$$\int_0^T[-\pi F(t)e^{-\rho t}]\,dt+\int_T^\infty\{p_0[1-F(t)]+p_1[F(t)-F(T)]+p_2F(T)\}e^{-\rho t}dt$$
$$=e^{-\rho T}\left\{\frac{p_2+\pi}{\rho}+\left(\frac{\pi}{\rho+h}-\frac{\pi}{\rho}\right)e^{\rho T}+\left(\frac{p_0-p_1-\pi}{\rho+h}+\frac{p_1-p_2}{\rho}\right)e^{-hT}\right\}$$
$$\equiv e^{-\rho T}B(T) \tag{8}$$

さてプロジェクトが完成するまでのコスト $m(t)$ を考慮して，当該企業の全計画期間にわたる純収益を定式化すれば，

$$M=-\int_0^T m(t)e^{-\rho t}\,dt+B(T)e^{-\rho T} \tag{9}$$

となる。ここでプロジェクトの完成時刻 $T$ は確率変数であるから，企業は上で定式化された純利益 $M$ の数学的期待値（平均）を最大化するものとする。そこで平均を求めると，

$$E(M)=\int_0^\infty\{-[1-\phi(z)]m(t)+\phi'(z)g(m)B(t)\}e^{-\rho t}\,dt \tag{10}$$

と表わすことができる。従って当該企業の直面する問題は，Max (10) subject to (1)～(7) である。

## III　最適研究・開発(R&D)政策

問題 Max (10) subject to (1)～(7) に最適解 $m(t)$ が存在すれば，それが満すべき必要条件は最大原理により次のように示される。

$$H=e^{-\rho t}\{-[1-\phi(z)]m(t)+\phi'(z)g(m)B(t)+\lambda(t)g(m)\} \tag{11}$$

とおくとき，

(i) $$\frac{d}{dt}[\lambda(t)e^{-\rho t}]=-\frac{\partial H}{\partial z} \tag{12}$$

(ii) $$\frac{\partial H}{\partial m}\leqq 0,\quad m\frac{\partial H}{\partial m}=0,\quad m\geqq 0 \tag{13}$$

を満足する連続関数 $\lambda(t)$ が存在すること。

更にここで我々は，横断条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)\geqq 0,\qquad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)z(t)=0 \tag{14}$$

が成立するものと仮定する。

(12)式は整理すると次のように示される。

$$\dot{\lambda}(t)=\rho\lambda(t)-[\phi'(z)m(t)+\phi''(z)g(m)B(t)] \tag{15}$$

更にここで新しい変数 $\gamma(t)$ を，

$$\gamma(t)\equiv\phi'[z(t)]B(t)+\lambda(t) \tag{16}$$

と定義すれば，$\gamma(t)$ についての微分方程式が次のように示される。

$$\dot{\gamma}(t)=\rho\gamma(t)-\phi'(z)[m(t)+G(t)] \tag{17}$$

$$G(t)\equiv\rho B(t)-\dot{B}(t) \tag{18}$$

条件(ii)は次のように示される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial m}&=e^{-\rho t}\{-[1-\phi(z)]+g'(m)[\phi'(z)B(t)+\lambda(t)]\}\\&=e^{-\rho t}\{-[1-\phi(z)]+g'(m)\gamma(t)\}\leqq 0\end{aligned} \tag{19}$$

ここで変数 $\gamma(t)$ が非負であることを証明しておこう。まず(17)式において ある時刻 $t_1\in[0,\infty)$ に対して $\gamma(t_1)<0$ であるとする。(17)式右辺の第2項は非負であるから $\dot{\gamma}(t_1)<0$ となる。このとき $t_1$ 以後のすべての時点においても必ず $\gamma(t)$ は負となる。ところで定義 $\gamma(t)\equiv\phi'(z)B(t)+\lambda(t)$ より，$\gamma(t)$ が負であれば $\lambda(t)$ も負でなければならない。しかしこのことは横断条件(14)に矛盾することになる。従って $\gamma(t)$ は負ではありえない。

$$\gamma(t)\geqq 0 \qquad \text{for } t\in[0,\infty) \tag{20}$$

〔1〕 初期時点における最適 R & D 政策

まず初期 $(t=0)$ 時点における最適 R & D 政策を考えてみよう。$t=0$ において，$z(0)=\phi'(0)=0$ であるから，

$$\left.\frac{\partial H(0)}{\partial m}\right|_{m=}=-1+g'(0)\gamma(0) \tag{21}$$

であり，それゆえ最適性規準は，

$$\left.\begin{array}{lll}-1+g'(0)\gamma(0)\leqq 0 & \text{ならば} & m(0)=0\\ -1+g'(0)\gamma(0)>0 & \text{ならば} & m(0)>0\end{array}\right\} \tag{22}$$

