ファジィ多目的非線形計画問題に対するコンプレックス法に基づく対話型意思決定手法

木村　等
矢野　均
坂和正敏

I　はじめに

一般に，従来の数理計画法は，与えられた制約条件のもとで単一の目的関数を最小（あるいは最大）にするような解を求めるための最適化手法として意欲的に研究され，多くの成果を生んできている。しかし，このような数理計画法として定式化される問題は，単一目的で，しかも目的関数と制約条件を明確に数式として与えられていることが前提条件となっている。

一方，近年，社会的要求の多様化に伴って，現実に対象とするシステムの中には，例えば，社会システム，経営システム，環境システムなどのように，意思決定者（Decision Maker：DM）の主観に依存して，相競合する複数個の目的をも同時に考慮した問題設定が望まれてきている。しかし，人間の判断は本来あいまいなものであるから，DMの主観には本質的にあいまい性が含まれている。このような人間の判断の主観的側面におけるあいまいさを定量的に解析するため，Zadeh[8]~[10] は，1965年以来，特性関数を一般化したメンバシップ関数を導入することにより特性づけられるファジィ集合の概念を提案し，その理論を発展させてきた。Zadeh によって導入されたファジィ集合論に基づいて，1978年，Dubois と Prade[2]~[4] は，実数直線上のファジィ部分集合のうち，特にファジィ数について考察した。彼らはファジィ数を左参照関数と右参照関数により，L-Rファジィ数として表現し，これらのL-Rファジィ数に対するさまざまな演算を導入した。

このような状況のもとで，本論文では，DMの判断のあいまい性がすべての

目的関数と制約条件の係数に含まれるファジィ多目的非線形計画問題について考察する。そのために，制約条件と目的関数に含まれるあいまい性を同時に考慮して，通常の多目的非線形計画問題におけるパレート最適解の概念を拡張したいわゆるファジィパレート最適解の定義を行い，DMとの対話によりファジィパレート最適解の中から彼の選好解を効率よく導くための対話型手法を提案する。提案する手法では，目的関数が n 個の時，初期の $n+1$ 個のパレート最適解に対応して求められた $n+1$ 個のファジィパレート最適解がDMに示され，DMはこのうちどの解を最も選好しないかを答える。これに対して最も選好しない解の代わりに，新しいパレート最適解と対応するファジィパレート最適解がコンプレックス法[1]により求められる。このようにDMが $n+1$ 個のファジィパレート最適解のうちどれを最も選好しないかを答えるという対話過程により，ファジィパレート最適解の中から最終的に，定式化された問題のあいまいさを考慮したDMの選好解を効率よく導くことが可能となる。さらに，提案した手法に基づき対話型計算機プログラムが作成され，数値例に対する対話過程が示される。

II L‐Rファジィ数

Zadeh によって提案されたファジィ集合[8]は，通常の集合とは異なり，個々の要素がその集合に属するか属さないかが明確に規定されていない。このようなファジィ集合を定義するために，個々の要素がその集合に属する度合いを〔0, 1〕閉区間に対応させるメンバシップ関数が導入されている。特に，Dubois と Prade によって提案されたL‐Rファジィ数[2]は，対象とする要素の集合が実数空間 R^1 であるようなファジィ集合の部分集合であり，そのメンバシップ関数は次のように定義される。

〔定義1〕

ファジィ集合 $\tilde{m}$ がL‐Rファジィ数であるとは，そのメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{m}}$ が

$$\mu_{\tilde{m}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{\bar{m}-x}{\alpha}\right) & x\leqq\bar{m}\quad\alpha>0 \qquad (1)\\[2ex] R\left(\dfrac{x-\bar{m}}{\beta}\right) & x\geqq\bar{m}\quad\beta>0 \qquad (2)\end{cases}$$

で表わされるものである。ここで，$\bar{m}$ は $\tilde{m}$ の平均値で，α,β は左右の広がりのパラメータを示す。さらに $L(\cdot)$ は次の（i）〜(iii) で定義される関数であり，$R(\cdot)$ も $L(\cdot)$ と同様である。

