香 川 大 学 経 済 論 叢
第65巻 第3号 1992年12月 303-319

研究ノート

企業成長と資金調達

阿 部 文 雄

I はじめに

企業投資と資金調達の関係については，モジリアニ・ミラー(Modigliani & Miller, 1958)の研究以来多くの理論的研究がなされてきた。M-M 理論と呼ばれるかれらの研究によると，一定の条件の下では企業の最適な投資決定は資金調達の問題とは独立に考えることができるというものであった[(1)]。M-M 理論はいわば理想状態における企業の財務政策の基礎理論を提供したとみなされる。しかし現実の企業を考える場合にはこれらの条件は成立しないから，当然のこととして以降の研究の1つの焦点は，これらの条件が成立しないとき，企業の最適な投資水準がその財務政策にどのように影響を受けるか，換言すれば，企業が投資活動を行うに際してどのような財務政策，すなわち資金調達政策を実行すべきかという問題であった。

本稿では，こういった問題を考察するため資本市場の不完全性を導入した Ekman (1982), Feichtinger and Hartl (1986), Kort (1989), Loon (1983), Schijndel (1986) 等によって研究されたモデルを基礎にして，企業投資と資金調達の相互関連性を検討してみようとするものである。彼らによって検討されたモデルは若干の相違はあるもの

(1) この場合の条件とは，(1)税が存在しない，(2)資本市場の完全性，(3)負債に関して債務不履行の危険がない，というものである。吉川（1985）等参照。

の，いくつかの共通の理論的枠組みを持っている。すなわち，①時間の経過とともに企業の最適な財務政策がどのように変化するかを明示的に導出するための動学モデルである，②企業の投資資金として内部留保と負債が考えられているが，新株発行を考慮していない，③配当の割引現在価値最大化モデルとして定式化されている，等である。

II モデル

いま労働 (L) と資本 (L) を利用してある1種類の生産物を生産している企業を想定する。まずこの企業の貸借対照表が次のように与えられているとする。

資本の部		負債の部	
資産	K	負債	B
		自己資本	E

ここでは分析を簡単にするため，この企業の資産は資本ストック (K) だけと仮定される。また負債は社債だけとし銀行借り入れはないものとする。また簿価で表示される自己資本 (equity capital) は内部留保と資本金（株式）からなるとする。[2] さらに内部留保は全額投資にまわされるとする。従って次式が成立する。[3]

$$K = B + E \tag{1}$$

なおそれぞれの変数の初期値は与えられているとする。

$$K_0 = B_0 + E_0 \qquad K_0,\ B_0,\ E_0: \text{positive constants} \tag{1'}$$

次に，企業の販売収入 (X) すなわち売上額 (sales) は，賃金 (wL)，減価償却 (aK)，負債に対する利子支払 (rB)，税金 (T)，配当 (D) として支払われ，残額が内部留保 (R) となる。従って次式が得られる。