であることが分る。今，$\gamma(0)\leqq 1/g'(0)$，従って $m(0)=0$ であると仮定す

る。更にここで $m(t)=0$ であるような区間〔$0, t_0$〕が存在するとする。(17)式において〔$0, t_0$〕の間，$m(t)=0$，$z(t)=0$，$\phi'(z)=0$ であるから，

$$\dot{\gamma}(t)=\rho\gamma(t) \tag{23}$$

が成立する。(23)式を解くと，

$$\gamma(t)=\gamma(0)e^{\rho t} \qquad (\gamma(0)\leqq 1/g'(0)) \tag{24}$$

即ち $\gamma(t)$ は，$\gamma(0)>0$ のとき，(20)式を考慮すれば $\rho$ の率で上昇することが分る。$\gamma(0)=0$ のとき，最適政策はいわゆる null policy であり，R & D 活動を全く行わないことが最適である。しかし以下においては我々は，$\gamma(0)>0$ を仮定する。従って，たとえ $\gamma(0)\leqq 1/g'(0)$ であってもいずれは，$-1+g'(0)\gamma(t)>0$ となることが分る。そこで R & D 活動が開始される時刻を $t_m$ とすると，

$$t_m=\begin{cases} t_0>0 & \text{if} \quad \gamma(0)\leqq 1/g'(0) \\ 0 & \text{if} \quad \gamma(0)>1/g'(0) \end{cases} \tag{25}$$

となる。

〔2〕 R & D 開始時刻以後の最適政策（内点解のケース）

R & D 関始時刻以後はいわゆる内点解のケースである。そこで最適 R & D 政策 $m(t)$ が時間の経過とともにどのように変化するのかを調べてみよう。必要条件より内点解が成立するとき次式が成立しなければならない。

$$-[1-\phi(z)]+g'(m)\gamma(t)=0 \tag{26}$$

そこで $m(t)$ の時間に関する変化をみるために (26)式の両辺を時間 $t$ で微分すると次式を得る。

$$\phi'(z)g(m)+g''(m)\gamma(t)\dot{m}(t)+g'(m)\dot{\gamma}(t)=0 \tag{27}$$

(27)式に(18)式を代入し，(26)式から $\gamma(t)=[1-\phi(z)]/g'(m)$ であることを考慮して整理すれば次式を得る。

$$-\frac{g''(m)}{g'(m)}\dot{m}(t)=\rho+k(z)[g(m)-g'(m)(m(t)+G(t))] \tag{28}$$

(28)式から明らかなように最適 R & D 政策 $m(t)$ の変化の方向に影響を及ぼす主な要因は，①革新によって得られると予想される純収益と，完成時刻が遅

れることによる純利益の減少率（市場的不確実性），②累積的有効 R & D 努力 ($z(t)$) と，$\phi(z)$ の形状（技術的不確実性），③最適 R & D 水準 $m(t)$，である。①については予想収益が大きい程，そしてその減少が急速である程 $\dot{m}(t)$ は小さい。②については，$k(z)$ が項 $g(m)-g'(m)[m(t)+G(t)]$ に対する反応係数の役割を果していると言えよう。更に③については $m(t)$ が大きい程 $\dot{m}(t)$ も大きくなる。

さてここで，$\dot{m}(t)$ の符号に関していくつかの特徴を指摘しておく。

① $m(t)>0,\ k[z(t)]=0$ のとき，$\dot{m}(t)>0$ が成立する。（証明は(28)式から明らかである）

② $g(m)-g'(m)[m(t)+G(t)]>0$ ならその時点以後において，$\dot{m}(t)>0 \longrightarrow \dot{m}(t)<0$ への転換は決して生じない。（証明：$A(m,t)\equiv g(m)-g'(m)[m(t)+G(t)]$ とおくとき，$A(m,t)>0,\ \dot{G}(t)<0$ を考慮すれば，$dA/dt=-g''(m)\dot{m}(m+G)-g'(m)\dot{G}>0$ である。）

③ $k'(z)=0$ ならば，$\dot{m}(t)>0 \longrightarrow \dot{m}(t)<0$ への転換は生じない。（証明：$D\equiv\rho+k(z)A(m,t)$ とおけば，$dD/dt=\kappa(z)\cdot dA/dt>0$ より明らかである。）

以上の分析から最適 R & D 政策は，技術的および市場的不確実性の影響を受けながら進められるが，このような開発プログラムは自社の革新が成功した時点で終了するという，いわゆるコンティンジェンシープラン (contingency plan) である。最適 R & D 政策は最悪の事態，即ち $z=\bar{z}$ に到達するまで完成しない場合を考慮したものとなっている。成功の可能性があり，完成後の利益がある限り $\bar{z}$ に到達するまで R & D 投資は継続されるわけである。

