

# 非定常SURモデルの推定と検定の漸近理論 -改訂版-

久松博之<sup>1</sup>

## 1 はじめに

拙著『単位根の推定と検定』(1997)の第8章では説明変数がランダム・ウォークにしたがい各方程式の誤差項が互いに相関関係をもつSUR(Seemingly Unrelated Regression)モデルを考え、制約付き、制約なしSUR推定量とOLS推定量の漸近分布を非標準的な漸近理論を使って求めた。本稿ではこれと同じモデルで誤差にAR(1)過程を想定し共和分検定統計量の帰無分布(漸近分布)を導出する。どの推定法から計算される残差で検定量を評価するかによって帰無分布の形状は異なりそれぞれの場合で有意点が異なるので、シミュレーションで帰無分布の有意点を求めそれを使って検出力を計算した。その結果、制約なしSUR推定による残差で評価した検定量が制約付きSUR推定による残差やOLS推定による残差で評価した検定量よりもより検出力が高いことがわかった。本稿ではこのほかに、拙著(1997)で扱ったSURランダム・ウォークモデルよりもより現実的な、定常・非定常混在型、すなわちランダム・ウォークと定常過程が混在し誤差項が互いに相関関係をもつSURモデルを考え、制約付き、制約なしSUR推定量とOLS推定量の漸近分布を導出する。

<sup>1</sup>本稿は香川大学経済論叢第71巻第4号に掲載されたものの改訂版である。刊行後腑に落ちない点があって見直したら、全部で15ヶ所の誤りに気が付いた。統計学や計量経済学を一通り習ったことのある人でもこれらの誤りに気が付く人は少ないと思う。それゆえやっかいである。したがって、部分的な正誤表で済ませるわけにはいかないので全文改訂版としてここに掲載することにした。なお、この改訂版ではSURランダム・ウォークモデルにおける単位根検定の検出力の比較を新たに付け加えた。本稿は科学研究費特定領域研究『ネットワーク型パネルデータベースの構築と統計分析の研究：課題番号08209114』の共同研究成果の一部である。本稿作成にあたり広島大学経済学部の前川功一教授から貴重なコメントをいただいた。ここに記して謝意を表します。

この理論分析の背景には、和分・共和分過程を含む大量のマイクロパネルデータ、例えば数百の企業の数千日にわたる株価日次データの時系列的な構造をいくつかのタイプの異なるSURモデルで記述し、OLS、制約付き・制約なしSURで推定する場合を暗黙に想定している。非定常な要素を含むため漸近分布はブラウン運動の汎関数で表現され、有限標本分布はシミュレーションでグラフ化される。本稿では説明を簡単にするために2方程式モデルを想定しているが、この結果はn方程式SURモデルに一般化できる。

## 2 AR(1) 誤差をもつSURモデル

説明変数が  $I(1)$  過程にしたがい  $AR(1)$  誤差をもつSURモデルを考える。従属変数と説明変数の間に共和分 (cointegration) 関係があるかどうかは誤差の自己回帰係数が1かどうかを見ればよい。まずはじめに、共和分関係が存在しないという帰無仮説のもとで、OLS、制約付き、制約なしZellner推定量の極限分布をブラウン運動の汎関数で求め、シミュレーションによってこれら3つの推定量の分布特性を比較する。次に、検定統計量の帰無分布をブラウン運動の汎関数で求め、有限標本分布をシミュレーションでグラフ化し、その際計算される有意点を使って検出力を比較する。また、補論では従属変数間に共和分関係があるかどうかの判定法についてふれる。

### 2.1 SUR推定量の極限分布

次のような見かけ上無相関な回帰モデル (Seemingly Unrelated Regression model: SURモデル) を考える。:

$$y_{1t} = \beta_1 x_{1t} + u_{1t}, \quad (1)$$

$$y_{2t} = \beta_2 x_{2t} + u_{2t}$$

説明変数  $x_{it}, i = 1, 2$  は

$$x_{1t} = x_{1t-1} + v_{1t}, \quad (2)$$

$$x_{2t} = x_{2t-1} + v_{2t}$$

で、誤差項は

$$\begin{aligned} u_{1t} &= \rho_1 u_{1t-1} + \epsilon_{1t}, \\ u_{2t} &= \rho_2 u_{2t-1} + \epsilon_{2t} \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、 $y_{it}, x_{it}, u_{it}, v_{it}, i = 1, 2$ , はいずれもスカラーである。 $\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}$ は

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \sim N(0, \Omega),$$

と仮定する。ここに

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{pmatrix} \sigma_{v1}^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 I \end{pmatrix}\right)$$