$$X = wL + aK + rB + T + D + R \tag{2}$$

さらに企業の売上額から賃金を差し引いた営業利益 (π) は，労働に関して最大化され資本ストックの関数として次のように表されるとする。

(2) ただし後述するように，新株発行はないものと仮定される。
(3) なお以下では連続型で定式化されるが，誤解の恐れのない限り時間を表す t を省略する。

$$\pi(K) = \max_{L}(X - wL) \tag{3}$$

ここで，$\pi'(K) > 0$，$\pi''(K) < 0$ と仮定される。さて(3)式を考慮すると(2)式は次のように示される。

$$\pi(K) = aK + rB + T + D + R \tag{4}$$

また法人税率を τ とし，減価償却および利子支払が課税所得から控除されると仮定すると，

$$T = \tau[\pi(K) - rB - aK] \tag{5}$$

となるから，これを(4)式に代入すると，

$$(1-\tau)[\pi(K) - rB - aK] = D + R \tag{6}$$

を得る。なおここで，$\pi(K) - rB - aK$ は純利益である。この(6)式は(1)式を考慮すると，

$$(1-\tau)[\pi(K) - (r+a)K + rE] = D + R \tag{6'}$$

と表すことができる。

さらにここでは新株発行はないものと仮定する。従って，自己資本は内部留保によってのみ増加するから，

$$\dot{E} = R \tag{7}$$

が成立する。(1)(6')(7)式から，次式を得る。

$$\dot{E} = (1-\tau)[\pi(K) - (r+a)K + rE] - D \tag{8}$$

次にこの企業に関する現金の流れを見ると次表で示される。

売上額	X	賃　金	wL
負債増加	$\dot{B}$	利子支払	rB
		粗投資	I
		法人税	T
		配　当	D

すなわち，次式が成立しなければならない。

$$X + \dot{B} = wL + rB + I + T + D \tag{9}$$

(9)式は(3)(5)式を考慮すると，

$$\dot{B} + (1-\tau)[\pi(K) - rB - aK] = I - aK + D \tag{10}$$

と表される。なお，(8)(10)式から，

$$\dot{B}+\dot{E} = I-aK = \dot{K} \tag{11}$$

が成立する。これは，純投資のための資金が社債の発行と自己資本（この場合内部留保）によって調達されることを示している。なおこのモデルでは，通常有限値の投資を引き出すためにモデルに導入される投資に伴う調整費用が考慮されていないが，(10)式から明らかなように，企業の純利益と負債の新規発行に上限があれば，資金面から投資は有限値をとらざるを得ない構造になっている。

そこで負債/自己資本比率には上限があると仮定する[(4)]。すなわち，

$$B \leqq hE \qquad (h>0 \text{ and constant}) \tag{12}$$

である。(12)式は，(1)式を考慮すると，

$$(1+h)E-K \geqq 0 \tag{13}$$

と表される。さらにここでは企業の外部金融資産等の保有を考えないので，

$$B \geqq 0 \tag{14}$$

と仮定される。(14)式も(1)式を考慮すると，

$$K-E \geqq 0 \tag{15}$$

と表すことができる。また，配当 (D) は非負でなければならないとする。

$$D \geqq 0 \tag{16}$$

さらに資本蓄積方程式として

$$\dot{K} = I-aK \tag{17}$$

が仮定される。

以上を要約すると企業の直面する問題は以下のように表される。

$$\underset{I,D}{\text{Max}} \int_0^\infty D(t)\exp(-it)dt \tag{18}$$

$s.\ t.$

$$\dot{K} = I-aK \tag{17}$$

$$\dot{E} = (1-\tau)[\pi(K)-(r+a)K+rE]-D \tag{8}$$

$$K = E+B \tag{1}$$

(4) Ekman (1982) では，負債に対する利子率が負債/資本比率の逓増関数として定式化されている。

$$(1+h)E-K \geqq 0 \tag{13}$$

$$K-E \geqq 0 \tag{15}$$

$$D \geqq 0 \tag{16}$$

すなわち，上で示された制約条件の下で，無限の将来にわたって株主が受け取る配当の割引現在価値を最大化するものである。企業が直接コントロールする変数は，投資 (I) と配当 (D) である。なお，ここでは資本市場の不完全性を想定して，負債の税引き後実効利子率 $((1-\tau)r)$ と株主が持つ時間割引率 (i) とは等しくないと仮定される。

$$i \neq (1-\tau)r \tag{19}$$

III　最適性の必要条件

II節で定式化された問題は不等号制約条件付き最適制御問題である。この問題に内点解が存在するとして，最適性の必要条件は次のように示される。

まず，ラグランジュ関数を，

$$W = D+\lambda_1(I-aK)+\lambda_2\{(1-\tau)[\pi(K)-r(K-E)-aK]-D\}$$
$$+\mu_1[(1+h)E-K]+\mu_2(K-E)+\mu_3 D \tag{20}$$

とおくとき，以下の条件を満たす関数 λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, μ_3 が存在しなければならない。(5)

$$\dot{\lambda}_1 = (i+a)\lambda_1-(1-\tau)[\pi'(K)-(r+a)]\lambda_2+\mu_1-\mu_2 \tag{21}$$

$$\dot{\lambda}_2 = [i-(1-\tau)r]\lambda_2-(1+h)\mu_1+\mu_2 \tag{22}$$

$$\lambda_1 = 0 \tag{23}$$

$$1-\lambda_2+\mu_3 = 0 \tag{24}$$

$$\mu_1 \geqq 0,\ \mu_1[(1+h)E-K] = 0 \tag{25}$$

$$\mu_2 \geqq 0,\ \mu_2[K-E] = 0 \tag{26}$$

$$\mu_3 \geqq 0,\ \mu_3 D = 0 \tag{27}$$

ここで λ_1, λ_2 は補助変数 (costate variable) であり，μ_1, μ_2, μ_3 はそれぞれ制約条件(13)(15)(16)式に対応するラグランジュ乗数である。