## IV 比較動学分析

この節の目的は，前節までに導出・検討した企業の最適 R & D 政策の時間径路が，種々のパラメータ ($p_0, p_1, p_2, \pi, h, \rho, \bar{z}$) の変化によってどのような影響を受けるか，という問題を考察することである。(3)

(3) この節で展開される分析手法は，Oniki〔17〕,〔18〕, 板垣〔1〕,〔2〕,〔3〕等に負っている。

まず以下での分析上の便宜のために次の如く定義された新しい変数を導入する。

$$\Omega(t) \equiv \frac{\gamma(t)}{1-\phi[z(t)]} \tag{31}$$

このとき動学体系(4)(17)は次のように示される。

$$\dot{z}(t) = g[m(t)] \tag{4}$$

$$\dot{\Omega}(t) = [\rho + k(z)g(m)]\Omega(t) - k(z)[m(t) + G(t)] \tag{32}$$

また新しい変数 $\Omega(t)$ を使えば，最適性規準(26)式は次のように示される。

$$-1 + g'(m)\Omega(t) = 0 \tag{33}$$

そこで(33)式の両辺を任意のパラメータ $\theta$ で微分すると，

$$m_\theta(t) = -\frac{[g'(m)]^2}{g''(m)}\Omega_\theta(t) \tag{34}$$

を得る。従って計画期間中の任意の $t$ 時点における $m_\theta(t)$ の符号は $\Omega_\theta(t)$ と同符号となる。更に(4)(32)を同じくパラメータ $\theta$（但し $\theta \neq \rho$）で微分すれば，関数 $z_\theta(t)$, $\Omega_\theta(t)$ に関する微分方程式体系を得る。

$$\dot{z}_\theta(t) = g'(m)m_\theta(t) = -\frac{[g'(m)]^3}{g''(m)}\Omega_\theta(t) \tag{35}$$

$$\dot{\Omega}_\theta(t) = k'(z)\left[\frac{g(m)}{g'(m)} - m(t) - G(t)\right]z_\theta(t) + [\rho + k(z)g(m)]\Omega_\theta(t) \tag{36}$$

これを行列形式で表わすと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_\theta(t) \\ \dot{\Omega}_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{[g'(m)]^3}{g''(m)} \\ k'(z)\left(\dfrac{g(m)}{g'(m)} - m - G\right) & \rho + k(z)g(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\theta(t) \\ \Omega_\theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k(z)G_\theta(t) \end{bmatrix} \tag{37}$$

以下の分析において(37)式の同次項の係数行列の符号は

$$\begin{bmatrix} 0 & + \\ + & + \end{bmatrix}$$

であると仮定する。このことは我々の以下の分析をもっぱら $\dot{m}(t) \geqq 0 (t \in [0, \infty))$ のケースに限定することを意味している。なお分析を簡単にするために以下の分析に際して，$t_m = 0$ と仮定する。

〔1〕 $p_0, p_1, \pi$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果

まず種々のパラメータの中で，$p_0, p_1, \pi$ の変化が最適 R & D 政策 $m(t)$ の時間径路にどのような影響を及ぼすかを検討してみよう。今 $\theta = p_0$ として考えれば，体系(37)は次のように示される。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{p_0}(t) \\ \dot{\Omega}_{p_0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(g')^3}{g''} \\ k'(z)\left(\dfrac{g(m)}{g'(m)} - m - G\right) & \rho + k(z)g(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{p_0}(t) \\ \Omega_{p_0}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k(z)G_{p_0}(t) \end{bmatrix} \tag{38}$$

ここで $G_{p_0}(t)$ を計算してみると，

$$G_{p_0}(t) = e^{-ht} > 0 \tag{39}$$

となる。[4] また $\theta = p_1, \pi$ の場合も

$$G_{p_1}(t) = \frac{h}{\rho} e^{-ht} > 0 \tag{40}$$

$$G\pi(t) = 1 - e^{-ht} > 0 \tag{41}$$

であることを考慮すれば，パラメータ $p_0, p_1, \pi$ の変化の効果は符号的に全く同等であることが分る。そこで以下 $p_0$ の場合で分析を進めることにする。

(38)式の同次項の係数行列および非同次項の符号は次の通りである。

$$\begin{bmatrix} 0 & + \\ + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix} \tag{42}$$

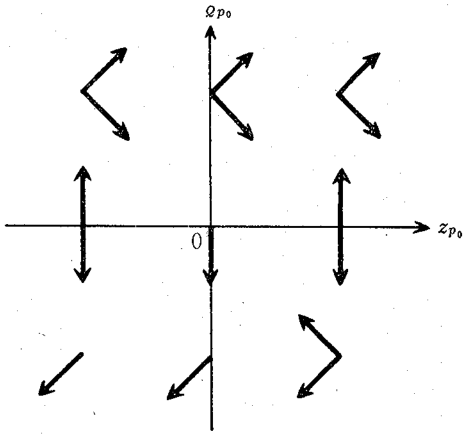
そこで $(z_{p_0}, \Omega_{p_0})$ 一平面上での解 $z_{p_0}(t), \Omega_{p_0}(t)$ の可能な変化の方向を図示す