と仮定する。すなわち、 $u_t$  と  $v_t$  は無相関であると仮定する。

ここで、次の行列を導入する。

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

ただし  $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iT})'$ ,  $x_i, u_i, v_i, i = 1, 2$ , も同様に定義される。 $T \times 1$  ベクトルである。これらの行列を用いれば、われわれのモデルは

$$Y = X\beta + U \tag{4}$$

と表される。このとき  $\beta$  の OLS および GLS 推定量は次のように定義される。

$$OLS \text{推定量: } \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{5}$$

$$GLS推定量: \tilde{\beta} = (X'\tilde{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Omega}^{-1}Y. \quad (6)$$

ここで、

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} s_{11}I & s_{12}I \\ s_{21}I & s_{22}I \end{pmatrix}.$$

制約付き Zellner 推定量 (Zellner (1962,63)) を  $\tilde{\beta}_R$ 、制約なし Zellner 推定量を  $\tilde{\beta}_U$  とすると、制約付き Zellner 推定量の  $s_{ij}$  は

$$s_{ij} = \frac{\hat{u}_i \hat{u}_j}{T - k_i},$$

$$\hat{u}_i = y_i - x_i \hat{\beta}_i, \quad \hat{\beta}_i = (x_i' x_i)^{-1} x_i' y_i, \quad i = 1, 2,$$

制約なし Zellner 推定量の  $s_{ij}$  は

$$s_{ij} = \frac{e_i' e_j}{T - k_1 - k_2},$$

$$e_i = y_i - Z \hat{\gamma}$$

ここで

$$Z = (x_1 \quad x_2), \quad \hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y_i, \quad i = 1, 2,$$

で与えられる。この場合、 $k_1 = k_2 = 1$  である。

Phillips (1987) あるいは Phillips and Durlauf (1986) と同様に

$$u_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}, \quad v_t = \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}, \quad w_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

と置けば、それぞれの partial sum を標準化したものは次のようなブラウン運動に収束する。

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=1}^t w_{[Tr]} \Rightarrow B(r) = \begin{pmatrix} B_1(r) \\ B_2(r) \end{pmatrix}, \quad (j-1)/T \leq r \leq j/T, \quad j = 1, 2, \dots, T$$

$$\text{ここで、} B_1(r) = \begin{pmatrix} B_{11}(r) \\ B_{12}(r) \end{pmatrix}, B_2(r) = \begin{pmatrix} B_{21}(r) \\ B_{22}(r) \end{pmatrix}.$$

これより、帰無仮説  $H_0: \rho_i = 1, i = 1, 2$ , のもとでの OLS 推定量の極限分布は容易に

$$\hat{\beta} - \beta \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\int_0^1 B_{21}(r)B_{11}(r)dr}{\int_0^1 B_{21}(r)^2dr} \\ \frac{\int_0^1 B_{22}(r)B_{12}(r)dr}{\int_0^1 B_{22}(r)^2dr} \end{pmatrix} \tag{7}$$

で与えられることがわかる。

次に Zellner 推定量の極限分布を求める。

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} - \beta &= (x' \tilde{\Omega}^{-1} x)^{-1} x' \tilde{\Omega}^{-1} u \tag{8} \\ &= \begin{pmatrix} s_{22} \sum_{t=1}^T x_{1t}^2 & -s_{12} \sum_{t=1}^T x_{1t}x_{2t} \\ -s_{21} \sum_{t=1}^T x_{1t}x_{2t} & s_{11} \sum_{t=1}^T x_{2t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} s_{22} \sum_{t=1}^T x_{1t}u_{1t} - s_{12} \sum_{t=1}^T x_{1t}u_{2t} \\ -s_{21} \sum_{t=1}^T x_{2t}u_{1t} + s_{11} \sum_{t=1}^T x_{2t}u_{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。  $\rho_i = 1, i = 1, 2$ , のとき、項別に収束をみると

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T x_{it}^2 &\Rightarrow \int_0^1 B_{2i}(r)^2 dr, i = 1, 2, \\ \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T x_{it}u_{jt} &\Rightarrow \int_0^1 B_{2i}(r)B_{1j}(r)dr, i = 1, 2 \\ \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T x_{1t}x_{2t} &\Rightarrow \int_0^1 B_{21}(r)B_{22}(r)dr \end{aligned}$$

と計算される。また、

$$\frac{1}{T} s_{ij} = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it} \hat{u}_{jt} \Rightarrow \int_0^1 B_{1i}(r)B_{1j}(r)dr = \xi_{ij}, i = 1, 2.$$