さらにこの問題は無限の計画期間をもつから，次のような横断条件が仮定される。

---

(5) (21)式は $\dot{\lambda}_1 = i\lambda_1-\partial W/\partial K$ により，(22)式は $\dot{\lambda}_2 = i\lambda_2-\partial W/\partial K$ によりそれぞれ導出される。また(23)式は $\partial W/\partial I = 0$，(24)式は $\partial W/\partial D = 0$ から導出される。

$$\lim \exp(-it)\lambda_1(t) \geqq 0, \qquad \lim \exp(-it)\lambda_1(t)K(t) = 0 \tag{28}$$

$$\lim \exp(-it)\lambda_2(t) \geqq 0, \qquad \lim \exp(-it)\lambda_2(t)E(t) = 0 \tag{29}$$

IV 最適投資・負債・配当政策（i）$i < (1-\tau)r$ のケース

この節では，株主の時間選好率ないし時間割引率が負債の実効利子率より低いケースについて企業の最適投資・負債・配当政策を検討する。

まず(23)式より全計画期間を通じて $\lambda_1 = 0$ であるから，$\dot{\lambda}_1 = 0$ であり，(21)式は次のように表される。

$$(1-\tau)[\pi'(K)-(r+a)]\lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 \tag{30}$$

さて(25)(26)(27)式よりラグランジュ乗数 μ_1，μ_2，μ_3 は非負であるから，それらの符号の組み合わせとして表1に示された8つのケース①～⑧が考えられる。

表1

	μ_1	μ_2	μ_3	
①	+	+	+	実行不可能
②	+	+	0	実行不可能
③	+	0	+	$\lambda_2 > 1$, $B/E = h$, $D = 0$
④	+	0	0	実行不可能
⑤	0	+	+	$\lambda_2 > 1$, $B = 0$, $D = 0$
⑥	0	+	0	$\lambda_2 = 1$, $B = 0$
⑦	0	0	+	$\lambda_2 > 1$, $D = 0$
⑧	0	0	0	実行不可能

これらのケースのうち，まずラグランジュ乗数 μ_1 と μ_2 の符号が同時に正となる①②のケースは実行不可能である。というのは，(25)式より $\mu_1 > 0$ の時 $B/E = h$ となり，これは可能な限り負債を大きくする政策を意味する。ところが同時に $\mu_2 > 0$ であると $B = 0$ でなければならず，これは負債ゼロの政策を意味するからである。

また④のケースも実行不可能である。補助変数 λ_2 は(24)式より全計画期間を通じて $\lambda_2 \geqq 1$ でなければならないが，この④のケースでは $\mu_3 = 0$ であるから $\lambda_2 = 1$ である。と

ころが，(22)式より，$\dot{\lambda}_2 = [i-(1-\tau)r]-(1+h)\mu_1 < 0$ であるから，$\lambda_2 < 1$ となってしまい，$\lambda_2 \geqq 1$ と矛盾する。

さらに⑧のケースも実行不可能である。この場合も④のケースと同様に，$\dot{\lambda}_2 = [i-(1-\tau)r] < 0$ となり，$\lambda_2 = 1 \rightarrow \lambda_2 < 1$ となってしまうからである。

ところで，(30)式より，

$$\pi'(K) = r+a+\frac{\mu_1-\mu_2}{(1-\tau)\lambda_2} = r+a+\frac{\mu_1-\mu_2}{(1-\tau)(1+\mu_3)} \tag{31}$$