---

（4） ただしここで，

$$G(t) = \rho B(t) - \dot{B}(t) = p_2 + \pi + (\rho + h)\left(\frac{p_0 - p_1 - \pi}{\rho + h} + \frac{p_1 - p_2}{\rho}\right)e^{-ht}$$

である。




<第 1 図>

れば第1図の如く示される。ところで $p_0$ が変化するとき，$z(0), \bar{z}$ は不変であるので次式が成立する。

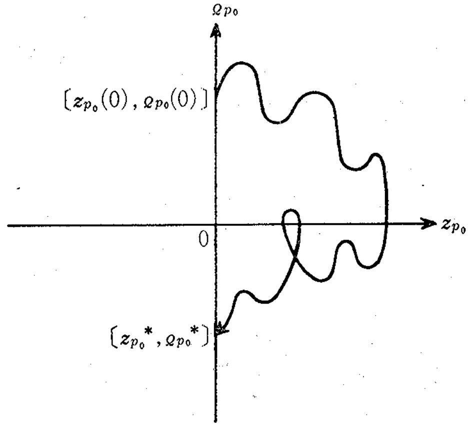
$$z_{p_0}(0)=0 \tag{43}$$

$$z_{p_0}{}^*=\bar{z}_{p_0}=0 \tag{44}$$

この条件(43)，(44)の意味するところは次の通りである。即ち（$z_{p_0}, \Omega_{p_0}$）―平面上において解 $[z_{p_0}(t), \Omega_{p_0}(t)]$ の時間径路が示す軌道は，垂直（縦）軸上の点から出発し，同じく垂直軸上の点に収束しなければならないということである。それゆえ(43)，(44)と第1図を考慮すれば，径路 $[z_{p_0}(t), \Omega_{p_0}(t)]$ は垂直軸の上半分（原点を除く）のある点から出発し，第1象限，第4象限を経て垂直軸の下半分のある点へ到達しなければならない。その間水平軸を1回以上通過することがあるかもしれないが，第2象限や第3象限内へ入ることは決してない。以上のことから典型的な径路が第2図に描かれている。

第2図からも明らかなように，径路 $[z_{p_0}(t), \Omega_{p_0}(t)]$ は次のような特性をもつことが分る。

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega_{p_0}(0)>0 & \\ \Omega_{p_0}(t)>0 & \text{for small } t \\ \Omega_{p_0}(t)<0 & \text{for large } t \end{array}\right\} \tag{45}$$




<第 2 図>

$$z_{p_0}(t) \geqq 0 \qquad \text{for } t \in [0, \infty) \tag{46}$$

更に(45)を(34)に代入すれば次のことが成立する。

$$\left.\begin{array}{ll} m_{p_0}(0) > 0 & \\ m_{p_0}(t) > 0 & \text{for small } t \\ m_{p_0}(t) < 0 & \text{for large } t \end{array}\right\} \tag{47}$$

要約すれば，パラメータ $p_0$ ($p_1, \pi$ についても同様であるが) の上昇が最適 R & D 政策の時間径路に及ぼす影響は，計画期間の前半部分における R & D 支出を増大させ，他方後半部分のそれを減少させることである。

〔2〕 $\rho$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果

次に主観割引率 $\rho$ の変化が最適 R & D 政策の時間径路に及ぼす影響を検討してみよう。まず $z_\rho(t), \Omega_\rho(t)$ に関する動学体系は次のように示される。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_\rho(t) \\ \dot{\Omega}_\rho(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(g')^3}{g''} \\ k'(z)\left(\dfrac{g}{g'} - m - G\right) & \rho + k(z)g(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\rho(t) \\ \Omega_\rho(t) \end{bmatrix}$$

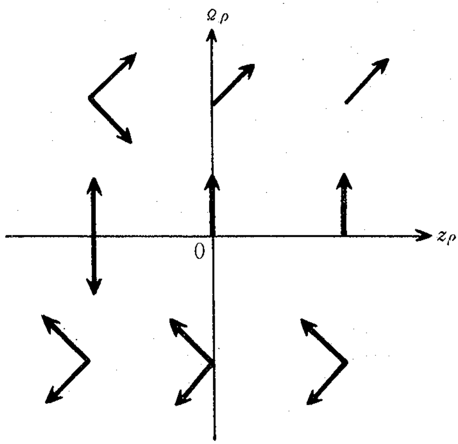
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{g'} - k(z)G_\rho(t) \end{bmatrix} \tag{48}$$