である。証明は Appendix A を参照。

以上の結果から、帰無仮説のもとでのSUR推定量 $\tilde{\beta} - \beta$ の極限分布は次式で与えられる。

### 定理1.1

$$\tilde{\beta} - \beta \Rightarrow \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \xi_{11} \int_0^1 B_{22}(r)^2 dr * P + \xi_{12} \int_0^1 B_{21}(r) B_{22}(r) dr * Q \\ \xi_{21} \int_0^1 B_{21}(r) B_{22}(r) dr * P + \xi_{22} \int_0^1 B_{21}^2(r) dr * Q \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで

$$\begin{aligned} D &= \xi_{11} \xi_{22} \int_0^1 B_{21}(r)^2 dr \int_0^1 B_{22}(r)^2 dr - \xi_{12} \xi_{21} \left( \int_0^1 B_{21}(r) B_{22}(r) dr \right)^2 \\ P &= \xi_{22} \int_0^1 B_{21}(r) B_{11}(r) dr - \xi_{12} \int_0^1 B_{21}(r) B_{12}(r) dr \\ Q &= -\xi_{21} \int_0^1 B_{22}(r) B_{11}(r) dr + \xi_{11} \int_0^1 B_{22}(r) B_{12}(r) dr. \end{aligned}$$

$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$  のとき

$$\hat{\beta} - \beta \equiv \tilde{\beta} - \beta \quad (10)$$

となる。□

なお、この結果から直ちに $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$  のとき Zellner 推定量の分布は漸近的に OLS の分布と同等になることがわかる。

## 2.2 共和分検定量の分布

前節で定義したSURモデルについて帰無仮説 $H_0: \rho_i = 1, i = 1, 2$ を検定する共和分検定量

$$T(\hat{\rho}_i - 1) = T \left\{ \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_{it} \hat{u}_{it-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_{it-1}^2} - 1 \right\}, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

を考える。Maekawa(1980)はSURモデルの係数の上への線形制約に関する仮説検定について、SURの誤差項間の相関を考慮した $t$ タイプの検定法のパフォーマンスが相関が低い場合もそう悪くはないことを示した。また、Hatanaka and Idee(1995)は説明変数に非定常な要素を含む線形回帰モデルを想定し、AR(1)誤差の係数が1かどうかを検定する共和分検定量の漸近分布を求めた。本稿では、誤差項の相関を考慮する場合と考慮しない場合について、共和分検定量の検出力をグラフで比較する。(11)式の $\hat{u}_{it}$ は残差であるがモデルを何で推定するかによって、OLS残差、制約付きSUR残差、制約なしSUR残差の3通りが考えられる。

$$\hat{u}_{it} = y_{it} - \hat{\beta}_i x_{it} = -(\hat{\beta}_i - \beta_i)x_{it} + u_{it}.$$

これより

$$\hat{u}_{it}^2 = (\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 x_{it}^2 - 2(\hat{\beta}_i - \beta_i)x_{it}u_{it} + u_{it}^2$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it}^2 &= \frac{1}{T^2} (\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 \sum_{t=1}^T x_{it}^2 - \frac{2}{T^2} (\hat{\beta}_i - \beta_i) \sum_{t=1}^T x_{it}u_{it} + \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T u_{it}^2 \\ &\Rightarrow \zeta_i^2 \int_0^1 B_{2i}(r)^2 dr - 2\zeta_i \int_0^1 B_{2i}(r)B_{1i}(r)dr + \int_0^1 B_{1i}(r)^2 dr. \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it-1}(\hat{u}_{it} - \hat{u}_{it-1}) &= \frac{1}{T} (\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 \sum_{t=1}^T x_{it-1}v_{it} - \frac{1}{T} (\hat{\beta}_i - \beta_i) \sum_{t=1}^T u_{it-1}v_{it} \\ &\quad - \frac{1}{T} (\hat{\beta}_i - \beta_i) \sum_{t=1}^T x_{it-1}\epsilon_{it} + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_{it-1}\epsilon_{it} \end{aligned}$$

ここで、 $T \rightarrow \infty$ のとき、右辺第2, 3項は0に収束し、

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it-1}v_{it} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ B_{2i}(1)^2 - \sigma_{vi}^2 \right\}$$

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_{it-1} \epsilon_{it} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ B_{1i}(1)^2 - \sigma_{ii} \right\},$$

