香川大学経済論叢
第67巻 第3・4号 1995年2月 117-126

ヘックスにおけるZermeloの定理の適用について

宍戸栄徳

1 完全情報ゲームとZermeloの定理

ゲーム理論において，情報のもつ価値は重要なものである。すべてのプレイヤーの情報分割がただ1つの点をもつ情報集合からなるとき，その情報分割は完全情報であるという。完全情報ゲームでは，すべてのプレイヤは互いに自分自身の評価関数と過去の手番における自分のプレイの結果だけでなく，相手のプレイヤーの評価関数と過去の手番における相手のプレイの結果もすべて知っていることになる。

完全情報ゲームの中で，特にボード・ゲームと呼ばれるゲームについて考察する。プレイヤーの数は2人以上であり，必ずしも2人とは限らない。2人でプレイする完全情報のボード・ゲームをチェス族のゲームと呼ぶこともある。本稿でもチェス族のゲームについて考察するが，囲碁，チェスのような繰り返しの局面が生じる可能性のあるゲームはそのことについての例外的な扱いが本質的でないにもかかわらず，分析を複雑にしている。しかし，このことが実際にプレイする場合の必勝法の発見や検証を複雑にし，ゲームとしての奥行きをもたらしていくことは否定できない。

チェス族のこのような本質的でない複雑さを回避するために，過去に経過した手番の数に対して単調にゲームを進行し，有限回で必ず勝敗が決するオセロに代表されるゲームに限定する。このゲームをオセロ族のゲームと呼ぶことにする。オセロは縦横各8ずつの桝目の中央部の4つの桝目に白石，黒石が2個ずつ配置されている。あとは交互に空いている桝目に石を置いてすべての桝目

が埋め尽くされるか，それ以前にすべての石が同一の色になったときに終了する。したがって，ゲームの進行にともなって，着手可能な桝目の数は単調に減少していくので，1回の勝負で同一の局面が繰り返し現われることなく，高々60回の手番でゲームは終了する。

完全情報ゲームでは次のようなKuhnの定理が知られている。(Kuhn，1953年)「完全情報をもつ有限非協力 n 人ゲームは純戦略において均衡点をもつ。ただし，n は有限な正の整数とする。」

Kuhnの定理は手数に関する帰納法によって証明することができる。[1]，[4] Kuhnの定理の $n=2$ の場合については，すでに1912年にZermeloによって証明されている。

Zermeloの定理を通常のボード・ゲームについて述べると次のようになる。「完全情報をもつ有限手番のチェス族のゲーム（オセロ族のゲーム）においては，先手または後手のどちらか一方に必勝法があるか，そうでない場合は少なくとも引き分けにすることができるかのどちらかである。」

Zermeloの定理を標準形のゲームで説明すると次のようになる。[2]

プレイヤー1（先手）の戦略を行に，プレイヤー2（後手）の戦略を列にとる。プレイヤー1が純戦略 i を，プレイヤー2が純戦略 j をとったときの利得を a_{ij} で表わし，a_{ij} の値を次のように定義する。

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{（プレイヤー1の勝ち）} \\ 0 & \text{（引き分け）} \\ -1 & \text{（プレイヤー1の負け）} \end{cases}$$

このとき，i 行 j 列の要素を a_{ij} とする利得行列 (a_{ij}) が，

(1) すべての要素が1である行 i^* が存在する。このときプレイヤー1が純戦略 i^* を用いれば，プレイヤー2がプレイヤー2の戦略にかかわらず勝つ。

表 1

	1	2	……	j	……	n
1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1j}	……	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2j}	……	a_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
i^*	1	1	……	1	……	1
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mj}	……	a_{mn}

(1') すべての要素が(−1)である列 j^* が存在する。このときプレイヤー2が純戦略 j^* を用いれば，プレイヤー2がプレイヤー1の戦略にかかわらず勝つ。

表 2

	1	2	……	j^*	……	n
1	a_{11}	a_{12}	……	−1	……	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	……	−1	……	a_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	……	−1	……	a_{in}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	……	−1	……	a_{mn}

(2) 行 i^* には(−1)を含まず，列 j^* には1を含まないとき，プレイヤー1，2がそれぞれ純戦略 i^* と j^* を用いれば，相手がどの戦略を使用しても少なくとも引き分けになる。