（i）　$L(x)=L(-x)$　　（3）

（ii）　$L(0)=1$　　（4）

(iii)　Lは　$[0,\infty)$ で非増加　　（5）

Dubois と Prade は（1），（2）式で定義されるL・Rファジィ数 $\tilde{m}$ を，$(\bar{m},\alpha,\beta)_{LR}$ で表わした。彼らは2つのL・Rファジィ数 $\tilde{m}=(\bar{m},\alpha,\beta)_{LR}$，$\tilde{n}=(\bar{n},\gamma,\delta)_{RL}$ に対して，Zadeh の拡張原理[10]を適用して，$\tilde{m}$ が $\tilde{n}$ より大きい可能性 $v(\tilde{m}>\tilde{n})$ と $\tilde{n}$ が $\tilde{m}$ より大きい可能性 $v(\tilde{m}<\tilde{n})$[4]が次のように表わされることを示した。

（i）　$\bar{m}\geqq\bar{n}$ の時

$$v(\tilde{m}>\tilde{n})=1 \qquad (6)$$

$$v(\tilde{m}<\tilde{n})=L\left(\frac{\bar{m}-\bar{n}}{\alpha+\delta}\right) \qquad (7)$$

(ii)　$\bar{m}\leqq\bar{n}$ の時

$$v(\tilde{m}>\tilde{n})=R\left(\frac{\bar{n}-\bar{m}}{\beta+\gamma}\right) \qquad (8)$$

$$v(\tilde{m}<\tilde{n})=1 \qquad (9)$$

このようにL・Rファジィ数の大小関係は一般の不等号では表現できないので，彼らはしきい値 τ を設定して，$\tilde{m}>_{\tau}\tilde{n}$，$\tilde{m}\geqq_{\tau}\tilde{n}$ を次のように定義した。

$$\tilde{m}>_{\tau}\tilde{n} \iff v(\tilde{m}<\tilde{n})\leqq\tau \qquad (10)$$

$$\tilde{m}\geqq_{\tau}\tilde{n} \iff v(\tilde{m}>\tilde{n})\geqq\tau \qquad (11)$$

III ファジィ多目的非線形計画問題

ここでは，次のような一般の多目的非線形計画問題を原問題と呼ぶ。

原問題

$$\begin{aligned} &\min_{x} \quad f(x) \\ &\text{subject to} \quad g(x) \leqq z \end{aligned} \tag{12}$$

ここで

$$f(x) \triangleq (f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x))^T \tag{13}$$

$$g(x) \triangleq (g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_m(x))^T \tag{14}$$

$$z \triangleq (z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_m)^T \tag{15}$$

$$x \triangleq (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N) \tag{16}$$

一般性を失うことなく，$f_i(x)>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，$g_j(x)>0$ $(j=1, 2, \cdots, m)$，$z_j>0$ $(j=1, 2, \cdots, m)$と仮定できるが，本論文ではさらに$f_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，$g_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ は凸関数であるという凸性の仮定を設けるとともに，$f(x)$，$g(x)$ の係数はすべて決定変数 x に関して線形に含まれているものとする。この原問題に対して，次式で定義されるファジィ化された問題について考察する。

ファジィ化された問題

$$\begin{aligned} &\min_{x} \quad \tilde{f}(x) \\ &\text{subject to} \quad \tilde{g}(x) \leqq \tilde{z} \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，$\tilde{f}(x)$，$\tilde{g}(x)$ は決定変数 x に対して線形に含まれている係数がファジィ化されていることを表わしており，これらのファジィ数はL-Rファジィ数として解釈できる。即ち，

$$\tilde{f}_i(x) = (f_i(x),\ \underline{f}_i(x),\ \overline{f}_i(x))_{LR} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{18}$$

$$\tilde{g}_j(x) = (g_j(x),\ \underline{g}_j(x),\ \overline{g}_j(x))_{LR} \quad (j=1, 2, \cdots, m) \tag{19}$$

$$\tilde{z}_j = (z_j,\ \underline{z}_j,\ \overline{z}_j)_{LR} \quad (j=1, 2, \cdots, m) \tag{20}$$