したがって、

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{u}_{it-1} (\hat{u}_{it} - \hat{u}_{it-1}) \Rightarrow \zeta_i^2 \left(\frac{1}{2}\right) \{ B_{2i}(1)^2 - \sigma_{vi}^2 \} + \left(\frac{1}{2}\right) \{ B_{1i}(1)^2 - \sigma_{ii} \}$$

となる。RSUR、USUR、OLSのそれぞれの残差を用いた場合も同様な項別計算を行うことができる。以上の結果を(11)に代入すれば、共和分検定量の漸近分布は次式で与えられる。

定理1.2 OLS,RSURおよびUSURの3通りの推定量に対して、 $\hat{\rho}_i$ の漸近分布は次の形で与えられる。

$$T(\hat{\rho}_i - 1) = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_{it-1} (\hat{u}_{it} - \hat{u}_{it-1}) / T}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_{it-1}^2 / T^2} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \frac{\zeta_i^2 \left(\frac{1}{2}\right) \{ B_{2i}(1)^2 - \sigma_{vi}^2 \} + \left(\frac{1}{2}\right) \{ B_{1i}(1)^2 - \sigma_{ii} \}}{\zeta_i^2 \int_0^1 B_{2i}(r)^2 dr - 2\zeta_i \int_0^1 B_{2i}(r) B_{1i}(r) dr + \int_0^1 B_{1i}(r)^2 dr}.$$

$\zeta_i, i = 1, 2$ , は  $\hat{\beta}_i - \beta_i, i = 1, 2$  の漸近分布で、OLS, RSUR, USUR の3通りが考えられる。 □

前節の結果より  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$  のとき3者の分布は漸近的に同じになるが、一般には同等にはならない。次節においてシミュレーションでそれぞれの小標本分布を比較する。

### 2.3 シミュレーション

$u_1$  と  $u_2$  の分散比を  $\eta = \sigma_{22} / \sigma_{11}$ 、 $u$  と  $v$  の分散比を  $\kappa = \sigma_{ii} / \sigma_{vi}^2, i = 1, 2$  および  $u_1$  と  $u_2$  の相関係数を  $r = \sigma_{12} / \sqrt{\sigma_{11} \sigma_{22}}$  とする。まず、 $\sigma_{11}, \eta, r$  を与え、 $\sigma_{22} = \eta \cdot \sigma_{11}, \sigma_{12} = r \cdot \sigma_{11} \cdot \sqrt{\eta}$  より誤差の分散共分散行列  $\Omega$  を生成する。次に  $\Omega$  をコレスキー分解した行列を用いて平均0分散1の正規乱数系列を変換してデータを生



成する。SUR および OLS 推定量の計算を 5000 回くり返し、ヒストグラムと累積度数分布を GAUSS で描いた。結果は図 1.1、図 1.2 に示される。グラフより次のことが観察された。

1.  $\hat{\beta}_i - \beta_i$ ,  $i = 1, 2$ , の分布について

(1) SUR と OLS の分布はいずれも左右対称。

(2)  $\rho_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , のときは異なり  $\rho_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , のときは制約なし SUR の方が制約付き SUR よりもより中心に集中している。

(3)  $|r|$  が 1 に近いほど、SUR に比べて OLS の分散は大きくなる。(SUR の方がより効率性が高い。)

(4)  $\kappa(u$  と  $v$  の分散比) が小さくなるにしたがって、いずれの推定量の分布もより中心に集中する。(ただし  $r = 0.0$  のときは変化なし。)

2.  $T(\hat{\rho}_i - 1)$  の分布について

図 1.3、図 1.4 からわかるように検定量の分布は非対称で、OLS 残差、RSUR 残差、USUR 残差のどれを使って評価するかで形状が異なるが、USUR 残差を使う場合が最も帰無分布が 0 軸に集中することがわかる。この傾向は誤差項間の相関係数  $r$  が 1 に近いほど顕著である。

## 2.4 検出力

ここでは  $T = 30, 100$ ,  $r = 0.8$  のときの検出力を繰り返回数 3000 回のシミュレーションで比較した。一般に、誤差項どうしの共分散が 0 でない限りこれらの検定量は漸近的に同等にはならない。検定の 5% 点は繰り返回数 5000 回のシミュレーションで計算した検定量の帰無分布から求めた。 $T(\hat{\rho}_{1,RSUR} - 1)$ ,  $T(\hat{\rho}_{1,USUR} - 1)$ ,  $T(\hat{\rho}_{1,OLS} - 1)$  の有意点はそれぞれ、 $T=30$  のとき -13.217, -11.313, -14.128,  $T=100$  のとき -14.110, -11.625, -15.100 である。図 1.5、図 1.6 を見ると、 $T(\hat{\rho}_{1,USUR} - 1)$  が他の 2 つの検定量に比べてより検出力が高いことがわかる。この傾向は、誤差項間の相関係数  $r$  が 1 に近いほど顕著である。