が成立する。そこで，

$$\pi'(K_1) = r+a \tag{32}$$

とおくと，ケース③では，

$$\pi'(K) = r+a+\frac{\mu_1}{(1-\tau)(1+\mu_3)} > r+a \tag{33}$$

であるから，$K < K_1$ であることが分かる。すなわち，ケース③に対応する経路は K_1 水準より低いところに位置していなければならない。

次にケース⑦では，$\mu_1 = \mu_2 = 0$ であり，(31)式より，

$$\pi'(K) = r+a$$

が成立するから，ケース⑦に対応する経路上では資本ストックは $K = K_1$ の水準で維持される。

またケース⑤⑥では $K > K_1$ であることが分かる。まずケース⑥では，$\mu_3 = 0$ であることを考慮して，(30)式より，

$$\mu_2 = -(1-\tau)[\pi'(K)-(r+a)] \tag{34}$$

が成立する。同時に，(22)式から，

$$\mu_2 = -[i-(1-\tau)r] \tag{35}$$

が成立するので，これら(34)(35)式と条件 $i-(1-\tau)r < 0$ から，

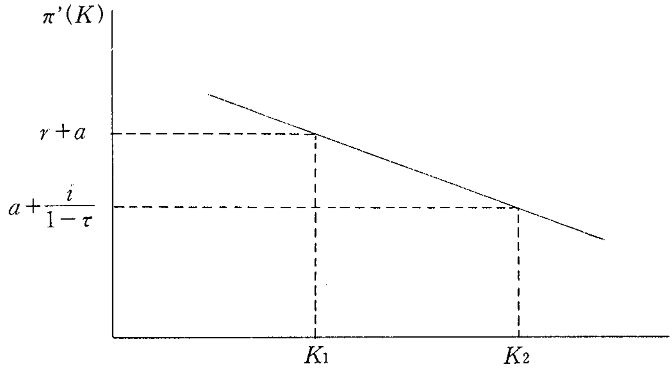
$$\pi'(K) = a+\frac{i}{1-\tau}(< a+r) \tag{36}$$

を得る。なおこのケースでは，(36)式右辺が一定であるから，資本ストック水準は不変である。そこでこの(36)式を満たす資本ストックの水準を K_2 とすると，明らかに，

$$K_1 < K_2 \tag{37}$$

である。(図1参照)

図1



またケース⑤では，(24)(30)式より，

$$\pi'(K)=r+a+\frac{-\mu_2}{(1-\tau)(1+\mu_3)}(<r+a) \tag{38}$$

である。

さてここで定常点を考えてみよう。まず定常点では，$\dot{\lambda}_1=\dot{\lambda}_2=0$ より，以下の関係が成立しなければならない。