とおけば，

$$\tilde{f}(x) \triangleq (\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \cdots, \tilde{f}_n(x))^T \tag{21}$$

$$\tilde{g}(x) \triangleq (\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x), \cdots, \tilde{g}_m(x))^T \tag{22}$$

$$\tilde{z} \triangleq (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \cdots, \tilde{z}_m)^T \tag{23}$$

として表わされる。

このファジィ化された問題は，制約条件のみならず目的関数にもあいまい性が含まれる多目的非線形計画問題であるから，通常の多目的非線形計画問題に対するいわゆるパレート最適解の概念をそのまま適用することはできない。従って本論文では，通常のパレート最適解の概念を拡張して，問題に含まれているあいまい性を考慮したパレート最適解としてファジィパレート最適解の概念を導入する。そのための準備として，原問題 (12) のパレート最適解の 1 つを x^0 とし，τに依存する集合 $D(\tau)$ を次のように定義する。

$$D(\tau) \triangleq F(\tau) \wedge G(\tau) \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1 \tag{24}$$

ここで

$$F(\tau) \triangleq \{x \mid \tilde{f}(x) \underset{\tau}{<} \tilde{f}(x^0)\} \tag{25}$$

$$G(\tau) \triangleq \{x \mid \tilde{g}(x) \underset{1-\tau}{\leqq} \tilde{z}\} \tag{26}$$

この時，次の定理が成立する。

〔定理 1〕

(24) 式で定義した集合 $D(\tau)$ が 1 点集合 $\{x^*\}$ より成るような τ が，〔0，1〕閉区間で唯一存在する。

(証明)

$F(\tau)$, $G(\tau)$ の定義より明らかに

$$D(1) = F(1) \wedge G(1) \neq \phi$$

$$D(0) = F(0) \wedge G(0) = \phi$$

また，制約領域 A の面積を示す関数を $S(A)$ で表わせば，(10)，(11) 式の定義から，任意の $\tau_1, \tau_2 (0 < \tau_1 < \tau_2 < 1)$ に対して

$$0 = S(D(0)) \leqq S(D(\tau_1)) \leqq S(D(\tau_2)) < S(D(1))$$

となり，$S(D(\tau)) = \overline{S}(\tau)$ とおけば $\overline{S}$ は τ に関して連続かつ単調増加となるか

ら，$\tau > \tau^*$ なる任意の τ に対して次式を満たす τ^* が唯一存在する。

$$\overline{S}(\tau^*) = 0 \quad かつ \quad \overline{S}(\tau) > 0$$

この時，$\overline{S}$ の連続性から

$$D(\tau^*) \neq \phi$$

さらに $D(\tau)$ は任意の $\tau(0 \leqq \tau \leqq 1)$ に対してコンパクトであることより，$D(\tau^*)$ は1点 x^* のみを含む点集合，即ち

$$D(\tau^*) = \{x^*\} \qquad 0 \leqq \tau^* \leqq 1$$

である。　　**Q.E.D.**

定理1の結果に基づいて，ファジィパレート最適解を次のように定義することができる。

〔定義2〕

原問題(12)のパレート最適解の1つを x^0 とし，(24)〜(26)式で定義される集合 $D(\tau)$ がある $\tau = \tau^*$ において1点集合 $\{x^*\}$ より成る時，x^* をパレート最適解 x^0 に対するファジィパレート最適解という。

このようにして定義されたファジィパレート最適解 x^* は，原問題(12)のパレート最適解 x^0 に対して目的関数空間において常に $f(x^*) \leqq f(x^0)$ を満たし，かつ原問題(12)の活性な制約においては $g(x^*) \geqq z$ を満たす。即ち，ファジィパレート最適解は目的と制約に含まれるあいまい性を同時に考慮しつつ，制約を許容範囲内で犠牲にすることで目的関数を可能な限り改善した解であると言える。

ファジィパレート最適解 x^* は $D(\tau)$ の定義から次の τ 最小化問題 A を解くことにより得られる。

τ 最小化問題 A

$$\begin{aligned} &\min_{0 \leqq \tau \leqq 1} \ \tau \\ &\text{subject to} \quad \tilde{f}(x) \underset{\tau}{<} \tilde{f}(x^0) \\ &\qquad\qquad\quad \tilde{g}(x) \underset{1-\tau}{\leqq} \tilde{z} \end{aligned} \tag{27}$$

