

不規則入力を受ける系の Markov 近似に関する研究

石 川 浩*
鶴 井 明**

1. はじめに

我々の日常遭遇する種々の現象は、自然現象にしる社会現象にしる、偶然性に左右されたものが極めて多い。このような偶然事象の系列を数学的にモデル化したものが確率過程といわれるものである。例えば、人の生死は確定的に予知できるものではなく、偶然に作用された要素を多分に含んでいるわけであるから、ある社会における人口の変動は確率過程として捉えることができる。また、あるサービス工場への客の到着、企業の在庫変動、消費者の購買行動など、いずれも確率過程として把握することができよう。⁽¹⁾さらに、工学の分野では、運行中の航空機が受ける地上荷重や突風荷重、高層建築物に作用する風荷重や地震荷重などは確率過程の典型例と考えることができる。⁽²⁾

さて、確率過程として表すことのできる不規則な入力を受ける系(システム)について考えよう。不規則入力の作用によって、一般には系の応答もまた不規則となるものと考えられるが、このような系応答の確率特性を知ることによって様々な問題解決への糸口が与えられることが多い。しかしながら一般にはこれは非常に難解なものとなるであろう。ところが、不規則入力の相関時間に比

* 香川大学経済学部管理科学科
(〒760 高松市幸町2-1)

** 京都大学工学部数理工学科
(〒606 京都市左京区吉田本町)

べて十分長い時点間での系応答の変化のみに興味があるものとすれば、問題を Markov 化して取り扱うことができ、多くの場合解決は非常に容易となる。

以上の観点から、本論文では、不規則入力を受ける系の Markov 近似の手法について詳細に検討し、ある有限の時間でサンプル・パスが無限大に飛躍し、以後は永久にその状態が持続されるような特別の場合でも、「死点」という概念を導入することによって一般化した取り扱いが可能であることを示すとともに、工学的に有用な応用例について考究した。なお、一般化 Markov 近似の展開に当たっては、種々の問題への汎用性を考慮して、多成分系を対象とすることとした。

2. 確率過程の基礎概念

本論に立ち入るに先だって、本研究で取り扱う確率過程の基礎的な諸概念について、必ずしも数学的に厳密ではないが、簡単に触れておくことにしよう。^{(3),(4)}

さて、1つの試行の結果、時間 $[T_1, T_2]$ 上の m 成分を有する1つの関数

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)) \quad (2.1)$$

が得られるものとする。このような関数 $\mathbf{x}(t)$ を標本関数とよび、これらの標本関数は適当な $[T_1, T_2]$ 上の m 成分関数の族の中から選び出されたものとみなされる。ある無作為な試行を行えばその族の中から得られるであろうものを $\mathbf{X}(t)$ と書き、 $[T_1, T_2]$ 上の m 成分の確率過程 (random vector process) という。すなわち、

$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)) \quad (2.2)$$

ここに t は $[T_1, T_2]$ 上で変わるパラメータであり、ここでは時間を表すものと考えている。 t をある値に固定すれば、 $\mathbf{X}(t)$ は通常の m 成分をもつ確率変数に帰着される。換言すれば、 $[T_1, T_2]$ から任意の自然数 r に対して任意に t_1, t_2, \dots, t_r を選べば、 $\mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}(t_2), \dots, \mathbf{X}(t_r)$ は確率変数の族を構成する。

逆に、 $[T_1, T_2]$ 中のすべての有限集合 $\{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ (r も任意) に対して確率変数の集合

$$\{\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2), \dots, \mathbf{X}_r = \mathbf{X}(t_r)\}$$

が対応し, それらが r 次元結合分布関数

$$\begin{aligned}
 &F_r(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2; \dots; \mathbf{x}_r, t_r) \\
 &= P[\{X_1 \leq \mathbf{x}_1\} \cap \{X_2 \leq \mathbf{x}_2\} \cap \dots \cap \{X_r \leq \mathbf{x}_r\}] \quad (r = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

をもつならば, これら結合分布関数の族は1つの確率過程 $X(t) (t \in [T_1, T_2])$ を定義する。ただし, 式(2.3)において, 例えば事象 $\{X_k \leq \mathbf{x}_k\}$ とは, 各成分 $X_{kj}, X_{kj} (j = 1, 2, \dots, m)$ に関する積事象

$$\{X_{k1} \leq x_{k1}\} \cap \{X_{k2} \leq x_{k2}\} \cap \dots \cap \{X_{km} \leq x_{km}\}$$

を略記したものである。

ここで, 上述の結合分布 F_r は Kolmogorov の適合条件

(i) $s > r$ に対して

$$\begin{aligned}
 &F_s(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2; \dots; \mathbf{x}_r, t_r; \infty, t_{r+1}; \dots; \infty, t_s) \\
 &= F_r(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2; \dots; \mathbf{x}_r, t_r)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

が成立すること。

および対称条件

(ii) 式(2.3)は1, 2, ..., r の任意の置換に対して不変であること。

を満足する必要があることを断っておこう。また, もしも

$$\begin{aligned}
 &f_r(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2; \dots; \mathbf{x}_r, t_r) \\
 &= \frac{\partial^{rm} F_r(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2; \dots; \mathbf{x}_r, t_r)}{\partial x_{11} \partial x_{12} \dots \partial x_{1m} \partial x_{21} \dots \partial x_{2m} \dots \partial x_{r1} \dots \partial x_{rm}}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

が存在するならば, それを $X(t)$ の r 次元確率密度関数という。

次に条件付き確率密度関数 $f(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1)$ を

$$f(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) = \frac{f(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1)}{f(\mathbf{x}_1, t_1)} \tag{2.6}$$

で定義する。式(2.6)の $f(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1)$ は $t_2 > t_1$ のときには遷移確率密度ともよばれることがある。

さて, ここで本論で取り扱う定常性および局所定常性の概念について簡単に触れておこう。 $(-\infty, \infty)$ 上の確率過程 $X(t) (t \in (-\infty, \infty))$ を考え, すべての

r および任意の τ に対して

$$F_r(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_r, t_r) = F_r(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_r, t_r + \tau) \tag{2.7}$$

が成立するとき、確率過程 $X(t)$ は強定常であるといわれる。しかしながら、現実問題として式(2.7)がすべての r に対して成立しているかどうかを確かめることは極めて困難であることが多い。そこで実用的な目的からは、

$$\left. \begin{aligned} &\forall k \in N, |E[X_k(t)]| < \infty \\ &E[X^T(t_1)X(t_2)] = R_{XX}(t_2 - t_1) \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

が成立する過程を扱うことが多い。ただし、上式において、 N は1から m までの自然数の集合

$$N = \{1, 2, \dots, m\} \tag{2.9}$$

を表しており、また E は期待値の演算子であって

$$E[g(X(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_1(x, t) dx \tag{2.10}$$

で定義されるものである。ここに、 $f_1(x, t)$ は $X(t)$ の1次元確率密度関数である。式(2.8)を満足する確率過程 $X(t)$ は弱定常であるといわれる。一般に強定常ならば弱定常であるが、弱定常は必ずしも強定常を意味しない。ただしガウス過程はその例外であることを注意しておこう。式(2.8)の第2番目の式で定義された $R_{XX}(t_2 - t_1)$ は相関関数行列と呼ばれ、弱定常過程ではこれが時間差 $|t_2 - t_1|$ だけの関数となるのである。

ここで、今後の便宜のため、相関時間の概念について述べておこう。定常な random vector process (m 成分の確率過程) $X(t)$ の第 k 成分 $X_k(t)$ と $X(t + \tau)$ の第 l 成分 $X_l(t + \tau)$ の共分散関数

$$\begin{aligned} C_{X_k X_l}(\tau) &= E[\{X_k(t) - E[X_k(t)]\}\{X_l(t + \tau) - E[X_l(t + \tau)]\}] \\ &= E[X_k(t)X_l(t + \tau)] - E[X_k(t)]E[X_l(t + \tau)] \end{aligned} \tag{2.11}$$