表 3

	1	2	……	j^*	……	n
1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1j^*}	……	a_{1n}
2	b_{21}	a_{22}	……	a_{2j^*}	……	a_{2n}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
i^*	a_{i^*1}	a_{i^*2}	……	$a_{i^*j^*}$	……	a_{i^*n}
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mj^*}	……	a_{mn}

$a_{i^*j} = 1,\ 0\ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$a_{ij^*} = 0,\ -1\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

2 ヘックスのルール

Zermelo の定理の適用されるゲームは数多くある。例えばオセロ・ゲームでは最終局面では黒と白の石の数は合計 64 であり，それぞれ 32 となれば引き分けで，それ以外では数の多いほうが勝ちである。したがって，勝敗が決着する場合と，決着しない場合がある。これに対し，ヘックス（六角形ゲーム）と呼ばれるゲームでは，引き分けになることが無いことが知られている。このことを初等的に証明することが本稿の目的である。

まず，ヘックスのルールについて説明を行う。

(1) ボード：ヘックスは図 1 に示すような六角形を敷き詰めた菱形の輪郭を持つ盤（ボード）の上で競技される。六角形は座標によって区別をする。第 i 行第 j 列の六角形を $(i,\ j)$ で表す。$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ とする。

(2) 陣地：菱形の 2 組の対辺をそれぞれ白と黒の陣地とする。各陣地を次のように表記する。

$W(H)=\{(1,\ j):\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ ：白の上辺の陣地，

$W(T)=\{(m,\ j):\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ ：白の下辺の陣地，

$B(L)\ =\{(i,\ 1):\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ ：黒の左辺の陣地，

$B(R)\ =\{(i,\ n):\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ ：黒の右辺の陣地，

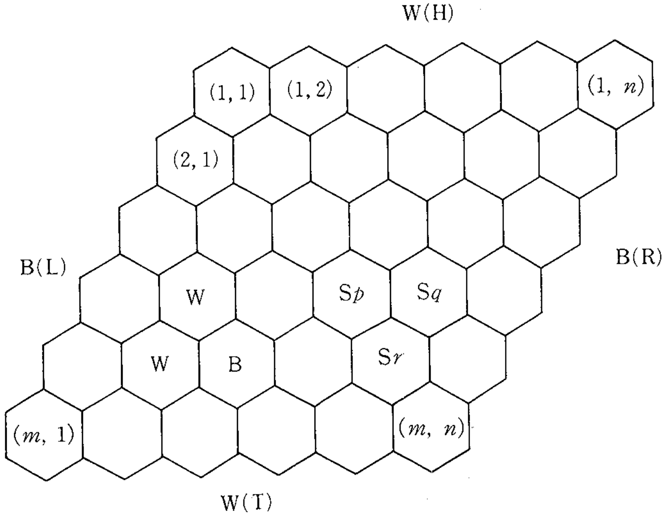

図1

ここで注意しなければならないのは，ボードの頂点 (1, 1) は W (H) と B (L) のどちらにも含まれ，同様にボードの他の3つの頂点 $(1,\ n)$, $(m,\ 1)$, $(m,\ n)$ も，それぞれ異なる色の2つの陣地に含まれていることである。

(3) プレイヤー：競技者は2人で，交互にそれぞれ白と黒の石をボードの六角形の中に置いていく。置かれた石は競技が終了するまでその位置や色を変えることはない。

今後，六角形に石を置いた状態を表わすために，白石を置いた六角形を白の六角形，黒石を置いた六角形を黒の六角形，石の置かれていない六角形を無色の六角形と呼ぶことにする。

(4) 六角形の連続：無色でない同じ色の2つの六角形が1辺を共有しているとき，その2個の六角形は連続しているという。

六角形 (i, j) に連続しているのは，$(i-1, j-1)$, $(i-1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$, $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$ の6個の六角形である。もちろん，辺上の六角形に対しては，定義されていない六角形を省いて考える。

(5) 六角形の列の連続：六角形を $S_1, S_2, \ldots, S_k$ としたとき，六角形の列 $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ についても，S_1 と S_2，S_2 と S_3，…，S_{k-1} と S_k がそれぞれ連続しているとき六角形の列 $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ は連続しているという。とくに，S_1，S_2，…，S_k が同じ色であるとき，1色で連続しているという。