ここで定理1より明らかに τ 最小化問題 A は実行可能であり，その解は唯一存

在する。

以下では，簡単のため $L(x)=R(x)$ と仮定し，τ 最小化問題 A の制約式を一般の不等号制約式に変換しよう。

(7)，(10) 式から

$$\tilde{f}(x) \underset{\tau}{<} \tilde{f}(x^0) \iff L\left(\frac{f(x^0)-f(x)}{\underline{f}(x^0)+\bar{f}(x)}\right) \leqq \tau \tag{28}$$

となるが，この不等式はL・R関数の性質により次のように展開できる。

$$f(x)-f(x^0)+L^{-1}(\tau)\cdot(\underline{f}(x^0)+\bar{f}(x)) \leqq 0 \tag{29}$$

同じく，(8)，(11) 式と，仮定 $L(x)=R(x)$ より，

$$\tilde{g}(x) \underset{1-\tau}{\leqq} \tilde{z} \iff L\left(\frac{g(x)-z}{\underline{g}(x)+\bar{z}}\right) \geqq 1-\tau \tag{30}$$

は次のように展開できる。

$$g(x)-z-L^{-1}(1-\tau)\cdot(\underline{g}(x)+\bar{z}) \leqq 0 \tag{31}$$

従って，最小化問題 A は一般の不等号を用いれば，結局，次のような τ 最小化問題 B に変換される。

τ 最小化問題 B

$$\min_{0\leqq\tau\leqq1} \tau$$

$$\text{subject to}\quad f_i(x)-f_i(x^0)+(1-\tau)\cdot(\underline{f}_i(x^0)+\bar{f}_i(x)) \leqq 0 \tag{32}$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$
$$g_j(x)-z_j-\tau\cdot(\underline{g}_j(x)+\bar{z}_j) \leqq 0$$
$$(j=1,2,\cdots,m)$$

ここで，もし，L 関数，R 関数として $\max(0,1-|x|)$ を採用すると仮定すれば，τ 最小化問題 B は次の τ 最小化問題 C に変換できる。

τ 最小化問題 C

$$\min_{0\leqq\tau\leqq1} \tau$$

$$\text{snbject to}\quad f_i(x)-f_i(x^0)+(1-\tau)\cdot(\underline{f}_i(x^0)+\bar{f}_i(x)) \leqq 0$$
$$(i=1,2,\cdots,n) \tag{33}$$
$$g_j(x)-z_j-\tau\cdot(\underline{g}_j(x)+\bar{z}_j) \leqq 0$$
$$(j=1,2,\cdots,m)$$

IV コンプレックス法に基づく対話型意思決定手法

ファジィ多目的非線形計画問題に対して，本論文で導入したファジィパレート最適解の集合の中からDMの選好解を選ぶため，ここではコンプレックス法[1]に基づくヒューリスティックな対話型意思決定手法を提案する。

まず，前節で定義したファジィパレート最適解を得るためには原問題（12）に対するパレート最適解が必要であるが，ここでは原問題（12）に対して次のようなε制約問題$P_1(\varepsilon_{-1})$を解く[5]ことにより求める。

ε制約問題$P_1(\varepsilon_{-1})$

$$\begin{aligned}&\min_{x}\ f_1(x)\\&\text{subject to}\quad x\in X\cap X_1(\varepsilon_{-1})\end{aligned}\tag{34}$$

ここで

$$X \triangleq \{x\,|\,g_j(x)\leqq z,\ j=1,2,\cdots,m\}\tag{35}$$

$$\varepsilon_{-1}\triangleq(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n)\tag{36}$$

$$X_1(\varepsilon_{-1})\triangleq\{x\,|\,f_i(x)\leqq\varepsilon_i,\ i=2,\cdots,n\}\tag{37}$$

$$\varepsilon_{-1}\in E_1\triangleq\{\varepsilon_{-1}\,|\,X(\varepsilon_{-1})\neq\phi\}\tag{38}$$