は、もし $X_k(t)$ と $X_l(t + \tau)$ とが互いに独立ならば0となるような関数である。 τ が大きくなって、 $X_k(t)$ と $X_l(t + \tau)$ は互いに独立とみなせるようになれば、 $C_{X_k X_l}(\tau)$ はほぼ0になると考えられる。このように、共分散関数が実質的に0

になるまでの時間の目安を $\bar{\tau}_{kl}$ と表し、成分 $X_k(t)$ と $X_l(t)$ の相関時間とよぶ。通常しばしば

$$\bar{\tau}_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{X_k X_l}(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} C_{X_k X_l}(\tau) dt$$

が用いられる。さらに確率過程 $X(t)$ の相関時間 τ_{cor} が

$$\tau_{cor} = \text{Max}_{1 \leq k, l \leq m} [\bar{\tau}_{kl}] \tag{2.12}$$

で定義されるものとしよう。

現実問題では、局所的には定常とみなせても、大局的には定常とみなし難い（すなわち非定常である）確率過程を取り扱う必要がある場合がしばしば起こる。このような過程を局所定常であるといい、この場合には相関関数行列 $E[X^T(t_1)X(t_2)]$ は時間差 $t_2 - t_1$ のみの関数にはならず、局所的に統計的性質を与える時点にもわずかに依存することを許容すると考えればよい。

3. Markov 過程

確率過程のすべての統計的情報が完全にその 2 次の確率分布関数に含まれるような過程を Markov 過程という。次節以降では、状態空間が実数全体からさらに拡張され、どのような場合に、厳密には Markov 過程にはならないような過程を Markov 過程として取り扱い得るかについて議論するが、ここでは次節の参考に資するため、状態空間が実数全体であるような連続な 1 成分の Markov 過程の性質について簡単に触れておくこととしたい。^{(4),(5)}

さて、確率過程

$$X(t), t \in [0, \infty)$$

は、任意の自然数 n をとったとき、 $[0, \infty)$ 中の任意の時点

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

に対して、その分布関数の間に

$$\begin{aligned} F(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1) \\ = F(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

が成立するとき、Markov 過程とよばれる。もしも確率密度をもつ過程ならば、式(3.1)はその密度関数に対する関係式

$$\begin{aligned}
 f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1) \\
 = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

と同値となる。

Markov 過程が1次および2次の分布関数で完全に特徴づけられるのを見るためには、まず

$$\begin{aligned}
 f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \\
 = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1) \\
 \times f_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1) \\
 f_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1) \\
 = f(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}; x_{n-3}, t_{n-3}; \dots; x_1, t_1) \\
 \times f_{n-2}(x_{n-2}, t_{n-2}; x_{n-3}, t_{n-3}; \dots; x_1, t_1) \\
 \dots\dots \\
 f_2(x_2, t_2; x_1, t_1) = f(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot f_1(x_1, t_1)
 \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
 f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \\
 = f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) \\
 \times f(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1) \\
 \times \dots \times f(x_2, t_2 | x_1, t_1) f_1(x_1, t_1)
 \end{aligned}$$

となることに注意し、上式に式(3.2)を適用して

$$\begin{aligned}
 f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \\
 = f_1(x_1, t_1) \prod_{k=1}^{n-1} f(x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k) \\
 = \prod_{k=1}^{n-1} f_2(x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1}) / \prod_{k=2}^{n-1} f_1(x_k, t_k)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

が成立することを見ればよい。この式から Smoluchowski—Chapman—Kolmogorov の方程式として知られている重要な方程式が得られる。まず、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) dx_2 = f_2(x_1, t_1; x_3, t_3)$$

を考え、 $t_1 < t_2 < t_3$ として上式の左辺を式(3.3)で書き換えると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_3, t_3 | x_2, t_2) f(x_2, t_2 | x_1, t_1) f_1(x_1, t_1) dx_2$$

となり、右辺は

$$f(x_3, t_3 | x_1, t_1) f_1(x_1, t_1)$$

となる。かくして

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_3, t_3 | x_2, t_2) f(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 = f(x_3, t_3 | x_1, t_1) \quad (3.4)$$

を得るが、これが Smoluchowski—Chapman—Kolmogorov の方程式である。この式は時刻 t_1 から t_3 への確率密度の流れあるいは遷移を記述している。従って、この式中の条件付き確率密度は遷移確率密度と解釈され、Markov 過程の議論では重要な役割を担うのである。

さて、ここで1次の確率密度関数の時間依存性を調べよう。式(3.3)の最初の等式を利用し、 $n = 2$ と置いて、 x_1 に関して積分すれば

$$f(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2, t_2 | x_1, t_1) f(x_1, t_1) dx_1 \quad (3.5)$$

が得られる。式(3.5)を微分方程式の形に変換するために、 t_2 を t_1 の近くを選び

$$t_1 = t, \quad t_2 = t + \tau, \quad x_2 = x', \quad x_1 = x$$

と置くと

$$f(x', t + \tau) = \int f(x', t + \tau | x, t) f(x, t) dx \quad (3.6)$$

が得られる。ここで時刻 t と $t + \tau$ の間の増分 $X' - X$ の特性関数

$$\begin{aligned} \varphi(u; x' - x) &= E[\exp\{iu(X' - X)\}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(x' - x)} f(x', t + \tau | x, t) dx' \end{aligned} \quad (3.7)$$

を導入するのが便利である。この逆変換

$$f(x', t + \tau | x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(x' - x)} \varphi(u; x' - x) du \quad (3.8)$$

を式(3.6)に代入すれば、

$$f(x', t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(x' - x)} \varphi(u; x' - x) du f(x, t) dx \quad (3.9)$$

を得る。特性関数 $\varphi(u; x' - x)$ を展開した

$$\varphi(u; x' - x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iu)^j}{j!} m_j(x' - x) \tag{3.10}$$

$$\text{ただし, } m_j(x' - x) = E[(X' - X)^j] \tag{3.11}$$

を式(3.9)に代入すれば,

$$f(x', t + \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(x-x')} (iu)^j du \\ \times m_j(x' - x) f(x, t) dx \tag{3.12}$$

となる。ここで

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-iu(x-x')} (iu)^j du = \left(-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu(x-x')} du \\ = \left(-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^j \delta(x' - x) \tag{3.13}$$

なる関係を用いれば (付録 I 参照), 式(3.12)は

$$f(x', t + \tau) = f(x', t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^j \{m_j(x' - x) f(x', t)\} \tag{3.14}$$

となる。そこで両辺を τ で割った後に, $\tau \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \{K_j(x) f(x, t)\} \tag{3.15}$$

を得る。ただし, $K_j(x)$ は

$$K_j(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m_j(x' - x)}{\tau} \tag{3.16}$$

を意味し, ここではこの極限が存在するものと仮定されている。この $K_j(x)$ は intensity coefficient とよばれている。連続な Markov 過程では 3 次以上の intensity coefficient は 0 となるので, 式(3.15)は

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x) f(x, t)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{K_2(x) f(x, t)\} \tag{3.17}$$

となる。なお, 局所定常過程に対しては, 式(3.17)中の $K_1(x)$, $K_2(x)$ は時刻 t に依存してもよいことを注意しておく。式(3.17)は Fokker-Planck の方程式または Kolmogorov の前進方程式とよばれ, 種々の分野で利用されている著名な方程式である。

もしも初期分布 $f(x, t_0)$ がデルタ関数形, すなわち

$$f(x, t_0) = \delta(x - x_0)$$

であれば, Fokker-Planck 方程式の解はそのまま遷移確率 $f(x, t | x_0, t_0)$ を与える。この遷移確率を x_0, t_0 の関数と考えたものは他の微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial t_0} = & - \frac{\partial f(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0} K_1(x_0) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0^2} K_2(x_0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