### 2.5 定数項がある場合

次に、モデルに定数項がある場合の推定量と共和分検定量の極限分布を求める。モデルは

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_1 + \beta_1 x_{1t} + u_{1t}, \\ y_{2t} &= \mu_2 + \beta_2 x_{2t} + u_{2t} \end{aligned} \tag{13}$$

と表される。説明変数と誤差項の構造は前節までの想定と同じであり、異なる点は定数項が含まれることである。この場合、OLS 推定量の漸近分布は

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}(\hat{\mu}_i - \mu_i) \\ \hat{\beta}_i - \beta_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\psi_i(\int_0^1 B_{2i}(r)dr) + \int_0^1 B_{1i}(r)dr \\ \psi_i \end{bmatrix}$$

$$\text{ここで、}\psi_i = \frac{\int_0^1 B_{2i}(r)B_{1i}(r)dr - (\int_0^1 B_{2i}(r)dr)(\int_0^1 B_{1i}(r)dr)}{\int_0^1 B_{2i}(r)^2 dr - (\int_0^1 B_{2i}(r)dr)^2}$$

で与えられる。一方、SUR 推定量の漸近分布は

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} T^{-1/2}(\tilde{\mu}_1 - \mu_1) \\ \tilde{\beta}_1 - \beta_1 \\ T^{-1/2}(\tilde{\mu}_2 - \mu_2) \\ \tilde{\beta}_2 - \beta_2 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \xi_{22} \cdot A_{11}^* & -\xi_{12} \cdot A_{12}^* \\ -\xi_{21} \cdot A_{21}^* & \xi_{11} \cdot A_{22}^* \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} \xi_{22} \int_0^1 B_{11}(r)dr - \xi_{12} \int_0^1 B_{12}(r)dr \\ \xi_{22} \int_0^1 B_{21}(r)B_{11}(r)dr - \xi_{12} \int_0^1 B_{21}(r)B_{12}(r)dr \\ -\xi_{21} \int_0^1 B_{11}(r)dr + \xi_{11} \int_0^1 B_{12}(r)dr \\ -\xi_{21} \int_0^1 B_{22}(r)B_{11}(r)dr + \xi_{11} \int_0^1 B_{22}(r)B_{12}(r)dr \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$A_{11}^* = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 B_{21}(r)dr \\ \int_0^1 B_{21}(r)dr & \int_0^1 B_{21}(r)^2 dr \end{pmatrix},$$

$$A_{12}^* = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 B_{22}(r)dr \\ \int_0^1 B_{21}(r)dr & \int_0^1 B_{21}(r)B_{22}(r)dr \end{pmatrix},$$

$$A_{21}^* = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 B_{21}(r)dr \\ \int_0^1 B_{22}(r)dr & \int_0^1 B_{22}(r)B_{21}(r)dr \end{pmatrix},$$

$$A_{22}^* = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 B_{22}(r)dr \\ \int_0^1 B_{22}(r)dr & \int_0^1 B_{22}(r)^2 dr \end{pmatrix}.$$

また、

$$\frac{1}{T} s_{ij} = \frac{1}{T^2} u_i u_j \Rightarrow \int_0^1 B_{1i}(r)B_{1j}(r)dr = \xi_{ij}$$

である。

次に、 $H_0 : \rho_i = 1, i = 1, 2$ , を検定するための共和分検定量の極限分布は、容易に

$$T(\hat{\rho}_i - 1) = T \left\{ \frac{\sum_{t=1}^T \hat{u}_{it} \hat{u}_{it-1}}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_{it}^2} - 1 \right\} \Rightarrow B_i / A_i, \quad i = 1, 2$$

となることが示される。ただし、ここに

$$B_i = \zeta_i \psi_i \sigma_{vi} B_{2i}(1) + \psi_i \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ B_{2i}(1)^2 - \sigma_{vi}^2 \right\} - \zeta_i \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ B_{1i}(1)^2 - \sigma_{ii} \right\} + \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ B_{1i}(1)^2 - \sigma_{ii} \right\},$$

$$A_i = \zeta_i^2 + \psi_i^2 \int_0^1 B_{2i}(r)^2 dr + \int_0^1 B_{1i}(r)^2 dr + 2\zeta_i \psi_i \int_0^1 B_{2i}(r) dr - 2\zeta_i \int_0^1 B_{1i}(r) dr - 2\psi_i \int_0^1 B_{2i}(r) B_{1i}(r) dr$$