ここで $G_\rho(t)$ を計算してみると，

$$G_\rho(t) = -\frac{h}{\rho^2}(p_1 - p_2)e^{-ht} < 0 \tag{49}$$

となる。ここで(48)式の同次項の係数行列および非同次項の符号は次の通りである。

$$\begin{bmatrix} 0 & + \\ + & + \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ + \end{bmatrix} \tag{50}$$



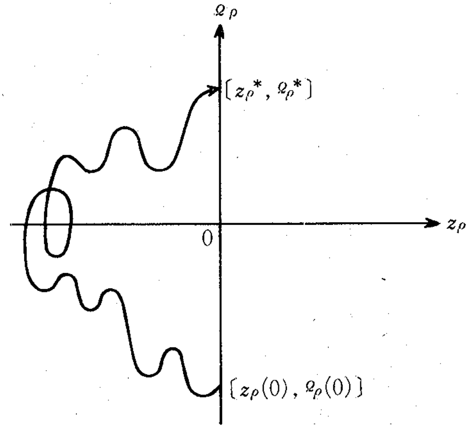

<第 3 図>

そこで $(z_\rho, \Omega_\rho)$ —平面上での解 $z_\rho(t)$, $\Omega_\rho(t)$ の可能な変化の方向を図示すれば第3図の如く示される。ところで $\rho$ が変化するとき，$z(0)$, $\bar{z}$ は不変であるので，$z_\rho(0) = \bar{z}_\rho = 0$ が成立する。従って解 $[z_\rho(t), \Omega_\rho(t)]$ は垂直軸の下半分のある点から出発し，第3象限，第2象限を経て垂直軸の上半分のある点に到達しなければならない。(第4図参照)

以上の考察から次のことが示されたことになる。

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega_\rho(0) < 0 & \\ \Omega_\rho(t) < 0 & \text{for small } t \\ \Omega_\rho(t) > 0 & \text{for large } t \end{array}\right\} \tag{51}$$

$$z_\rho(t) \leqq 0 \qquad \text{for } t \in [0, \infty) \tag{52}$$




<第 4 図>

更に(51)を(34)に代入すれば次のことが成立する。

$$\left.\begin{array}{ll} m_\rho(0)<0 & \\ m_\rho(t)<0 & \text{for small } t \\ m_\rho(t)>0 & \text{for large } t \end{array}\right\} \quad (53)$$

要約すれば，パラメータ $\rho$ の上昇が最適 R & D 政策の時間径路に及ぼす影響は，計画期間の前半部分における R & D 支出を減少させ，他方後半部分のそれを増大させることである。

〔3〕 $h$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果

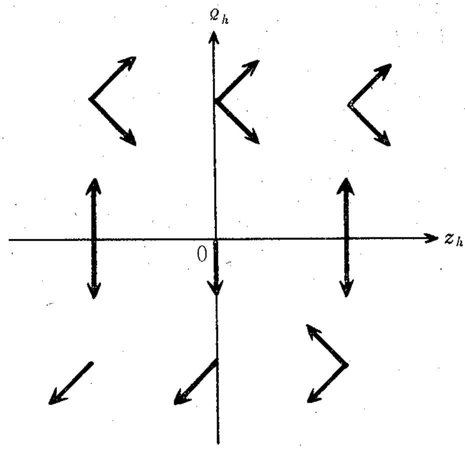
さてライバル企業のプロジェクトの完成率 $h$ が変化した場合の効果を調べてみよう。まず $z_h(t)$, $\Omega_h(t)$ に関する動学体系は次のように示される。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_h(t) \\ \dot{\Omega}_h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(g')^3}{g''} \\ k'(z)\left(\dfrac{g}{g'}-m-G\right) & \rho+k(z)g(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_h(t) \\ \Omega_h(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k(z)G_h(t) \end{bmatrix} \quad (54)$$

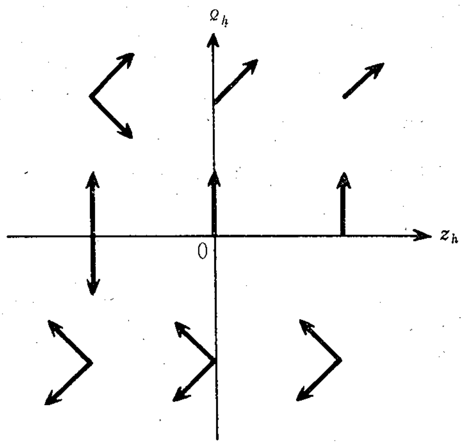
ここで $G_h(t)$ を計算してみると,

$$G_h(t)=\frac{exp(-ht)}{\rho}\{(p_1-p_2)-t[\rho(p_0-p_2-\pi)+h(p_1-p_2)]\} \quad (55)$$