$$(1-\tau)[\pi'(K^*)-(r+a)]\lambda_2{}^*=\mu_1{}^*-\mu_2{}^* \tag{39}$$

$$[i-(1-\tau)r]\lambda_2{}^*=(1+h)\mu_1{}^*-\mu_2{}^* \tag{40}$$

そこでケース③⑤⑥⑦が上の定常点の条件を満たすかどうかを検討してみる。まず，ケース③では，

$$\lambda_2{}^*=\frac{(1+h)\mu_1{}^*}{[i-(1-\tau)r]}<0 \tag{41}$$

となるから，定常点とはなりえない。また，ケース⑦でも，

$$\lambda_2{}^*=\frac{0}{[i-(1-\tau)r]}=0 \tag{42}$$

となるから定常点ではない。次にケース⑥を考えてみよう。この場合，

$$\pi'(K^*)=a+\frac{i}{1-\tau} \tag{43}$$

が成立し，ユニークな資本ストック水準が存在する。なおこのとき，$K^*=K_2$ である。

また,

$$\lambda_1^* = 0 \tag{44}$$

$$\lambda_2^* = 1 \tag{45}$$

$$\mu_1^* = 0 \tag{46}$$

$$\mu_2^* = -[i-(1-\tau)r] \tag{47}$$

$$\mu_3^* = 0 \tag{48}$$

となる。従ってこのケースが定常点であることが分かる。

ところで，残るケース⑤も，

$$\pi'(K^*) = a+\frac{i}{1-\tau} \tag{43}$$

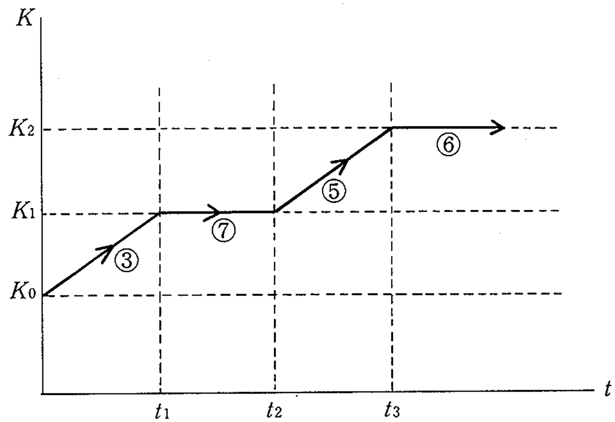
が成立するが，それは，ケース⑥の定常点 $K^*(=K_2)$ と一致する。すなわち，K^* がケース⑤で示される経路とケース⑥のそれとの junction point であり，ケース⑤はその一部に junction point K^* を含んでいると解釈される。

以上の推論より，初期時点に十分に小さい K_0 から出発した場合，最適経路は，

③→⑦→⑤→⑥

によって構成されると考えられる。(図 2 参照)

図 2



なお関数 λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, μ_3 の時間経路は図 3 (a)(b)(c)に示されている。

図 3 (a)

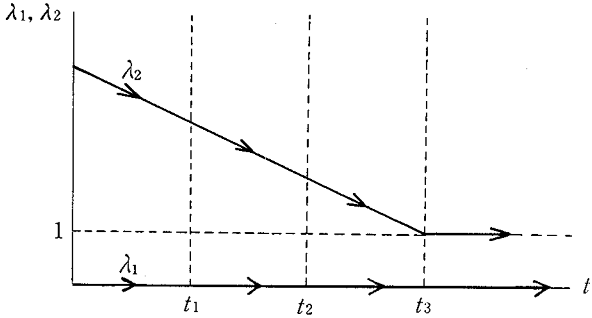


図 3 (b)

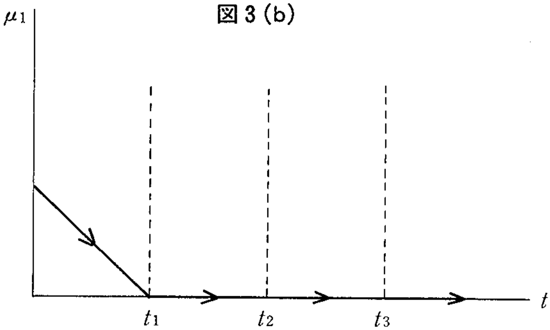
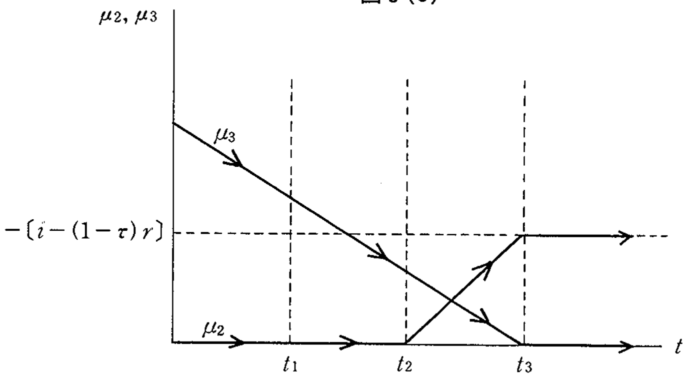


図 3 (c)

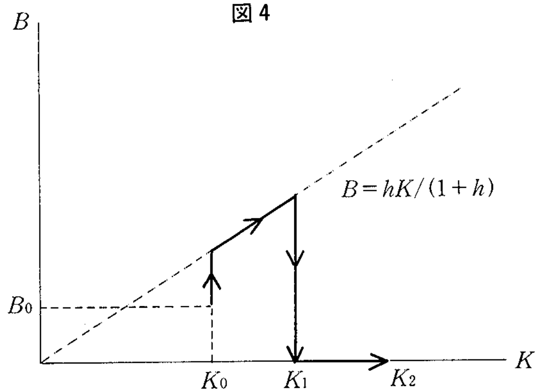


以上から明らかな企業の成長パターンを整理すると表2と図4のように示される。

表　2

	負債・配当・投資政策
③	最大負債・配当ゼロ・成長政策
↓ ⑦	負債減少・配当ゼロ・成長ゼロ
↓ ⑤	負債ゼロ・配当ゼロ・成長政策
↓ ⑥	負債ゼロ・正の配当・成長ゼロ