ここで，f_1はどの目的関数であってもよいことは言うまでもない。また，(38)式はε制約問題$P_1(\varepsilon_{-1})$が実行可能解を持つための必要条件である。

この時，1個のファジィパレート最適解は次のアルゴリズムにより求めることができる。

<アルゴリズム1>

step 1 ε_{-1}の値$(\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n)$を設定する。

step 2 step 1で設定されたε_{-1}の値に対するε制約問題$P_1(\varepsilon_{-1})$を解き，パレート最適解x^oを得る。

step 3 このパレート最適解x^oに対するτ最小化問題を解き，ファジィパレート最適解x^*を得る。

本論文で提案する手法は，アルゴリズム1で設定されるε_{-1}の空間でコンプ

レックスを作り，過剰鏡像を繰り返すことによりコンプレックスを縮少してゆき，DMがコンプレックスの各端点に対するファジィパレート最適解をすべて無差別とみなす時，終了する。コンプレックス法に基づく対話型意思決定手法は、n 目的の場合に対しては次のアルゴリズム2で与えられる。

<アルゴリズム2>

step 1　$n+1$ 個の初期ファジィパレート最適解を計算する。ここで，初期コンプレックスを ε_{-1} 空間で可能な限り大きくとるため，原問題の各目的の個別の最小値により与えられる n 個のパレート最適解に対して，アルゴリズム1により求められるファジィパレート最適解を，初期ファジィパレート最適解の一部として用いる。

step 2　DMは，得られたファジィパレート最適解の中から最も選好しない解 f^h を選ぶ。もし無差別と判断すれば，step 5へ行く。

step 3　f^h に対応するパレート最適解を ε_{-1} 空間に正射影した点を ε^h_{-1} とし，他の n 個のパレート最適解の重心を ε_{-1} 空間に正射影した点を ε^0_{-1} として，次のような過剰鏡像を行う。ここで α の初期値は1より大きい値に設定する。

$$\varepsilon^r_{-1} = (1+\alpha)\cdot\varepsilon^0_{-1} - \alpha\cdot\varepsilon^h_{-1} \qquad (39)$$

step 4　ε^r_{-1} に対するファジィパレート最適解をアルゴリズム1により求め，それを f^r とする。DMは f^h と f^r の1対比較を行い，f^r を選好するならば f^h を f^r におきかえて step 2へもどる。そうでなければ，$\alpha \leftarrow \alpha/2$ として step 3へもどる。

step 5　$n+1$ 個の原問題に対するパレート最適解を ε_{-1} 空間に正射影し，その重心 ε^0_{-1} に対するファジィパレート最適解をDMの選好解とする。

（注意）

提案した手法においては，ε 制約問題 $P_1(\varepsilon_{-1})$ を解く時の実行可能性は必ずしも保証されていないので，もし実行不可能となった場合には，次の操作により α を変化させる。

(i) $\alpha<1$ の時 $\alpha \leftarrow 0.9 \cdot \alpha$ (40)

(ii) $\alpha>1$ の時 $\alpha \leftarrow 1+(\alpha-1)/2$ (41)

(ii) の操作を繰り返すと，α はしだいに 1 に接近するので，もし 1 に非常に近い値になれば (i) の操作にもどる。

V 数値例

ここでは，前節で提案した対話型意思決定手法に基づいて作成された対話型計算機プログラムを，数値例に適用する。まず，原問題として次のような問題を考える。

原問題

$$\min_x \ f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+10x_2-120x_3+3625 \quad (42)$$

$$\min_x \ f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+80x_1-448x_2+80x_3+53376 \quad (43)$$

$$\min_x \ f_3(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-448x_1+80x_2+80x_3+53376 \quad (44)$$

subject to

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqq 100 \quad (45)$$

$$0 \leqq x_1,\ x_2,\ x_3 \leqq 10 \quad (46)$$

この問題に対するDMの各目的と制約に対する主観的なあいまい性に基づいて，次のようなファジィ化された問題が得られているものとする。

ファジィ化された問題

$$\min_x \ \tilde{f}_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=\tilde{1} \odot (x_1^2+x_2^2+x_3^2+10x_2-120x_3+3625) \quad (47)$$

$$\min_x \ \tilde{f}_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=\tilde{1} \odot (x_1^2+x_2^2+x_3^2+80x_1-448x_2+80x_3+53376) \quad (48)$$

$$\min_x \ \tilde{f}_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=\tilde{1} \odot (x_1^2+x_2^2+x_3^2-448x_1+80x_2+80x_3+53376) \quad (49)$$