を満足することが示せる。式(3.18)は式(3.17)の adjoint equation であって, 通常 Kolmogorov の第 1 方程式あるいは後退方程式とよばれている。

4. Markov 近似

現実になれわれが出会う過程は厳密な意味では Markov 性をもたないことがしばしばである。にもかかわらず, 実際上それをあたかも記憶をもたない過程であるかの如くみなした取り扱いを行うことによって解決し得る問題も多い。例えば, 厳密には Markov 性をもたない過程でも, ごく近接した 2 時点での系の応答には関心をもたず, 適当に離れた時点間の系の変化のみに着目するのであれば, 近似的にその確率過程を Markov 過程として扱うことができ, 取り扱いがきわめて容易になる。そこで本節ではどのような手法によって, またどのような条件下で, どのような取り扱いが許されるかについて考察を加えることにする。

さて, 一般的な議論を行うため, ここでは状態が m 成分を有する系を考え, その状態を

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ のように表すことにする。ところで, 実際問題においては m 個の状態変数のうちのいくつかの成長が極めて速く, 有限時間でその値が無限大に遷移してしまう可能性を無視し得ないことも起こり得るので, このような場合をも含めて考える必要がある。それゆえ, 状態変数の第 k 成分 x_k ($k = 1, 2, \dots, m$) の取り得る状態空間 R' として, 実数全体 (1 次元 Euclid 空

間) R に死点 (death point) D とよばれる孤立した点をつけ加えた

$$R' = R \cup D$$

を考えよう。そして第 k 成分は一度この死点に到達すると、以後は永久にその点に留まるものと考えことにする。次に、今後の便宜のため、各成分ごとに定義された状態空間から以下のような状態の集合を定義しよう。まず、どの成分も死点にないような状態の集まり R 、すなわち

$$R = \{x \mid \forall k \in N, x_k \in R\}$$

を考える。ここに、 N は 1 から m までの整数の集合である。当然のこととしてこれは m 次元 Euclid 空間に他ならない。次に少なくとも 1 つの成分が死点にあるような状態の集まり D 、すなわち

$$D = \{x \mid \exists k \in N, x_k \in D\}$$

最後に、すべての成分がそれぞれの死点にあるような状態 D_p として

$$D_p = \{x \mid \forall k \in N, x_k \in D\}$$

を考える。 R と D の和集合が全状態空間となることは言うまでもない。

さて、 m 成分の確率過程 $X(t)$

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))$$

が時刻 $t = 0$ において状態 $x_0 \in R$ にあったという条件の下で、時刻 $t = t$ で D にある確率を

$$P[X(t) \in D \mid X(0) = x_0] = P(D, t \mid x_0) \quad (4.1)$$

と表すことにしよう。同様に、その過程 $X(t)$ が時刻 $t = 0$ で状態 $x_0 \in R$ にあったという条件の下で、時刻 $t = t$ において、 $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R$ に対し

$$\{X_1(t) \leq x_1\} \cap \{X_2(t) \leq x_2\} \cap \dots \cap \{X_m(t) \leq x_m\}$$

となる事象 (簡単のため今後はこれを $\{X(t) \leq x\}$ と略記する) の確率を

$$P[X(t) \leq x \mid X(0) = x_0] = W(x, t \mid x_0) \quad (4.2)$$

と表せば、明らかに

$$\lim_{\substack{\forall k \in N \\ x_k \rightarrow \infty}} W(x, t \mid x_0) + P(D, t \mid x_0) = 1 \quad (4.3)$$

が成立する。

いま、式(4.2)で定義された関数 $W(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0)$ が \mathbf{x} の各成分について微分可能、換言すれば \mathbf{x} に関する密度をもつものと仮定し、それを対応する小文字で $w(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0)$ のように表すものとしよう。

ここで、Stratonovich の用いた Markov 化の方法を拡張し、式(4.2)で定義された $W(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0)$ の密度 $w(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0)$ の時間変化を記述する広義の Fokker-Planck 方程式の誘導を試みよう。注意すべき点は、われわれの扱っている問題では、必ずしも

$$\lim_{\substack{\forall k \in N \\ x_k \rightarrow \infty}} W(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0) = 1$$

なる関係が成立する訳ではないという点である。このために以下の誘導にはかなりの工夫を要するのである。

さて、任意時点 t における系の状態 $\mathbf{X}(t)$ は他のランダムな外部入力 $\mathbf{S}(t)$ の作用を受けて、一階連立の系方程式 (System equation)

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \epsilon \mathbf{F}(\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t)) \tag{4.4}$$

に従って変化するものとしよう。時としてこれは揺動方程式 (fluctuation equation) ともよばれることがある。上式において \mathbf{F} は random vector process $\mathbf{S}(t)$ と系の状態 $\mathbf{X}(t)$ を引数にもつ与えられた m 成分関数であり、 ϵ は微小正定数である。なお、式(4.4)の意味は、 $\mathbf{X}(t)$ と $\mathbf{F}(\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t))$ の各成分 $X_k(t)$, $F_k(\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t))$ ($k \in N$) に関して、一階連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_1(t)}{dt} = \epsilon F_1(\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t)) \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = \epsilon F_2(\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t)) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dX_m(t)}{dt} = \epsilon F_m(\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t)) \end{array} \right. \tag{4.5}$$

が成り立つことを表している。

摂動論の考え方に沿って t 時間の状態量の増分

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_0, t) \tag{4.6}$$

が微小パラメータ ε で次式(4.7)のように展開されるものと仮定する。なお、簡単のため、以下ではしばしば $\mathbf{F}(\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t))$, $w(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0)$ をそれぞれ $\mathbf{F}_t(\mathbf{X})$ あるいは単に $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, $w(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)$ のように略記し、また $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0, t)$ を $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0)$ あるいは単に \mathbf{Y} と表したりすることにする。

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0) = \varepsilon \mathbf{Y}_1(\mathbf{x}_0) + \varepsilon^2 \mathbf{Y}_2(\mathbf{x}_0) + \dots \tag{4.7}$$

上の展開式を揺動方程式(4.4)に代入し、 ε の同じ冪の項の係数を等置すると、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \\ \dot{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y}_1(\mathbf{x}_0) \\ \dot{\mathbf{Y}}_3(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y}_2(\mathbf{x}_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^2} \cdot \mathbf{Y}_1(\mathbf{x}_0) \mathbf{Y}_1(\mathbf{x}_0) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{4.8}$$

が得られる。ただし、 $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}}$ は行列 $\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right)$ を意味し、また $\frac{\partial^2 \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}^2}$ はテンソル (tensor) $\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ を意味するものとする。従って例えば $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{Y}_2(\mathbf{x}_0)$ の第 k 成分は $\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \cdot Y_{2j}(\mathbf{x}_0)$ となることを注意しておこう。また変数の上に打った・(ドット) は時間 t に関する微分を表す。式(4.8)から直ちに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y}_1(\mathbf{x}_0) &= \int_0^t \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) dt' \\ \mathbf{Y}_2(\mathbf{x}_0) &= \int_0^t \frac{\partial \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \int_0^{t'} \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) dt'' dt' \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{4.9}$$

等が成立することが導かれる。

さて、摂動の精神に沿って、以下では ε^2 までの精度の範囲内で $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0)$ の統計