図 4



以上のように，企業の最適な成長政策は，初期時点において十分小さい資本ストックから出発する場合で考えると，４つの局面から構成される。まず第１の成長局面は③の経路に乗り許容される最大の負債（社債）で資金調達し，配当はゼロにして可能な限り高い成長率を実現することである。そして資本ストックが K_1 水準に達すると（第２局面），この K_1 水準を維持し(すなわち純投資ゼロ)，配当をゼロにしたまますべての社債を償還する政策をとる。さらに，社債の償還を終えると第３局面に入り，負債と配当をゼロにしたまま内部留保だけでの成長政策がとられることになる。そして資本ストックが定常点 K_2 水準に達すると（第４局面），そこから初めて正の配当を開始することになるが，この状態では成長のための資金調達は行われず，企業収益はすべて配当にまわされる。

ところで，負債，自己資本，資本ストックの初期条件は(1′)式で与えられているが，

上で述べた最適経路では，最初から最大限の負債（従って社債発行）によって資金調達を行うことが要求されている。ところが(1′)式で与えられる所与の初期条件が最適経路上にない場合（図4参照）にはどのように考えたらよいであろうか。

この場合，企業の最適な財務政策は最初から最大限の負債(従って社債発行)によって資金調達を行うことであるが，当初この限度に余裕がある場合($B_0/E_0 < h$)，企業はまず限度一杯まで社債を発行し，それによって資本ストックを購入することになる。また，限度以上に社債を発行している場合には，逆にこれを許容された水準まで整理しなければならないことになる。このような分析上の処理は負債水準を表す状態変数 B が時間に関して不連続であること（すなわち状態変数 B のジャンプ）が許されるとした場合の解釈である。もし負債 B が連続であることを要求するなら最適成長政策の実行は不可能であるか，あるいは，初期状態を $B_0/E_0 = h$ と設定しなければならないであろう(6)。

V　最適投資・負債・配当政策（ii） $i > (1-\tau)r$ のケース

この節では，時間割引率が負債の実効利子率よりも高い場合($i > (1-\tau)r$)を検討する。この場合もラグランジュ乗数の符号の組み合わせは表3のように8つのケース

表 3

	μ_1	μ_2	μ_3	
①	+	+	+	実行不可能
②	+	+	0	実行不可能
③	+	0	+	$\lambda_2 > 1,\ B/E = h,\ D = 0$
④	+	0	0	$\lambda_2 = 1,\ B/E = h$
⑤	0	+	+	
⑥	0	+	0	実行不可能
⑦	0	0	+	
⑧	0	0	0	実行不可能

(6)　この点については，Loon (1983) p. 57 を参照されたい。また状態変数に時間に関する不連続性（ジャンプ）が許される場合の最適制御については，例えば，Kamien and Schwartz (1981) 等を参照。

が可能である。

まず，ラグランジュ乗数の符号の組み合わせのうち，ケース①②はIV節の場合と同じ理由で実行不可能である。

またケース⑥⑧も実行不可能である。これらのケースでは $\mu_3=0$ であるから，$\lambda_2=1$ でなければならないが，(22)式より，$\dot{\lambda}_2>0$ となり，$\lambda_2=1$ と矛盾するからである。

次に定常点を考えてみよう。前節と同様，定常点は，

$$(1-\tau)[\pi'(K^*)-(r+a)]\lambda_2{}^*=\mu_1{}^*-\mu_2{}^* \tag{39}$$

$$[i-(1-\tau)r]\lambda_2{}^*=(1+h)\mu_1{}^*-\mu_2{}^* \tag{40}$$

が成立していなければならない。残されたケース③④⑤⑦でこれを満たすのは，ケース④だけである。ケース⑤では，$\dot{\lambda}_2=[i-(1-\tau)r]\lambda_2+\mu_2>0$ となり，定常点ではない。またケース⑦でも，$\dot{\lambda}_2=[i-(1-\tau)r]\lambda_2>0$ となり，定常点ではない。