(6) 辺の連結：六角形の列 $(S_1, S_2, \ldots, S_k)$ が1色で連続していて，S_1 と S_k がそれぞれ向かい合う陣地にあるとき，この連続した六角形の列は陣地を連結しているという。また，これらの陣地は連結しているという。

とくに，六角形の列の色が連結している陣地と同じ色であるとき，陣地は味方の列で連結されているという。向かい合う陣地を連結する六角形の列が存在しないとき，これらの陣地は連結していないという。

(7) 勝敗：2人のプレイヤーが交互に無色の六角形の任意のものを自分の色に換えていくとき，(先に) 自分の色の対辺を連結したプレイヤーを勝ちとする。両方のプレイヤーがともに連結できないとき，引き分けとする。

いったん勝敗が決した後は，無色の六角形をどのように色分けしても負けたプレイヤーの対辺が連結されることはないので，ボード上のすべての六角形は白と黒だけで無色の六角形は無いと仮定して分析してよい。

3 ヘックスにおける分離線の性質

このとき Zermelo 定理は次のように表現される。「ヘックスにおいてボード上の六角形がすべて白と黒だけになったとき，どちらか一方の組の対辺が連結

し，他の1組の対辺は連結してない。」この定理と勝敗の定義から，ヘックスは Zermelo の定理において，必ず勝敗が決し，引き分けが起こらない特別なゲームであるといえる。ヘックスを分析するためにはボード上の六角形そのものではなく，六角形の辺に注目しなければならない。

(1)　2つの六角形を共有する辺：六角形 Sp と Sq が共有する辺をもつときそれを $e(p, q)$ と表す。Sp と Sq が同じ色であるとき，$e(p, q)$ は Sp と Sq を接続しているといい，異なる色であるときは，分離しているという。

3つの六角形 Sp, Sq, Sr がそれぞれ辺 $e(p, q)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$ を共有しているとする。これらの3つの共有点を $n(p, q, r)$ と表す。Sp, Sq, Sr が同じ色であるとき，3つの辺 $e(q, p)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$ はそれぞれ Sp と Sq, Sq と Sr, Sr と Sp を接続している。また，Sp と Sq が同じ色で Sr だけ色が異なるとき，$e(q, r)$ と $e(r, p)$ が Sq と Sr, Sp と Sr を分離している。

見方を変えると，辺 $e(r, p)$ が Sp と Sr を分離しているなら，Sp と Sr は異なる色であるから，Sp と Sr の両方と共有辺をもつ Sq に対して，Sq は Sp と Sr のどちらか一方と同じ色であり，残りとは異なる色である。したがって，$e(p, q)$ と $e(q, r)$ のどちらか一方が六角形を接続し，他の辺は分離する。この性質により，2つの六角形を分離する共有辺はボードの辺以外のところでは分岐することなく連続していく。

(2)　分離線：連続した分離共有辺の列を分離線と呼ぶ。

分離線はボードの端に両端を持つか，端を持たない閉じた線であるかのどちらかである。1つの分離線はボードを2つの領域A，Bに分割する。

4　Zermelo の定理のヘックスへの適用

分離線を構成する辺を含む六角形は分離された一方の領域に含まれるものに

ついては同じ色の六角形の列を構成する。反対側にはもう1色の六角形の列を構成する。分離線によって分割された領域がボードの4つの頂点の六角形をどのように含むかによって場合分けする。

(1)　領域Aには頂点が4つ，領域Bには頂点がないとき。領域Bの六角形はすべて分離線と辺を共有し領域Aに含まれる六角形によって囲まれている。したがって，領域Bの六角形は勝敗に影響を与えない。

(2)　領域Aには頂点が3つ，領域Bには頂点が1つのとき。(1)と同様にして，領域Bの六角形は勝敗に影響を与えない。

(1)および(2)の性質から，分離する2つの領域のうち一方が頂点を高々1個しか含まない分離線は存在しないと仮定して一般性を失うことはなく，(1)と(2)の分離線のみがある場合には，頂点を3つ以上含む領域にある分離線と辺を共有する六角形の列の色のプレイヤーが勝ち，残りは(3)の場合だけを考察すればよいことになる。