的性質を調べよう。それには $Y(x_0)$ の特性汎関数 $E[\exp\{i \int u(t)Y(x_0, t)dt\}]$ を計算する必要があるが、 $Y(x_0, t)$ の分布にのみ興味がある場合には単に特性関数 $E[\exp\{iuY(x_0)\}]$ を求めればよい。しかしながら、われわれは状態空間 R における $Y(x_0, t)$ の分布およびその密度を求めようとしていること、および後に使用する Y のモーメントの存在を保障するために収束因子を導入することにしよう。いま、その成分がすべて微小正定数であるような任意の定ベクトル α を導入し、ここでは一応その成分のうちの最大のものでも $O(\epsilon^3)$ となっているものと仮定しておこう。このような α を用いて $E[\exp\{i(u + i\alpha)Y(x_0)\}]$ を作れば、これは α が零ベクトル 0 のときは丁度 $w(x|x_0)$ の特性関数に一致するような u の関数である。後に示すように、 α のすべての成分を十分微小にとれば、いくらでも特性関数に近づくことに注意されたい。それを u で展開して

$$\begin{aligned}
 & E[\exp\{i(u + i\alpha)Y(x_0)\}] \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \overbrace{\frac{(iu) \cdots (iu)}{j!}}^{j \text{ 個}} E[\overbrace{Y(x_0) \cdots Y(x_0)}^{j \text{ 個}} \exp\{-\alpha Y(x_0)\}] \\
 &+ O(\epsilon^3) \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

を考えよう。ここで例えば、

$$(iu)(iu)E[Y(x_0)Y(x_0)\exp\{-\alpha Y(x_0)\}]$$

は

$$\sum_{k,l=1}^m (iu_k)(iu_l)E[Y_k(x_0)Y_l(x_0)\exp\{-\alpha Y(x_0)\}]$$

を意味することを断っておく。以後においては簡単のため

$$E[\overbrace{Y(x_0) \cdots Y(x_0)}^{j \text{ 個}} \exp\{-\alpha Y(x_0)\}]$$

を単に

$$E_{\alpha}[\overbrace{Y(x_0) \cdots Y(x_0)}^{j \text{ 個}}]$$

のように略記することにする。しかしながら、ここで注意する必要があるのは、

α の成分をいかに小さく選んでも、一般には必ずしも $E_{\alpha}[1] = 1$ が成立しない
 ということである。

ここで、 $w_{\alpha}(x | x_0)$ を形式的に

$$\begin{aligned}
 w_{\alpha}(x | x_0) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int \exp\{-iu(x-x_0)\} \\
 &\times \left[\sum_{j=0}^2 \overbrace{\frac{(iu)\cdots(iu)}{j!}}^{j \text{ 個}} E \left[\overbrace{Y(x_0)\cdots Y(x_0)}^{j \text{ 個}} \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \exp\{-\alpha Y(x_0)\} \right] + O(\varepsilon^3) \right] du \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int \exp\{-iu(x-x_0)\} \left[\sum_{j=0}^2 \overbrace{\frac{(iu)\cdots(iu)}{j!}}^{j \text{ 個}} \right. \\
 &\times \left. E_{\alpha} \left[\overbrace{Y(x_0)\cdots Y(x_0)}^{j \text{ 個}} \right] + O(\varepsilon^3) \right] du \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

で定義しよう。これは容易に次式のように書き換えられる。なお詳しくは付録
 I (デルタ関数) を参照されたい。

$$\begin{aligned}
 w_{\alpha}(x | x_0) &= \left[\sum_{j=0}^2 \overbrace{\frac{1}{j!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)}^{j \text{ 個}} \right. \\
 &\times \left. E_{\alpha} \left[\overbrace{Y(x_0)\cdots Y(x_0)}^{j \text{ 個}} \right] + O(\varepsilon^3) \right] \\
 &\times \frac{1}{(2\pi)^m} \int \exp\{-iu(x-x_0)\} du \\
 &= \left[\sum_{j=0}^2 \overbrace{\frac{1}{j!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdots\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)}^{j \text{ 個}} \right. \\
 &\times \left. E_{\alpha} \left[\overbrace{Y(x_0)\cdots Y(x_0)}^{j \text{ 個}} \right] + O(\varepsilon^3) \right] \delta(x-x_0) \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

ただし、 $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ は m 次元の Dirac のデルタ関数である。この式は超関数の意味で成立するものと解釈しなければならない。詳細については付録 I を参照して欲しいが、適当なクラスの関数 $\varphi(\mathbf{x}_0)$ に対して

$$\int w_\alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) \varphi(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0$$

$$= \left[\sum_{j=0}^2 \frac{1}{j!} \overbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \cdots \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)}^{j \text{ 個}} E_\alpha \left[\overbrace{Y(\mathbf{x}) \cdots Y(\mathbf{x})}^{j \text{ 個}} \right] + O(\epsilon^3) \right] \varphi(\mathbf{x}) \quad (4.13)$$

が成立するということである。すなわち、まず $\varphi(\mathbf{x})$ と $E_\alpha \left[\overbrace{Y(\mathbf{x}) \cdots Y(\mathbf{x})}^{j \text{ 個}} \right]$ の積をとり、その後微分が実行されるということに注意する必要がある。

さてここで演算子

$$L = \sum_{j=0}^2 \frac{1}{j!} \overbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \cdots \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)}^{j \text{ 個}} E_\alpha \left[\overbrace{Y(\mathbf{x}) \cdots Y(\mathbf{x})}^{j \text{ 個}} \right] + O(\epsilon^3) \quad (4.14)$$

を導入する。このとき、式(4.12)は

$$w_\alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = L \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \quad (4.15)$$

のように表される。ただし、積をとる操作が微分操作に先立つものと約束しておくものとする。式(4.15)を時間 t で微分すると

$$\dot{w}_\alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = \dot{L} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \quad (4.16)$$

が得られるので、式(4.15)、(4.16)から直ちに

$$\dot{w}_\alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) = \dot{L} L^{-1} w_\alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) \quad (4.17)$$

を得る。 $\dot{L} L^{-1}$ を ϵ^2 のオーダーまで正しく求めよう。 L^{-1} の展開は t の増加と共に収束が悪くなるけれども $\dot{L} L^{-1}$ の収束は悪くならないことを注意しておく。 L は ϵ のオーダーから始まるので、 \dot{L} は ϵ^2 まで、 L^{-1} は ϵ のオーダーまで正しく求めればよいから、式(4.7)、(4.14)から

$$\dot{L} = \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_\alpha[\dot{Y}] + \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_\alpha[\dot{Y}Y] + O(\epsilon^3)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_{\alpha}[\varepsilon \dot{Y}_1 + \varepsilon^2 \dot{Y}_2] \\
&\quad + \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_{\alpha}[\varepsilon^2 \dot{Y}_1 Y_1] + O(\varepsilon^3) \\
L^{-1} &= \left[E_{\alpha}[1] + \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_{\alpha}[Y] + O(\varepsilon^2) \right]^{-1} \\
&= (E_{\alpha}[1])^{-1} \left[1 + (E_{\alpha}[1])^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_{\alpha}[\varepsilon Y_1] + O(\varepsilon^2) \right]^{-1} \\
&= (E_{\alpha}[1])^{-1} \left[1 - \varepsilon (E_{\alpha}[1])^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_{\alpha}[Y_1] + O(\varepsilon^2) \right] \\
&= (E_{\alpha}[1])^{-1} - \varepsilon (E_{\alpha}[1])^{-2} \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) E_{\alpha}[Y_1] + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

が得られるので, LL^{-1} を作ると

$$\begin{aligned}
LL^{-1} &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{E_{\alpha}[\dot{Y}_1 + \varepsilon \dot{Y}_2]}{E_{\alpha}[1]} \right\} \\
&\quad + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{E_{\alpha}[\dot{Y}_1 Y_1]}{E_{\alpha}[1]} \right\} \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{E_{\alpha}[\dot{Y}_1]}{(E_{\alpha}[1])^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} E_{\alpha}[Y_1] \right\} + O(\varepsilon^3) \tag{4.18}
\end{aligned}$$