次に，ケース④では，

$$\pi'(K^*)=r+a+\frac{i-(1-\tau)r}{(1-\tau)(1+h)}=a+\frac{i}{(1-\tau)(1+h)}-\frac{h}{1+h}r \tag{49}$$

が成立し，ユニークな資本ストック水準（K_3 とする）が存在する。またこのとき，

$$\lambda_1{}^*=0 \tag{50}$$

$$\lambda_2{}^*=1 \tag{51}$$

$$\mu_1{}^*=\frac{i-(1-\tau)r}{1+h} \tag{52}$$

$$\mu_2{}^*=0 \tag{53}$$

$$\mu_3{}^*=0 \tag{54}$$

である。すなわちこのケースが定常点である。

ケース③でもケース④と同じ定常点 $K=K_3$ をその一部として含んでいる。また，定常点④と接続するケースは，$\dot{\lambda}_2\leqq 0$ でなければならないから，これはケース③しかない。ケース⑤と⑦では，資本ストック水準はケース④で与えられる水準より大きいから，最適経路がこれらのケースを通ることはない。以上のことから，このケースの最適経路は，

③→④

によって構成されることが分かる（図5・6参照)。

図 5

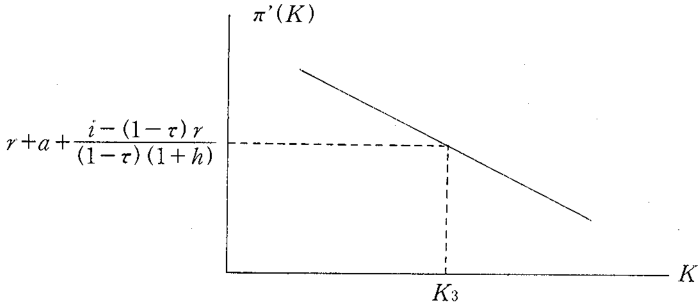
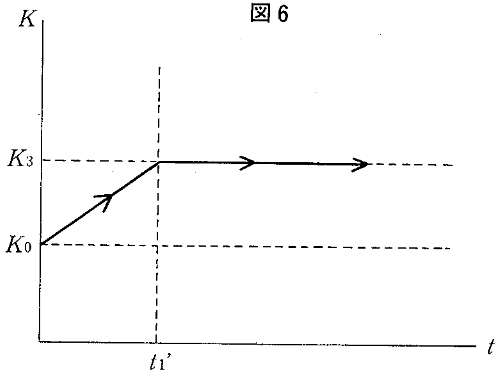


図 6



ただしここでの資本ストック K_3 の水準が前節での K_1 より低くなるとは限らない点注意すべきである。なおこの場合の関数 λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, μ_3 の時間経路は図 7 (a)(b)(c) に示されている。

図 7 (a)

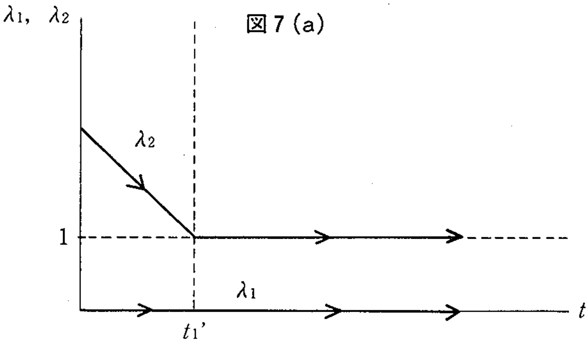


図7(b)