ここで $\tilde{1}=(1,0.03,0.03)_{LR}$ (50)

subject to

$$\tilde{1} \odot (x_1^2+x_2^2+x_3^2) \leqq \widetilde{100} \quad (51)$$

$$0 \leqq x_1,\ x_2,\ x_3 \leqq 10 \quad (52)$$

ここで $\tilde{1}=(1, 0.04, 0.04)_{LR}$ (53)

$\widetilde{100}=(100, 5, 5)_{LR}$ (54)

$L(x)=R(x)=\max(0, 1-|x|)$ (55)

$\odot$は Dubois と Prade によって導入されたL‐Rファジィ数に関する積の演算子[2]である。

例示のため，DMの選好構造は正確に次の効用関数 $U(f_1, f_2, f_3)$ で表わされるものと仮定する。

$$U(f_1, f_2, f_3)=-101700 f_1-(f_2-40000)^2-(f_3-45000)^2 \quad (56)$$

ここで，(56) 式の効用関数の陽的な形は，前節のアルゴリズム２の step 2，4 においてDMの選好をシミュレートするためだけに用いられることに注意しよう。即ち，DMは２点 A, B に対して

$$|U(A)-U(B)|<3000000 \quad (57)$$

の時，無差別であると判断するものと仮定する。また，原問題のパレート最適解を得るための単一目的最小化問題 $P_1(\varepsilon_{-1})$ は，Lasdon らによって提案されたGRG法[6] (Generalized Reduced Gradient Method:一般縮少勾配法) に基づいて作成されたGRG２[7]と呼ばれるプログラムを用いて解かれる。さらに，パレート最適解 x^0 に対するファジィパレート最適解は，τ 最小化問題 C を解くことにより求められる。

以下では，仮想的なDMとの対話過程を計算結果に基づき解説し，検討を加える。

(i) ４個のファジィパレート最適解が表示される。(表１)

表１ 初期ファジィパレート最適解

	1	2	3	4
f_1	2525	3825	3725	2813
f_2	54276	48996	54276	52404
f_3	54276	54276	48996	52404

ここで，１～３に示されているファジィパレート最適解は，原問題の各目的関

数をそれぞれ個別に最小化することによって得られるパレート最適解に対応している。

(ii)　表1の4個の解のうち，(56) 式で表わされる効用関数を持つDMは3番目の解を最も選好しないので，ε_{-1} 空間において過剰鏡像を行う。α の初期値として 1.3 を設定する。この時，(39) 式より

$$\varepsilon^{\gamma}_{-1}=\begin{pmatrix}\varepsilon^{\gamma}_{2}\\ \varepsilon^{\gamma}_{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48792\\ 59705\end{pmatrix} \tag{58}$$

となり，対応する ε 制約問題 $P_1(\varepsilon_{-1})$ は実行不可能となるので，(41) 式により α を更新してパレート最適解を求め，対応する新しいファジィパレート最適解を τ 最小化問題を解くことにより得る。(表2)

表2　ファジィパレート最適解の比較

	新しい点	3
f_1	3825	3725
f_2	48996	54276
f_3	54276	48996

表2においてDMは新しい点を選好するので，表1の3番目の解を新しいファジィパレート最適解と入れ替える。

(iii)　以下同様にDMとの対話を繰り返し，41回の選好評価を行うことにより次の4個のファジィパレート最適解を得た。(表3)

表3　最終的に無差別となったファジィパレート最適解

	1	2	3	4
f_1	3065	3113	2942	2813
f_2	51456	51020	51732	52404
f_3	52114	52467	52420	52404

ここで，仮想的なDMは (56) 式に基づいてこれらの4個の解を無差別とみなすので，これらの解に対応する ε_{-1} 空間における4点の重心を求め，ε 制約問題