が得られる。さらに ε^2 までの精度の範囲内で成立する関係式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{E_{\alpha}[\dot{Y}_1]}{(E_{\alpha}[1])^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} E_{\alpha}[Y_1] \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{E_{\alpha}[\dot{Y}_1] E_{\alpha}[Y_1]}{(E_{\alpha}[1])^2} \right\} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ E_{\alpha} \left[\frac{\partial \dot{Y}_1}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{E_{\alpha}[Y_1]}{(E_{\alpha}[1])^2} \right\} + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

および式(4.8)を用いると, 式(4.17)を次のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned}
\dot{w}_{\alpha}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ E^*[\mathbf{F}(\mathbf{x})] w_{\alpha}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) \} \\
&\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\left\{ E^* \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} Y_1(\mathbf{x}) \right] - E^* \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times E^*[Y_1(x)] \Big\} w_a(x | x_0) \Big] \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Big[\{ E^*[F(x)Y_1(x)] - E^*[F(x)] \\ & \times E^*[Y_1(x)] \} w_a(x | x_0) \Big] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{4.19}$$

ただし、上式で記号 $E^*[f(Y)]$ は

$$\begin{aligned} E^*[f(Y)] &= E_a[f(Y)]/E_a[1] \\ &= E[f(Y)\exp(-\alpha Y)]/E[\exp(-\alpha Y)] \end{aligned} \tag{4.20}$$

を意味するものとする。式(4.19)の係数にはすべて $E^*[f(Y)]$ の形のものが現れることに注目しよう。このことは α のすべての成分を十分小さくとれば $w_a(x | x_0)$ の変化を支配する式の係数は状態が R にあるという条件の下で計算してよいことを意味している。

ここで、式(4.19)中の右辺の1つの項、例えば

$$E^* \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x} Y_1(x) \right]$$

を例にとりて、これを变形しよう。式(4.9)を用いれば、この項は

$$\begin{aligned} & E^* \left[\frac{\partial F_t(x)}{\partial x} \int_0^t F_{t'}(x) dt' \right] \\ &= \int_0^t E^* \left[\frac{\partial F_{t'}(x)}{\partial x} F_{t'}(x) \right] dt' \end{aligned}$$

となる。いま、

$$t' = t + \tau$$

なる変数変換を施せば、上式を

$$\begin{aligned} & E^* \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x} Y_1(x) \right] \\ &= \int_{-t}^0 E^* \left[\frac{\partial F_{t+\tau}(x)}{\partial x} F_{t+\tau}(x) \right] d\tau \end{aligned}$$

のように書くことができる。他の項も全く同様にすれば、式(4.19)に現れる係数は

$$\begin{aligned}
 & E^* \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} Y_1(\mathbf{x}) \right] - E^* \left[\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] E^* [Y_1(\mathbf{x})] \\
 &= \int_{-t}^0 \left\{ E^* \left[\frac{\partial F_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} F_{t+\tau}(\mathbf{x}) \right] \right. \\
 &\quad \left. - E^* \left[\frac{\partial F_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] E^* [F_{t+\tau}(\mathbf{x})] \right\} d\tau \quad (4.21-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & E^* [F(\mathbf{x}) Y_1(\mathbf{x})] - E^* [F(\mathbf{x})] E^* [Y_1(\mathbf{x})] \\
 &= \int_{-t}^0 \left\{ E^* [F_t(\mathbf{x}) F_{t+\tau}(\mathbf{x})] \right. \\
 &\quad \left. - E^* [F_t(\mathbf{x})] E^* [F_{t+\tau}(\mathbf{x})] \right\} d\tau \quad (4.21-b)
 \end{aligned}$$

のように書き換えられることがわかる。

式(4.21)の右辺の被積分関数はそれぞれ $\frac{\partial F_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ と $F_{t+\tau}(\mathbf{x})$, および $F_t(\mathbf{x})$ と $F_{t+\tau}(\mathbf{x})$ の相関を表しており, それらが互いに独立とみなせれば0に近づく。われわれの興味ある t が実質的にこの相関が消滅する程度の時間間隔(相関時間) τ_{cor} に比べて十分に大きいものとすれば, 式(4.21)の右辺の積分区間は $(-\infty, 0)$ で置き換えてもよい。

一方,

$$\begin{aligned}
 & E[\exp\{(iu - \alpha)Y'(x_0)\}] \\
 &= E[\exp\{(iu - \alpha)(X(t) - x_0)\}]
 \end{aligned}$$

の計算には死点の存在は何等の影響をも与えないから, 式(4.11)によって

$$\begin{aligned}
 w_\alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int \exp\{-iu(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} \\
 &\quad \times E[\exp\{(iu - \alpha)(X(t) - \mathbf{x}_0)\}] du \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int \exp\{-iu(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} \int \exp\{(iu \\
 &\quad - \alpha)(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)\} w(\mathbf{x}' | \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' du
 \end{aligned}$$

が成立し, 積分順序を交換すれば

$$\begin{aligned}
 w_\alpha(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0) &= \int \exp\{-\alpha(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)\} w(\mathbf{x}' | \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' \\
 &\quad \times \frac{1}{(2\pi)^m} \int \exp\{-iu(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \exp\{-\alpha(x' - x_0)\} w(x' | x_0) \delta(x' - x) dx' \\
 &= w(x | x_0) \exp\{-\alpha(x - x_0)\}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

が得られる。従って、式(4.11)で定義された $w_\alpha(x | x_0)$ は

$$|\alpha - (x - x_0)| \leq |\alpha| \cdot |x - x_0| < \varepsilon^3$$

すなわち

$$|x - x_0| < \varepsilon^3 / |\alpha|$$

の領域では少なくとも ε^2 のオーダーの精度で式(4.2)で定義された $W(x, t | x_0)$ の密度 $w(x, t | x_0)$ に一致することがわかる。 $|\alpha|$ は任意に小さく選び得るので、最終的に次式が成立することを知る。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w(x, t | x_0)}{\partial t} &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \{M(x, t) w(x, t | x_0)\} \\
 &+ \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \{D(x, t) w(x, t | x_0)\}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

ただし、 $M(x, t)$ 、 $D(x, t)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 M(x, t) &= E^*[F(S(t), x)] \\
 &+ \varepsilon \int_{-\infty}^0 \left\{ E^* \left[\frac{\partial F(S(t), x)}{\partial x} F(S(t+\tau), x) \right] \right. \\
 &\left. - E^* \left[\frac{\partial F(S(t), x)}{\partial x} \right] E^*[F(S(t+\tau), x)] \right\} d\tau
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
 D(x, t) &= 2\varepsilon \int_{-\infty}^0 \left\{ E^*[F(S(t), x) F(S(t+\tau), x)] \right. \\
 &\left. - E^*[F(S(t), x)] E^*[F(S(t+\tau), x)] \right\} d\tau
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

で定義されるものである。ランダムな外部入力(確率過程) $S(t)$ の局所定常性を仮定すれば、 $M(x, t)$ および $D(x, t)$ は t に対してはゆっくり変化する関数とみなせる。式(4.23)は前節の式(3.17)と類似的であり、いわゆる広義の Fokker-Planck 方程式に他ならず、わかり易く書き換えると

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w(x, t | x_0)}{\partial t} &= -\varepsilon \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \{M_k(x, t) w(x, t | x_0)\} \\
 &+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \{D_{lk}(x, t) w(x, t | x_0)\}
 \end{aligned} \tag{4.23}'$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 M_k(\mathbf{x}, t) &= E^*[F_k(S(t), \mathbf{x})] \\
 &+ \varepsilon \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^0 \left\{ E^* \left[\frac{\partial F_k(S(t), \mathbf{x})}{\partial x_i} F_i(S(t+\tau), \mathbf{x}) \right] \right. \\
 &\left. - E^* \left[\frac{\partial F_k(S(t), \mathbf{x})}{\partial x_i} \right] E^* [F_i(S(t+\tau), \mathbf{x})] \right\} d\tau \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{i,k}(\mathbf{x}, t) &= 2\varepsilon \int_{-\infty}^0 \{ E^* [F_i(S(t), \mathbf{x}) F_k(S(t), \mathbf{x})] \\
 &- E^* [F_i(S(t), \mathbf{x})] E^* [F_k(S(t+\tau), \mathbf{x})] \} d\tau \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