で与えられる。RSUR、USUR の場合も同様の計算を行えば同じ結果が得られる。したがって  $\psi_i$  は  $\beta_i$  の OLS, RSUR, USUR 推定量の漸近分布を、 $\zeta_i$  は  $1/\sqrt{T}$  で標準化した  $\mu_i$  の 3 つの推定量の漸近分布を表す。帰無分布のグラフ化や検出力の比較については省略するが、定数項がない場合と同様にシミュレーションで求めることが出来る。

### 3 定常、非定常混在型SURモデル

拙著(1997)第8章では、いずれの方程式もランダム・ウォークで誤差項間に相関のあるSURモデル(SURランダム・ウォーク)を考えた。ここでは、それより現実的なランダム・ウォークモデルと定常AR(1)モデルからなり誤差項が相関を持つ2方程式SURモデルを考える。以下では、OLS、制約付き、制約なしSUR推定量の極限分布をブラウン運動の汎関数で求め、シミュレーションによってこれら3つの推定量の分布特性を比較する。

#### 3.1 SUR推定量の極限分布

次のような見かけ上無相関な回帰モデル(Seemingly Unrelated Regression model: SURモデル)を考える。:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_1 y_{1t-1} + u_{1t}, \\ y_{2t} &= \beta_2 y_{2t-1} + u_{2t} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\beta_1 = 1.0$ ,  $|\beta_2| < 1.0$ で $y_{it}$ の初期値は0とする。 $y_{it}, u_{it}$ ,  $i = 1, 2$ ,はいずれもスカラーである。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &\sim N(0, \Omega), \\ \Omega &= \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I \end{pmatrix} = \Sigma_u \otimes I \end{aligned}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} y_{1,-1} & 0 \\ 0 & y_{2,-1} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ただし $y_i, y_{i,-1}, u_i, i = 1, 2$ ,は $T \times 1$ ベクトル。

これらの行列を用いて

$$Y = X\beta + U \tag{15}$$

と表すと、 $\beta$ の OLS および GLS 推定量は次のように定義される。

$$\text{OLS 推定量: } \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \tag{16}$$

$$\text{GLS 推定量: } \tilde{\beta} = (X'\tilde{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Omega}^{-1}Y \tag{17}$$

ここで、

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} s_{11}I & s_{12}I \\ s_{21}I & s_{22}I \end{pmatrix}.$$

制約付き Zellner 推定量を  $\tilde{\beta}_R$ 、制約なし Zellner 推定量を  $\tilde{\beta}_U$  とすると、制約付き Zellner 推定量の  $s_{ij}$  は

$$s_{ij} = \frac{\hat{u}'_i \hat{u}_j}{T - k_i},$$

$$\hat{u}_i = y_i - y_{i,-1}\hat{\beta}_i, \quad \hat{\beta}_i = (y'_{i,-1}y_{i,-1})^{-1}y'_{i,-1}y_i, \quad i = 1, 2,$$

制約なし Zellner 推定量の  $s_{ij}$  は

$$s_{ij} = \frac{e'_i e_j}{T - k_1 - k_2},$$

$$e_i = y_i - Z\hat{\gamma}$$

ここで

$$Z = (y_{1,-1} \quad y_{2,-1}), \quad \hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y_i, \quad i = 1, 2,$$

と与えられる。この場合、 $k_1 = k_2 = 1$  である。 $s_{ij}, i, j = 1, 2$  の一貫性の証明は Appendix B を参照。

以下、項別の収束のオーダーを見る。

$$y_{1t} = y_{1t-1} + u_{1t} = \sum_{j=1}^t u_{1j},$$

$$y_{2t} = \beta_2 y_{2t-1} + u_{2t}$$

$$= u_{2t} + \beta_2 u_{2t-1} + \beta_2^2 u_{2t-2} + \dots + \beta_2^{t-1} u_{21} + \dots,$$

ここで  $|\beta_2| < 1.0$  である。

(a)  $(1/T^2) \sum_{t=1}^T y_{2t}^2 \Rightarrow \sqrt{\sigma_{11}} \int_0^1 W_1(r)^2 dr \cdot \sqrt{\sigma_{11}} = \sigma_{11} \int_0^1 W_1(r)^2 dr.$

ここで、 $W_1(r)$  は標準ウィナー過程で

$$S_t = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^t u_{1j} \\ \sum_{j=1}^t u_{2j} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{T}} S_{[Tr]} \Rightarrow B(r) = \begin{pmatrix} B_1(r) \\ B_2(r) \end{pmatrix}, \quad (j-1)/T \leq r \leq j/T, \quad j = 1, 2, \dots, T$$