であるから $G_h(t)$ の符号は時間の経過に対して正から負へとスイッチする。




<第 5 図>



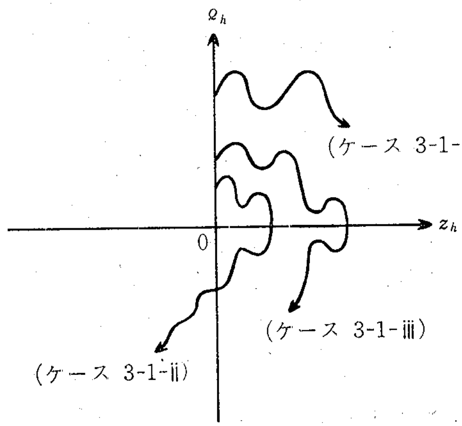

<第 6 図>

そこで今この符号が変化する時刻を $\hat{t}$ とする。このとき $(z_h, \Omega_h)$ —平面上での $z_h(t), \Omega_h(t)$ の可能な変化の方向は，$\hat{t}$ 時刻を境にして第5図から第6図へとスイッチする。

そこで以下 R & D 開始時刻における可能な2つの初期条件 $\Omega_h(0)>0$, $\Omega_h(0)<0$ に対して，$h$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果を検討する。

〔3-1〕 $\Omega_h(0)>0$ のケース

(i) $[z_h(\hat{t}), \Omega_h(\hat{t})]$ が第1象限にある場合，第7図から明らかなように，時刻 $\hat{t}$ 以後 $[z_h(t), \Omega_h(t)]$ は垂直軸へ到達することは不可能である。従ってこのケースは排除される。




<第 7 図>

(ii) $[z_h(\hat{t}), \Omega_h(\hat{t})]$ が第3象限にある場合，第7図から明らかなように，$\hat{t}$ 以後 $[z_h(t), \Omega_h(t)]$ は垂直軸の上半分のある点に収束することになるであろう。従ってこのケースでは $\Omega_h(t)$ の符号は，正→負→正と変化し，それに応じて $m_h(t)$ の符号も同様に正→負→正と変化することになる。換言すれば，この場合最適 R & D 政策 $m(t)$ は完成率 $h$ の上昇に対して計画期間の初めの部分と終りの部分で増大するが，途中のある部分では減少するという変化を示すことが分る。

(iii) $[z_h(\hat{t}), \Omega_h(\hat{t})]$ が第4象限にある場合，第7図から明らかなように，$\hat{t}$ 以後 $[z_h(t), \Omega_h(t)]$ は垂直軸の下半分に収束するケースと垂直軸の上半分に収束するケースとが存在する。前者にあっては，$\Omega_h(t)$ は正→負と変化しそれに応じて $m_h(t)$ も正→負と変化する。他方後者のケースでは，(ii)の場合と同様，$\Omega_h(t)$ と $m_h(t)$ はともに正→負→正と変化する。

以上を要約すれば，初期条件 $\Omega_h(0)<0$ の場合，完成率 $h$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果には次の2つのパターンが存在するということである。即ち，

①最適 R & D 政策 $m(t)$ の前半部分を増大させ，後半部分を減少させるパターンと，

②最適 R & D 政策 $m(t)$ の初期及び終りの部分を増大させ，途中のある部分を減少させるパターン，

である。

〔3-2〕 $\Omega_h(0)<0$ のケース

このケースにおいては，時刻 $\hat{t}$ の $[z_h(\hat{t}), \Omega_h(\hat{t})]$ は必ず第3象限に存在する。従って $\hat{t}$ 以後垂直軸の上半分のある点に収束する。それゆえ $\Omega_h(t)$ は負→正と変化しそれに応じて $m_h(t)$ も負→正と変化する。

以上のことから初期条件 $\Omega_h(0)<0$ の場合，完成率 $h$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果は計画期間の前半部分における $m(t)$ を減少させ，他方後半部分のそれを増大させるというものである。

〔4〕 $p_2$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果

次に自社プロジェクトの完成が遅れ，ライバルに先行を許した後で模倣者として完成させた時得られると予想される利益のフロー $p_2$ の変化が持つ効果を吟味してみよう。まず，$z_{p_2}(t), \Omega_{p_2}(t)$ に関する動学体系は次のように示される。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{p_2}(t) \\ \Omega_{p_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(g')^3}{g''} \\ k'(z)\left(\dfrac{g}{g'}-m-G\right) & \rho+k(z)g(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{p_2}(t) \\ \Omega_{p_2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k(z)G_{p_2}(t) \end{bmatrix} \tag{56}$$