となる。

5. 応用例

前節の簡単な応用例として、不規則入力 $S(t)$ によってパラメトリックにエキサイトされる (係数励振形の) 単成分成長モデルを考えよう。簡単のため成長速度がその時の状態量 $X(t)$ のある冪に比例するものと仮定する。このとき、式(4.4)の揺動方程式は簡単となり、

$$\frac{dX(t)}{dt} = \varepsilon F(S(t), X(t)) \tag{5.1}$$

ただし,

$$F(S(t), X(t)) = S(t)\{X(t)\}^\nu \tag{5.2}$$

と表すことができる。式(5.1), (5.2)から

$$\frac{dX(t)}{dt} = \varepsilon S(t)\{X(t)\}^\nu \tag{5.3}$$

ここで、不規則入力 $S(t)$ はその平均値が常に正の局所定常確率過程であると仮定し、また ν は正の定数とする。

さて、前節の結果によれば、単成分の場合には、時刻 $t = 0$ において値 x_0 であったという条件の下で、時刻 $t = t$ において $\{X(t) \leq x\}$ であるという事象の確率を

$$P[X(t) \leq x | X(0) = x_0] = W(x, t | x_0) \tag{5.4-a}$$

と表したときの密度

$$w(x, t | x_0) = \frac{\partial W(x, t | x_0)}{\partial x} \tag{5.4-b}$$

を支配する広義の Fokker-Planck の方程式は次式に帰着される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t | x_0)}{\partial t} = & -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \{M(x, t)w(x, t | x_0)\} \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{D(x, t)w(x, t | x_0)\} \end{aligned} \tag{5.5}$$

ただし,

$$\begin{aligned} M(x, t) = & E^*[F(S(t), x)] \\ & + \varepsilon \int_{-\infty}^0 \left\{ E^* \left[\frac{\partial F(S(t), x)}{\partial x} F(S(t+\tau), x) \right] \right. \\ & \left. - E^* \left[\frac{\partial F(S(t), x)}{\partial x} \right] E^*[F(S(t+\tau), x)] \right\} d\tau \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} D(x, t) = & 2\varepsilon \int_{-\infty}^0 \{ E^*[F(S(t), x)F(S(t+\tau), x)] \\ & - E^*[F(S(t), x)]E^*[F(S(t+\tau), x)] \} d\tau \end{aligned} \tag{5.7}$$

である。そこで式(5.3)を用いて具体的に $M(x, t)$ を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} M(x, t) = & E^*[S(t)x^\nu] \\ & + \varepsilon \int_{-\infty}^0 \{ E^*[\nu S(t)x^{\nu-1} \cdot S(t+\tau)x^\nu] \\ & - E^*[\nu S(t)x^{\nu-1}]E^*[S(t+\tau)x^\nu] \} d\tau \\ = & E^*[S(t)]x^\nu + \varepsilon \nu \int_{-\infty}^0 C_{ss}(\tau, t) d\tau \cdot x^{2\nu-1} \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} D(x, t) = & 2\varepsilon \int_{-\infty}^0 \{ E^*[S(t)x^\nu \cdot S(t+\tau)x^\nu] \\ & - E^*[S(t)x^\nu]E^*[S(t+\tau)x^\nu] \} d\tau \\ = & 2\varepsilon \int_{-\infty}^0 C_{ss}(\tau, t) d\tau \cdot x^{2\nu} \end{aligned} \tag{5.9}$$

ただし、ここで $C_{ss}(\tau, t)$ は局所定常不規則外部入力 $S(t)$ の共分散関数であつて、

$$C_{ss}(\tau, t) = E^*[S(t)S(t+\tau)] - E^*[S(t)]E^*[S(t+\tau)] \tag{5.10}$$

で定義されるものである。第 2 節でも述べたように、

$$\int_{-\infty}^0 C_{ss}(\tau, t) d\tau$$

は局所定常確率過程の相関時間 $\tau_{cor}(t)$ と関係づけられる量であって、

$$\begin{aligned} \tau_{cor}(t) &= 2 \int_{-\infty}^0 C_{ss}(\tau, t) d\tau / C_{ss}(0, t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{ss}(\tau, t) d\tau / C_{ss}(0, t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

のように定義されるのが普通である。式(5.8), (5.9), (5.11)を用いて、広義の Fokker-Planck 方程式(5.5)を具体的に書き直せば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t | x_0)}{\partial t} &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ E^*[S(t)] x^\nu \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon \nu}{2} \tau_{cor}(t) C_{ss}(0, t) x^{2\nu-1} \right\} w(x, t | x_0) \right] \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\tau_{cor}(t) C_{ss}(0, t) x^{2\nu} w(x, t | x_0)] \end{aligned} \tag{5.12}$$

となる。ここで簡単のため

$$\left. \begin{aligned} \beta(t) &= \varepsilon E^*[S(t)] \\ \gamma(t) &= \varepsilon^2 \tau_{cor}(t) C_{ss}(0, t) \end{aligned} \right\} \tag{5.13}$$

とおけば、式(5.12)は最終的に

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t | x_0)}{\partial t} &= -\beta(t) \frac{\partial}{\partial x} \{ x^\nu w(x, t | x_0) \} \\ &\quad - \frac{\nu}{2} \gamma(t) \frac{\partial}{\partial x} \{ x^{2\nu-1} w(x, t | x_0) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \gamma(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{ x^{2\nu} w(x, t | x_0) \} \end{aligned} \tag{5.14}$$

に帰着される。

さて、ここで式(5.14)の解を求めることにしよう。 $\nu \neq 1$ のとき、Liouville の方程式

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = -\beta(t) \frac{\partial}{\partial x} \{ x^\nu \bar{w} \} \tag{5.15}$$

の解が

$$\bar{w}(x, t) = f\left[\left\{x^{-(\nu-1)} + (\nu-1)\int_0^t \beta(t')dt'\right\}/(\nu-1)\right]x^{-\nu} \quad (5.16)$$

ただし、 $f(x)$ は任意の関数

となることを参照(巻末付録IIを見よ)して、 $\nu \neq 1$ のとき、式(5.14)に次の変数変換を施す。

$$\left. \begin{aligned} w(x, t | x_0) &= v(y, t | y_0)x^{-\nu} \\ y &= \left\{x^{-(\nu-1)} + (\nu-1)\int_0^t \beta(t')dt'\right\}/(\nu-1) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

その結果、式(5.14)が

$$\frac{\partial v(y, t | y_0)}{\partial t} = \frac{1}{2} \gamma(t) \frac{\partial^2 v(y, t | y_0)}{\partial y^2} \quad (5.18)$$

に帰着されることは容易に確かめ得るので、 $t \rightarrow 0$ のときデルタ関数 $\delta(x-x_0)$ に帰着する領域 $(0, \infty)$ における式(5.16)の解が、 $\nu \neq 1$ のときには

$$\begin{aligned} w(x, t | x_0) &= \frac{1}{x^\nu \sqrt{2\pi \int_0^t \gamma(t')dt'}} \\ &\times \exp\left[-\frac{\left\{x_0^{-(\nu-1)} - x^{-(\nu-1)} - (\nu-1)\int_0^t \beta(t')dt'\right\}^2}{2(\nu-1)^2 \int_0^t \gamma(t')dt'}\right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