となり、 $\Sigma_u^{-1/2} B(r) = W(r) = \begin{pmatrix} W_1(r) \\ W_2(r) \end{pmatrix}$  が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T y_{2t}^2 &= \sum_{t=1}^T (u_{2t} + \beta_2 u_{2t-1} + \beta_2^2 u_{2t-2} + \dots + \beta_2^{t-1} u_{21} + \dots)^2 \\ &= \sum_{t=1}^T (u_{2t}^2 + \beta_2^2 u_{2t-1}^2 + \beta_2^4 u_{2t-2}^2 + \dots + \beta_2^{2(t-1)} u_{21}^2 + \dots). \end{aligned}$$

これより

(b)  $(1/T) \sum_{t=1}^T y_{2t}^2 \rightarrow \sigma_{22}/(1 - \beta_2^2).$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T y_{1t} y_{2t} &= \sum_{t=1}^T (u_{1t} + u_{1t-1} + u_{1t-2} + \dots)(u_{2t} + \beta_2 u_{2t-1} + \beta_2^2 u_{2t-2} + \dots). \\ &= \sum_{t=1}^T (u_{1t} u_{2t} + \beta_2 u_{1t-1} u_{2t-1} + \beta_2^2 u_{1t-2} u_{2t-2} + \dots) \end{aligned}$$

これより

$$(c) \quad (1/T) \sum_{t=1}^T y_{1t}y_{2t} \rightarrow \sigma_{12}/(1 - \beta_2).$$

同様に

$$(d) \quad (1/T) \sum_{t=1}^T y_{2t}y_{1t} \rightarrow \sigma_{21}/(1 - \beta_2).$$

$$(e) \quad (1/T) \sum_{t=1}^T y_{1t-1}u_{1t} \Rightarrow (\frac{1}{2})\sigma_{11} \left\{ W_1(1)^2 - 1 \right\}.$$

$$(f) \quad (1/T) \sum_{t=1}^T y_{1t-1}u_{2t} \rightarrow \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \int_0^1 W_1(r)dW_2(r).$$

$$(g) \quad (1/\sqrt{T}) \sum_{t=1}^T y_{2t-1}u_{1t} \Rightarrow N(0, \sigma_{11}\sigma_{22}/(1 - \beta_2^2)).$$

$$(h) \quad (1/\sqrt{T}) \sum_{t=1}^T y_{2t-1}u_{2t} \Rightarrow N(0, \sigma_{22}^2/(1 - \beta_2^2)).$$

したがって OLS 推定量の極限分布は

$$T(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \Rightarrow \frac{(\frac{1}{2})\{W_1(1)^2 - 1\}}{\int_0^1 W_1(r)^2 dr} \tag{18}$$

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \Rightarrow N(0, 1 - \beta_2^2) \tag{19}$$

で与えられる。

次に、SUR 推定量の極限分布を求める。

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} - \beta &= (X'\tilde{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Omega}^{-1}U \tag{20} \\ &= \left( \begin{array}{cc} s_{22} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}^2 & -s_{12} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}y_{2t-1} \\ -s_{21} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}y_{2t-1} & s_{11} \sum_{t=1}^T y_{2t-1}^2 \end{array} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left( \begin{array}{cc} s_{22} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}u_{1t} - s_{12} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}u_{2t} \\ -s_{21} \sum_{t=1}^T y_{2t-1}u_{1t} + s_{11} \sum_{t=1}^T y_{2t-1}u_{2t} \end{array} \right) \end{aligned}$$

の左から行列 $\Phi$ 、

$$\Phi = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \sqrt{T} \end{pmatrix}$$

を掛けて $\tilde{\beta}$ を標準化すると

$$\Phi(\tilde{\beta} - \beta) = (\Phi^{-1}X'\tilde{\Omega}^{-1}X\Phi^{-1})^{-1}\Phi^{-1}X'\tilde{\Omega}^{-1}U \tag{21}$$