ここで $G_{p_2}(t)$ を計算してみると,

$$G_{p_2}(t)=1-\left(\frac{\rho+h}{\rho}\right)e^{-ht} \tag{57}$$

であるから, $G_{p_2}(t)$ の符号は時間の経過に対して負から正へと変わる。これは〔2〕の $h$ の変化のケースと全く対称的であることが分る。即ち, $(z_{p_2}, \Omega_{p_2})$ ––平面上での解 $z_{p_2}(t), \Omega_{p_2}(t)$ の可能な変化の方向は $\hat{t}$ 時刻を境に第6図から第5図へとスイッチする。そこで以下R＆D開始時刻における可能な2つの初期条件 $\Omega_{p_2}(0)>0, \Omega_{p_2}(0)<0$ に対して, $p_2$ の変化が最適R＆D政策に及ぼす効果を検討する。

〔4-1〕 $\Omega_{p_2}(0)>0$ のケース

このケースにおいては時刻 $\hat{t}$ における $[z_{p_2}(\hat{t}), \Omega_{p_2}(\hat{t})]$ は必ず1象限に存在する。従って $\hat{t}$ 以後垂直軸の下半分のある点に収束する。それゆえ $\Omega_{p_2}(t)$ は正→負と変化し，それに対応して $m_{p_2}(t)$ も正→負と変化する。

以上のことから，初期条件 $\Omega_{p_2}(0)>0$ の場合, $p_2$ の変化が最適R＆D政策に及ぼす効果は計画期間の前半部分の $m(t)$ を増大させ, 他方後半部分のそれを減少させるというものである。

〔4-2〕 $\Omega_{p_2}(0)<0$ のケース

(i) $[z_{p_2}(\hat{t}), \Omega_{p_2}(\hat{t})]$ が第3象限にある場合, $\hat{t}$ 以後 $[z_{p_2}(t), \Omega_{p_2}(t)]$ は垂直軸へ到達することは不可能である。従ってこのケースは排除される。

(ii) $[z_{p_2}(\hat{t}), \Omega_{p_2}(\hat{t})]$ が第1象限にある場合, $\hat{t}$ 以後 $[z_{p_2}(t), \Omega_{p_2}(t)]$ は垂直軸の下半分のある点に収束することになるであろう。従ってこのケースでは, $\Omega_{p_2}(t)$ の符号は負→正→負と変化し，それに応じて $m_{p_2}(t)$ の符号も

同じく負→正→負と変化することになる。

(iii)　$[z_{p_2}(\hat{t}), \Omega_{p_2}(\hat{t})]$ が第2象限にある場合，$\hat{t}$ 以後 $[z_{p_2}(t), \Omega_{p_2}(t)]$ は垂直軸の上半分に収束するケースと，更に第1象限，第4象限を通過して垂直軸の下半分に収束するケースとが存在する。前者において $\Omega_{p_2}(t)$ は負→正と変化しそれに対応して $m_{p_2}(t)$ も負→正と変化する。他方後者において $\Omega_{p_2}(t)$ は負→正→負と変化し $m_{p_2}(t)$ もそれに対応して負→正→負と変化する。

以上を要約すれば，初期条件が $\Omega_{p_2}(0)<0$ の場合，$p_2$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果には次の2つのパターンが存在する。即ち，

①最適 R & D 政策 $m(t)$ の前半部分を減少させ，後半部分を増大させるパターンと，

②最適 R & D 政策 $m(t)$ の初期及び計画末期の部分を減少させるが，途中のある部分では増大させるパターン，

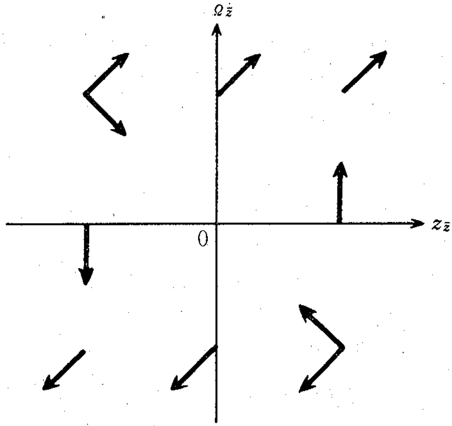
である。

〔5〕 $\bar{z}$ の変化が最適 R & D 政策に及ぼす効果

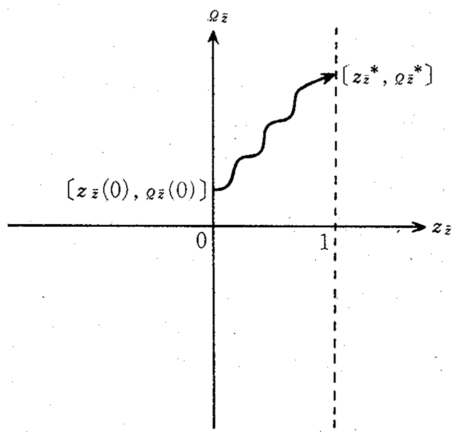
プロジェクトの完成が確実であるような累積的有効 R & D の努力の最小の値 $\bar{z}$ が変化するとき，それが最適 R & D 政策に及ぼす効果を検討する。まず，$z_{\bar{z}}(t), \Omega_{\bar{z}}(t)$ に関する動学体系は次のように示される。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{\bar{z}}(t) \\ \dot{\Omega}_{\bar{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(g')^3}{g''} \\ k'(z)\left(\dfrac{g}{g'}-m-G\right) & \rho+k(z)g(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\bar{z}}(t) \\ \Omega_{\bar{z}}(t) \end{bmatrix} \tag{58}$$