で与えられることを知る。 $\nu = 1$ に対応する解は、式(5.19)で $\nu \rightarrow 1$ の極限をとることによって得られ、その結果は

$$\begin{aligned} w(x, t | x_0) &= \frac{1}{x \sqrt{2\pi \int_0^t \gamma(t')dt'}} \\ &\times \exp\left[-\frac{\left\{\ln(x/x_0) - \int_0^t \beta(t')dt'\right\}^2}{2 \int_0^t \gamma(t')dt'}\right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

であり、これはよく知られた対数正規分布に他ならない。式(5.19)、(5.20)の結果はこの解を直接式(5.14)に代入することによっても容易に確かめ得ることを申し添えておく。

次に、式(5.19)、(5.20)から式(5.4-a)で定義された $W(x, t | x_0)$ を求めれ

ば、それぞれ

$\nu \neq 1$ の場合

$$W(x, t | x_0) = \Phi \left[\frac{x_0^{-(\nu-1)} - x^{-(\nu-1)} - (\nu-1) \int_0^t \beta(t') dt'}{(\nu-1) \sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] \quad (5.21)$$

$\nu = 1$ の場合

$$W(x, t | x_0) = \Phi \left[\frac{\ln(x/x_0) - \int_0^t \beta(t') dt'}{\sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] \quad (5.22)$$

となる。ここに、関数 $\Phi(u)$ は標準正規分布関数であって

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (5.23)$$

で定義されるものである。なお、式(5.21)は $\nu > 0$, $\nu \neq 1$ であれば $\nu-1$ の正負にかかわらず成立することを注意しておく。

ところで、前節の式(4.3)を用いると $t = 0$ に x_0 を出発した状態量が時刻 t において死点に落ちこんでいる確率 $P(D, t | x_0)$ を求めることができる。すなわち、 $\nu > 1$ のときには

$$\begin{aligned} P(D, t | x_0) &= 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} W(x, t | x_0) \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi \left[\frac{x_0^{-(\nu-1)} - x^{-(\nu-1)} - (\nu-1) \int_0^t \beta(t') dt'}{(\nu-1) \sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] \\ &= 1 - \Phi \left[\frac{x_0^{-(\nu-1)} - (\nu-1) \int_0^t \beta(t') dt'}{(\nu-1) \sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

$\nu = 1$ のときには、

$$P(D, t | x_0) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi \left[\frac{\ln(x/x_0) - \int_0^t \beta(t') dt'}{\sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] = 0 \quad (5.25)$$

また、 $0 < \nu < 1$ のときには

$$P(D, t | x_0) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi \left[\frac{x_0^{-(\nu-1)} - x^{-(\nu-1)} - (\nu-1) \int_0^t \beta(t') dt'}{(\nu-1) \sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] = 0 \tag{5.26}$$

となる。すなわち、 $0 < \nu \leq 1$ ならば有限時間で死点に到達する確率は 0 であるが、 $\nu > 1$ の場合には有限の時間内に死点まで到達してしまう確率は 0 ではないことがわかる。

さてここで、より具体的な応用例として工学的な問題の 1 つをとり上げよう。すなわち、不規則外力ならびに不規則き裂進展抵抗に基因する材料の疲労き裂進展問題への適用例である。

いま、工学的に最も広く受け入れられている Paris—Erdogan のき裂進展法⁽⁶⁾を不規則外力および不規則き裂進展抵抗の場合に一般化すると

$$\frac{dX}{dt} = \epsilon A(t) \{Z(t)\}^{2(\lambda+1)} X^{\lambda+1} \tag{5.27}$$

となることがわかる。ここに、 X は時刻 t における適当に規準化されたき裂長であり、 $A(t)$ 、 $Z(t)$ はそれぞれ適当に規準化された局所定常不規則き裂進展抵抗ならびに負荷応力振幅である。また ϵ 、 λ は材料定数であって、通常 $\lambda > 1$ であること、および ϵ は微小であることが知られている。過程 $A(t)\{Z(t)\}^{2(\lambda+1)}$ が局所定常の場合には、その相関時間に比べて充分大きな時間長に対するき裂長の変化のみに注目するならば、問題を Markov 化して取り扱い得るので、式(5.27)を式(5.3)と比較すれば、 $S(t)$ として

$$S(t) = A(t)\{Z(t)\}^{2(\lambda+1)} \tag{5.28-a}$$

ととり、 ν として

$$\nu = \lambda + 1 \tag{5.28-b}$$

を考えればよいことがわかる。 $\lambda \geq 0$ は $\nu \geq 1$ を意味するから、本問題の場合には必然的に死点のことを考慮に入れなければならない。すなわち、式(5.21)、(5.22)、(5.24)、(5.25)の諸結果が使えるのである。

次に、き裂が初めて予め定められた長さ x_c に達するまでの寿命分布につい

て議論しよう。

$$P[X(0) = x_0] = 1$$

なる確率過程(き裂長) $X(t)$ が初めて x_c に達する初到達時刻を T なる確率変数で表し, その分布を

$$H(t | x_0, x_c) = P[T \leq t] \tag{5.29}$$

のように表すものとしよう。このとき再生過程の考え方を用いれば, $H(t | x_0, x_c)$ は積分方程式

$$\bar{W}(x_c, t | x_0) = \int_0^t \bar{W}(x_c, t-t' | x_0) dH(t' | x_0, x_c) \tag{5.30}$$

を満たすことがわかる。ただし, $\bar{W}(x_c, t | x_0)$ は時刻 t においてき裂長が x_c より大か, もしくは死点にある確率であって, 式(5.21)によれば

$$\begin{aligned} \bar{W}(x_c, t | x_0) &= 1 - W(x_c, t | x_0) \\ &= \bar{\Phi} \left[\frac{x_0^{-(\nu-1)} - x_c^{-(\nu-1)} - (\nu-1) \int_0^t \beta(t') dt'}{(\nu-1) \sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] \end{aligned} \tag{5.31}$$

で与えられることがわかる。ここで, $\bar{\Phi}(u)$ は

$$\bar{\Phi}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \tag{5.32}$$

で与えられる標準正規分布関数の余関数である。このとき, 積分方程式(5.30)は

$$\begin{aligned} &\bar{\Phi} \left[\frac{x_0^{-(\nu-1)} - x_c^{-(\nu-1)} - (\nu-1) \int_0^t \beta(t') dt'}{(\nu-1) \sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] \\ &= \int_0^t \bar{\Phi} \left[-\frac{\int_0^{t-t'} \beta(t') dt'}{\sqrt{\int_0^{t-t''} \gamma(t') dt'}} \right] dH(t'' | x_0, x_c) \end{aligned} \tag{5.33}$$

となる。ところが, われわれの近似の下では

$$\bar{\Phi} \left[-\frac{\int_0^{t-t'} \beta(t') dt'}{\sqrt{\int_0^{t-t''} \gamma(t') dt'}} \right]$$

は、 t'' が t のごく近傍にある場合を除いて、近似的に 1 と置いてよい。このときには次式

$$H(t | x_0, x_c) \cong \bar{\Phi} \left[\frac{x_0^{-(\nu-1)} - x_c^{-(\nu-1)} - (\nu-1) \int_0^t \beta(t') dt'}{(\nu-1) \sqrt{\int_0^t \gamma(t') dt'}} \right] \quad (5.34)$$

が成立することを知る。

6. 結 言

本論文では、不規則入力の相関時間に比べて十分に長い時点間での系応答の変化に着目する場合には、Markov 近似手法を用いて、いかなる場合でも、系応答の確率特性を容易に把握しうることを示した。さらに、ここで述べた手法によってのみ初めて確率特性の把握が可能となるような例として疲労き裂進展問題を取り上げ、その解決策を与えることによって本手法の有用性を実証した。

参 考 文 献

- (1) 小山昭雄, 「マルコフ過程とその周辺」, (1971), p. 47, 東洋経済新報社.
- (2) 石川浩, 鶴井明, 「材料」, 第 58 巻, 第 321 号 (1982), p. 736.
- (3) Kannan, D., "An Introduction to Stochastic Processes", (1979), North Holland, New York, Oxford
- (4) Stratonovich, R. L., "Topics in the Theory of Random Noise Vol. 1", (1963), Gordon and Breach, New York, London.
- (5) Soong, R. A., "Stochastic Differential Equations in Engineering Applications", (1980), Pergamon Press
- (6) Paris, P. C., and Erdogan, F., Trans. ASME, Series D, Vol. 85, No. 4 (1963), p. 528.