(3)　領域Aには頂点が2つ，領域Bには頂点が2つのとき。分離線が分岐しない1本の線であることから，同じ領域に含まれる頂点は隣り合うものである。

(3 a)　領域Aに(1, 1)と$(1,n)$を含み，領域Bに$(m, 1)$と(m, n)を含むとき。分離線と辺を共有する六角形の列は領域Aと領域Bにそれぞれ1つずつあり，B (L) とB (R) を連結する。これらの六角形の列の色は領域Aと領域Bでは互いに異なるので，どちらかの列は必ず黒であり，黒のプレイヤーが勝つ。このとき，白の六角形の列はB (L) とB (R) を連結するこの黒の六角形の列に妨害されて，W (H) とW (T) を連結することはできない。

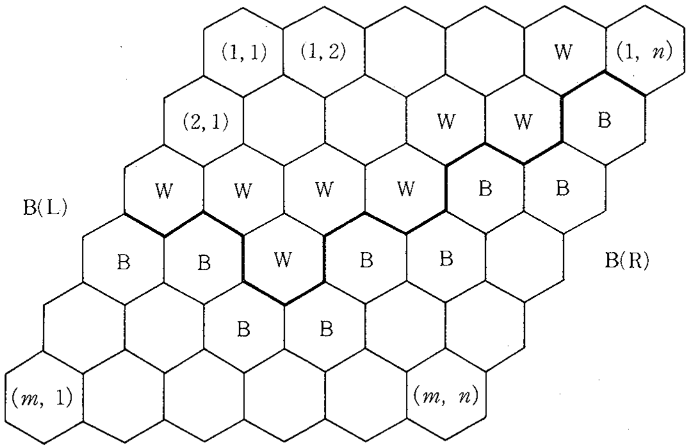

図 2

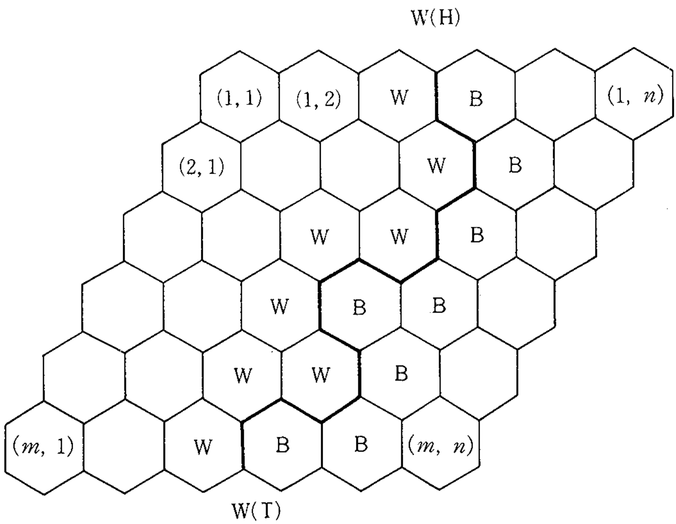

図 3

(3 b)　領域Aに(1, 1)と$(m, 1)$を含み，領域Bに$(1, n)$と(m, n)を含むとき。分離線と辺を共有する六角形の列は領域Aと領域Bにそれぞれ1つず

つあり，W (H) と W (T) を連結する。これらの六角形の列の色は領域Aと領域Bでは互いに異なるので，どちらかの列は必ず白であり，白のプレイヤーが勝つ。このとき，黒の六角形の列は W (H) と W (T) を連結するこの白の六角形の列に妨害されて，B (L) と B (R) を連結することはできない。

一方のプレイヤーが自分の陣地を連結する六角形の列を持つとき，相手のプレイヤーがその六角形の列に妨害されて，自分の陣地を連結できないことは分離線が分岐をもたないことから明らかである。

以上のことから，ヘックスには引き分けがありえないことが示された。さらに，陣地を連結する味方の六角形の列以外の六角形が勝敗には何の影響も与えないことから，ヘックスは引き分けが無いことだけでなく，先手必勝であることも簡単に示すことができる。[2]

ヘックスを始めとする有限非協力完全情報ゲームに関する一般的な「数とゲーム」の関係については，[3] に興味ある記述がある。

参考文献

[1] 鈴木光男『ゲーム理論入門』共立出版，1981 年

[2] オーマン，R. J.，丸山徹，立石寛訳『ゲーム理論の基礎』勁草書房，1991 年

[3] エビングハウス他，成木勇夫訳『数 (上下)』シュプリンガー・フェアラーク東京，1991 年

[4] 鈴木光男『新ゲーム理論』勁草書房，1994 年