動学体系(58)の解の可能な変化の方向を示すと第8図の通りである。また $z_{\bar{z}}(0)=0, \bar{z}_{\bar{z}}=1$ であるから，解 $[z_{\bar{z}}(t), \Omega_{\bar{z}}(t)]$ は垂直軸のある点から出発し，$z_{\bar{z}}(t)=1$ を満す線上のある点に収束しなければならない。従って第9図に描かれているようにこの場合 $[z_{\bar{z}}(t), \Omega_{\bar{z}}(t)]$ は，垂直軸の上半分のある点から出発し $z_{\bar{z}}(t)=1$ を満す線上の同じく上半分のある点に収束しなければならないことが分る。即ち計画期間を通じて，$\Omega_{\bar{z}}(t)>0$ であり，それに対応して $m_{\bar{z}}(t)>0$




<第 8 図>




<第 9 図>

である。

以上を要約すれば，$\bar{z}$ の上昇は計画期間を通じて最適 R & D 政策 $m(t)$ を増大させるという効果をもつと言える。

## 参 考 文 献

〔1〕 板垣有記輔「個人の消費・貯蓄・資産保有および労働供給に及ぼす財産税の効果について——比較動学分析——」『創価経済論集』Vol. 5, No. 2, 1975, pp. 63–101.

〔2〕 板垣有記輔「個人の消費・貯蓄・資産保有および労働供給に及ぼす所得税の効果について——比較動学分析——」『創価経済論集』Vol. 5, No. 3・4, (創立5周年記念論文集) 1976, pp. 30–38.

〔3〕 Itagaki, Y. "The Effects of Expenditure Tax on Individual Consumption, Savings, Assets Holdings and Labor Supply —— A Comparative Dynamic Analysis in the Context of a Life-Cycle Model," *Soka-keizaironshu*, Vol. VI, No. 3, 1976, pp. 121–132.

〔4〕 Kamien, M. I. & N. L. Schwartz, "Expenditure Patterns for Risky R and D Projects," *Journal of Applied Probability*, Vol. 8, (March) 1971, pp. 60–73.

〔5〕 ———, "Timing of Innovations under Rivalry," *Econometrica*, Vol. 40, 1972, pp. 43–60.

〔6〕 ———, "Risky R & D with Rivalry," *Annals of Economic and Social Measurement*, Vol. 3, No. 1, 1974, pp. 267–277.

〔7〕 ———, "Patent Life and R & D Rivalry," *AER*, Vol. 64, 1974, pp. 183–187.

〔8〕 ———, "Market Structure and Innovation : A Survey," *Journal of Economic Literature*, Vol. 13, 1975, pp. 1–37.

〔9〕 ———, "Technology : More for Less?," in Weintraub, S. (ed.) *Modern Economic Thought*, University of Pennsylvania Press, 1976, pp. 501–515.

〔10〕 ———, "On the Degree of Rivalry for Maximum Innovative Activity," *QJE*, Vol. 40, 1976, pp. 245–260.

〔11〕 ———, "Potential Rivalry, Monopoly Profits and the Pace of Inventive Activity," *RES*, Vol. XLV, 1978, pp. 547–557.

〔12〕 ———, "Self-Financing of an R & D Project," *AER*, Vol. 68, 1978, pp. 252–261.

〔13〕 ———, "Optimal Exhaustible Resource Depletion with Endogenous Technical Change," *RES*, Vol. XLV, 1978, pp. 179–196.

〔14〕 ———, "A Generalized Hazard Rate," *Economic Letters*, Vol. 5, 1980, pp. 245–249.

〔15〕 ———, *Dynamic Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier North Holland, 1981.

〔16〕 ———, *Market Structure and Innovation*, Cambridge University Press, 1982.

〔17〕 Oniki, H. "Comparative Dynamics in the Theory of Optimal Growth," *Keizaigaku* (*Tohoku Economic Journal*), Vol. 30, 1969, pp. 48-57.

〔18〕 Oniki, H. "Comparative Dynamics (Sensitivity Analysis) in Optimal Control Theory," *Journal of Economic Theory*, Vol. 6, No. 3, 1973, pp. 265-283.