付録 I. デルタ関数

m 次元 Euclid 空間 R で定義された複素数値関数 $\varphi(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ に対して, $\{x | \varphi(x) = 0\}$ の閉包を $\varphi(x)$ の台 (support) という。

コンパクトな台をもつ C^∞ 級複素数値関数の全体を D とかく。

連続関数空間 C から実数への写像, すなわち $\varphi \in C$ に対して $T[\varphi] \in R$ (R は 1 次元 Euclid 空間) を汎関数とよぶ。 α を定数とすると, $T[\varphi]$ が特

$$T[\varphi_1 + \varphi_2] = T[\varphi_1] + T[\varphi_2]$$

$$T[\alpha\varphi_1] = \alpha T[\varphi_1]$$

を満たすとき、 $T[\varphi]$ を線形汎関数という。そのうち、特に、 D 上で定義された線形汎関数が連続性、すなわち

$$\varphi_m \rightarrow 0 \text{ ならば、必ず } T[\varphi_m] \rightarrow 0$$

をもつとき、 T を超関数 (distribution) という。超関数の全体を D' で表す。

$S, T \in D'$ に対して

$$(S + T)[\varphi] = S[\varphi] + T[\varphi]$$

$$(\alpha T)[\varphi] = \alpha T[\varphi]$$

で $S + T, \alpha T$ を定めれば D' は線形空間となる。

さて、 m 個の非負の整数の順序づけられた組

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

に対して

$$|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_m$$

とかき、 $|p| \leq K$ のような p と C^K 級の φ とに対して

$$(\partial^p \varphi)(x) = \partial^{p_1} \varphi(x) / \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_m^{p_m}$$

とかく。また、

$$x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_m^{p_m}$$

と表すとき、 C^∞ 級関数 $\varphi(x)$ であって、任意の p, q に対して

$$\sup_x |x^p (\partial^q \varphi)(x)| < \infty$$

となるものを急減少 C^∞ 級関数といい、このような関数 φ の全体を G とかく。

超関数 $T \in D'$ が G 上の連続な線形汎関数に拡張される時、その拡張は一意に定まる。拡張可能であるための条件は、 T の任意の正則化

$$T * \varphi = f$$

が緩増加連続関数となることである。ここに、正則化とは、 $T \in D', \varphi \in D$ に対して T と φ とのたたみ込み $T * \varphi$ が C^∞ 級関数 f となることを意味し、この f を T の正則化という。また、緩増加連続関数 f とは、多項式 $P(x)$ が存在し、

$$|f(x)| \leq |P(x)|$$

となることを意味している。 T の任意の正則化が緩増加連続関数となる時、この T を緩増加超関数という。このような超関数の全体は G の双対空間 (dualspace) G' と一致する。

$\varphi \in G$ ならば、 $\varphi(x)$ の Fourier 変換

$$\mathcal{F}\varphi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp(-ixy) dy$$

が収束する。ここに

$$xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$$

である。

一方、 $T \in G'$ に対して、 T の Fourier 変換 $\mathcal{F}T$ を

$$\mathcal{T}T[\varphi] = T[\mathcal{T}\varphi], \varphi \in G$$

によって定義する。

さて、

$$S[\varphi] = -T\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right]$$

で定義される汎関数 S は明らかに D 上の線形汎関数であって、かつ連続であるから、1つの新しい超関数である。そこでこれを $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ と定義する。従って、

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}[\varphi] = -T\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right]$$

である。いかなる超関数も無限回微分可能であり、また微分する順序を交換できる。そして、

$$\mathcal{D}^p T[\varphi] = (-1)^{|p|} T[\mathcal{D}^p \varphi]$$

となる。

いま、

$$U[\varphi] = \int_0^\infty \varphi(x) dx$$

で定義される超関数 U (これは Heavyside の unit step function とよばれている) を考え、これを微分した超関数を Dirac のデルタ関数とよび、 $\delta(x)$ と表す。従って、

$$\begin{aligned} \delta[\varphi] &= \frac{\partial^m U}{\partial x_m \cdots \partial x_2 \partial x_1}[\varphi] = (-1)^m U\left[\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_m \cdots \partial x_1}\right] \\ &= (-1)^m \int_0^\infty \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_m \cdots \partial x_1} dx = \varphi(0) \end{aligned}$$

一般に $T[\varphi]$ をしばしば

$$T[\varphi] = \int_{-\infty}^\infty T(x)\varphi(x) dx$$

のように表す。このとき、上述した

$\delta(x)$ は

$$\delta[\varphi] = \int_{-\infty}^\infty \delta(x)\varphi(x) dx = \varphi(0)$$

のように書ける。ここで、 $\delta[\varphi]$ の Fourier 変換を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\delta[\varphi] &= \delta[\mathcal{F}\varphi] \\ &= \int_{-\infty}^\infty \delta(y) dy \cdot \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) e^{-iyx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \cdot 1[\varphi] \end{aligned}$$

ゆえに、 $1[\varphi]$ の Fourier 逆変換 \mathcal{F}^{-1} は $(2\pi)^m \delta(y)$ になるはずであるから、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}1[\varphi] &= 1[\mathcal{F}^{-1}\varphi] \\ &= \int_{-\infty}^\infty 1 dx \int_{-\infty}^\infty \varphi[y] e^{ixy} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^m \delta(y) \varphi(y) dy
 \end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx = (2\pi)^m \delta(y)$$

すなわち

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dx = \delta(y)$$

となることがわかる。

付録II. Liouville 方程式の解

初めに, Lagrange 形の偏微分方程式

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \tag{II-1}$$

の一般解を求めよう。周知のように, 連立常微分方程式

$$dx : dy : dz = P : Q : R \tag{II-2}$$

の解を

$$u(x, y, z) = a, v(x, y, z) = b \tag{II-3}$$

とすれば, 方程式(II-1)の一般解は

$$F(u, v) = 0 \tag{II-4}$$

で与えられる。ここに, F は任意関数である。

さて, Liouville 方程式

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \{x^{\lambda+1} \bar{w}\} \tag{II-5}$$

の一般解を求めよう。式(II-5)において変数変換

$$x^{\lambda+1} \bar{w} = z \tag{II-6}$$

とおくと,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x^{-(\lambda+1)} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{II-7}$$

となる。従って, 式(II-1)と比較して

$$P = 1, Q = x^{-(\lambda+1)}, R = 0$$

であるから, 連立常微分

$$dx : dy : dz = 1 : x^{-(\lambda+1)} : 0 \tag{II-8}$$

の解は

$$\lambda y + x^{-\lambda} = a, z = b$$

であり, 方程式(II-7)の一般解は

$$F(\lambda y + x^{-\lambda}, z) = 0 \quad (F \text{ は任意関数})$$

で与えられることを知る。上式を z について解くと

$$z = f(\lambda y + x^{-\lambda}) \quad (\text{II-9})$$

ただし, f は任意関数

従って,

$$\tilde{w} = x^{-(\lambda+1)} f(\lambda y + x^{-\lambda}) \quad (\text{II-10})$$

が Liouville 方程式(II-5)の一般解となる。