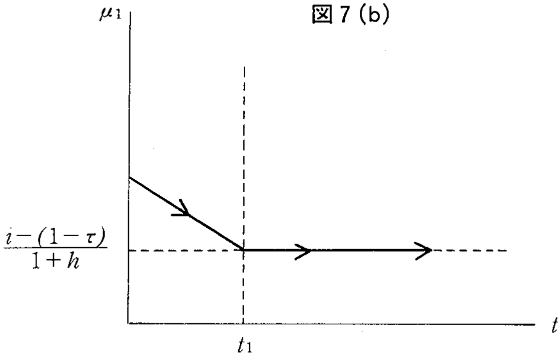
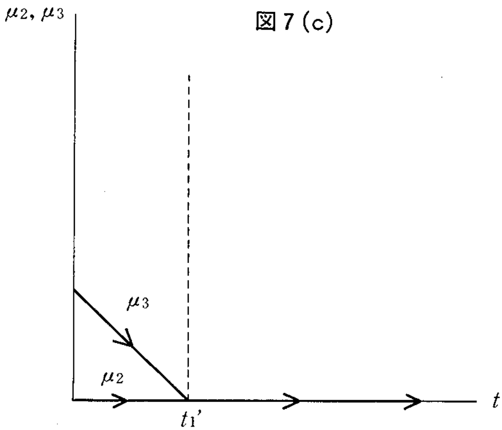


図7(c)

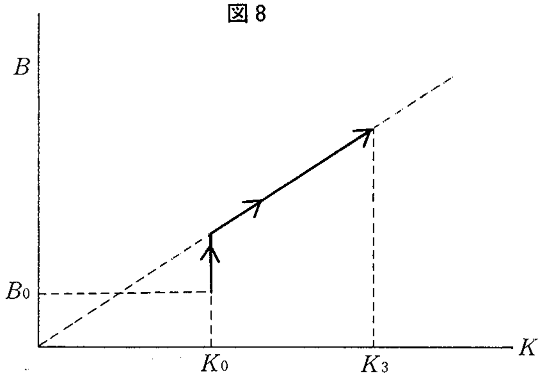


さて以上から明らかな企業の最適成長パターンを整理すると表4と図8のように示される。

表　4

	負債・配当・投資政策
③	最大負債・配当ゼロ・成長政策
↓ ④	最大負債・正の配当・成長ゼロ

図 8



以上のように，この場合の企業の最適な成長政策は，十分低い資本ストック水準から出発する場合，2つの局面から構成される。まず第1の局面では③の経路に乗り許容される最大の負債（社債）と内部留保で投資資金を調達し，配当はゼロにして可能な限り高い成長率が追求される。そして資本ストックが K_3 に達すると（第2局面），この K_3 水準が定常点（純投資ゼロ）であるので以後これが維持される。ただここでは最大限の社債を抱えたまま正の配当を行い，これを営業利益でまかなうことになる。いうまでもなく，このような財務政策は社債の実効利子率が低いためである。

VI おわりに

本稿において，企業の投資行動の背後にある投資資金の調達を明示的に導入した企業成長モデルを検討してきた。定式化されたモデルの基本的な特徴は，投資資金の源泉が内部留保と負債（社債）に限定され，銀行借り入れ，初期保有以上の新株発行が考慮されていないことである。いうまでもなく，このような単純化は最適解の導出を容易にしている反面，モデルの限界を示している。より具体的にいえば，資金調達として新株発行を考慮した場合の最適資金調達政策の導出がここで検討したような理論的枠組みで可能かどうかである。この点は，残された課題として今後検討されるべきであろう。

参 考 文 献

[1] Ekman, E. V., 1982, A Dynamic Financial Model of a Managerial Firm, in Feichtinger ed. Optimal Control Theory and Economic Analysis, North-Holland Publishing Company.

[2] Feichtinger, G. and R. F. Hartl, 1986, Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse, de Gruyter.

[3] Kamien, M. I. and N. Schwartz, 1981, Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, North-Holland, New York.

[4] Kort, P. M., 1989, Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 330, Springer, Berlin.

[5] Modigliani, F. and M. H. Miller, 1958, The Cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment, American Economic Review, Vol. 48, No. 3, pp. 261-297.

[6] Loon, P. J. J. M. van, 1983, A Dynamic Theory of the Firm: Production, Finance and Investment, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 218, Springer, Berlin.

[7] Schijndel, G. J. C. T. van, 1986, Dynamic Behaviour of a Value Maximizing Firm under Personal Taxation, European Economic Review, Vol. 30, pp. 1043-1062.

[8] 吉川 洋，1984，『マクロ経済研究』東京大学出版会。