$P_1(\varepsilon_{-1})$ を解くことによりパレート最適解を得る。このパレート最適解に対するファジィパレート最適解が，あいまい性を含むDMの選好解となる。（表４）

表４　あいまい性を含むDMの選好解

目的関数		決定変数	
f_1	3013	x_1	5.057
f_2	51556	x_2	6.377
f_3	52253	x_3	6.544

ここで得られた選好解はDMの判断のあいまい性を考慮しているため，この手法の妥当性は，本来，現実の意思決定の場に適用されることにより評価されるべきであるが，ちなみに，原問題(42)〜(46)に対して $\max_{x\in X} U(f_1, f_2, f_3)$ を直接GRG２で解いた結果（表５）と比較しても，ヒューリスティックな方法でしかも40回程度の選好評価しかDMに要求していないことを考慮すれば，充分妥当なものと思われる。

表５　原問題に対する真の選好解

目的関数		決定変数	
f_1	2961	x_1	3.870
f_2	51587	x_2	6.137
f_3	52784	x_3	6.882

VI　おわりに

一般に，多目的非線形計画問題にする意思定手法ではDMの選好に関してなんらかの情報を必要とするが，最大の問題点は，DMの判断のあいまい性にいかに対処するかということであろう。本論文では，このようなDMの判断のあいまい性に対処するための一つのアプローチとして，すべての目的関数と制約条件にDMの判断のあいまい性を反映させたいわゆるファジィ多目的非線形計画問題を定式化し，さらにコンプレックス法に基づくヒューリスティックな対

話型意思決定手法を提案した。ここで定式化された問題では，DMのあいまい性はL-Rファジィ数として表現されているが，このDMの判断のあいまい性はファジィパレート最適解の概念を導入することにより考慮されており，DMは$n+1$個のファジィパレート最適解に対する選好評価を行うだけで彼の選好解を得ることが可能となる。また，提案した手法の妥当性を検討するために，仮想的なDMを仮定した数値例への適用を試みたが，本来，その有効性及び妥当性は，現実の意思決定を行う人々と協力した応用例の実行により評価されるべきものである。最後に，提案された手法では，DMの判断のあいまい性がすべての目的関数と制約条件に反映されていることを前提としているが，DMのもつあいまい性が常にこのように表現できるとは限らない。従って，今後，さらに多目的非線形計画問題に対するDMの判断のあいまい性をより適切に表現するための工夫が望まれる。

参考文献

〔1〕 M. J. Box: A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with Other Methods, Computer J., Vol. 8, pp. 42-52 (1965).

〔2〕 D. Dubois & H. Prade: Operations on Fuzzy Numbers, Int. J. Syst. Sci., Vol. 9, pp. 613-626 (1978).

〔3〕 D. Dubois & H. Prade: Fuzzy Real Algebra: Some Results: Fuzzy Sets and Syst., Vol. 2, pp. 327-348 (1979).

〔4〕 D. Dubois & H. Prade: Systems of Linear Fuzzy Constraints, Fuzzy Sets and Syst., Vol. 3, pp. 37-48 (1980).

〔5〕 Y. Y. Haimes, W. A. Hall & H. T. Freedman: Multiobjective Optimization in Water Resources Systems: The Surrogate Worth Trade-off Method, Elsevier (1975).

〔6〕 L. S. Lasdon, A. D. Waren, A. Jain & Ratner: Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonliear Optimization, Technical Memorandum No. 353, Case Westerm Reserve Univ. (1975).

〔7〕 L. S. Lasdon, A. D. Waren & M. W. Ratner: GRG2 User's Guide, Technical Memorandum University of Texas (1980).

〔8〕 L. Zadeh: Fuzzy Sets: Inform. Contr., Vol. 8, pp. 338-353(1965).

〔9〕 L. Zadeh: Fuzzy Algorithms: Inform. Contr., Vol. 19, pp. 94-102 (1968).

〔10〕 L. Zadeh: Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, IEEE Trans. Syst., Man, Cyber., Vol. SMC-3, pp. 28-44 (1973).