となり、これらを書き下せば

$$T(\tilde{\beta}_1 - \beta_1) = \frac{\left( s_{11} \sum_{t=1}^T y_{2t-1}^2 * P + s_{12} \sum_{t=1}^T y_{1t-1} y_{2t-1} * Q \right) / T^2}{\left( s_{11} s_{22} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}^2 \sum_{t=1}^T y_{2t-1}^2 - s_{12} s_{21} \left( \sum_{t=1}^T y_{1t-1} y_{2t-1} \right)^2 \right) / T^3},$$

$$\sqrt{T}(\tilde{\beta}_2 - \beta_2) = \frac{\left( s_{21} \sum_{t=1}^T y_{1t-1} y_{2t-1} * P + s_{22} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}^2 * Q \right) / T^2 \sqrt{T}}{\left( s_{11} s_{22} \sum_{t=1}^T y_{1t-1}^2 \sum_{t=1}^T y_{2t-1}^2 - s_{12} s_{21} \left( \sum_{t=1}^T y_{1t-1} y_{2t-1} \right)^2 \right) / T^3}$$

となる。ここで

$$P = s_{22} \sum_{t=1}^T y_{1t-1} u_{1t} - s_{12} \sum_{t=1}^T y_{1t-1} u_{2t},$$

$$Q = -s_{21} \sum_{t=1}^T y_{2t-1} u_{1t} + s_{11} \sum_{t=1}^T y_{2t-1} u_{2t}$$

と表される。項別に(a)～(h)の結果を代入し、整理すると次式を得る。

**定理2.1**

$$T(\tilde{\beta}_1 - \beta_1) \Rightarrow \frac{(\frac{1}{2})\{W_1(1)^2 - 1\}}{\int_0^1 W_1(r)^2 dr} \tag{22}$$

$$\sqrt{T}(\tilde{\beta}_2 - \beta_2) \Rightarrow N(0, (1 - r_{12}^2)(1 - \beta_2^2)) \tag{23}$$

ただし、 $r_{12} = \sigma_{21} / \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}$ は $u_{1t}$ と $u_{2t}$ の相関係数。 □

第1方程式 (ランダム・ウォーク) の推定では、OLSとSURはいずれもT-consistentでありTで標準化したOLSとSURは漸近的に同等な非標準的な分布



にしたがう。また第2方程式（定常 AR(1) 過程）の推定では推定量はいずれも  $\sqrt{T}$ -consistent で、 $\sqrt{T}$  で標準化した OLS と SUR は漸近的に分散の異なる正規分布にしたがう。常に SUR の方が OLS より分散は小さく、相関係数  $r_{12}$  が 0、すなわち  $\sigma_{12} = 0$  のとき漸的に同等になる。以下のシミュレーション分析で明らかのように、どちらの方程式の推定に関しても有限標本では SUR の方が OLS より効率性が高い。

### 3.2 シミュレーション

$T=30$ 、 $u_1, u_2$  の相関係数が 0.8 のときの制約付き、制約なし SUR 推定量および OLS 推定量の計算をくり返し回数 5000 回のシミュレーションで行い、ヒストグラムと累積度数分布のグラフを GAUSS で描いた。結果は図 2.1-2.4 で与えられる。これらのグラフより次のことが観察された。

#### 1. $T(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$ の分布について

- (1) SUR と OLS の分布はいずれも非対称である。
- (2) 漸的には同等であっても、有限標本では OLS より SUR の方がより中心に集中している。その意味で SUR は OLS より効率性が高い。

#### 2. $\sqrt{T}(\hat{\beta}_2 - \beta_2)$ の分布について

- (1) OLS も SUR も左右対称な分布である。
- (2) OLS より SUR の方がより中心に分布が集中している。その意味で SUR は OLS より効率性が高い。

### 3.3 定数項がある場合

定常・非定常混在型モデルに定数項がある場合、モデルは次のように表される。

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \mu_1 + \beta_1 y_{1t-1} + u_{1t}, \\ y_{2t} &= \mu_2 + \beta_2 y_{2t-1} + u_{2t} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $\beta_1 = 1.0$ ,  $|\beta_2| < 1.0$  で  $y_{it}$  の初期値は 0 とする。

証明は省略し結果だけを示す。OLS 推定量の漸近分布は、第 1 式について

$$\begin{bmatrix} T^{1/2}(\hat{\mu}_1 - \mu_1) \\ T^{3/2}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \end{bmatrix} \Rightarrow N \left( 0, \sigma_{11} \begin{pmatrix} 1 & \mu_1/2 \\ \mu_1/2 & \mu_1^2/3 \end{pmatrix}^{-1} \right)$$

である。また、第 2 式については、

$$\begin{bmatrix} T^{1/2}(\hat{\mu}_2 - \mu_2) \\ T^{1/2}(\hat{\beta}_2 - \beta_2) \end{bmatrix} \Rightarrow N \left( 0, \begin{pmatrix} \frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\mu_2^2 + \sigma_{22} & -\mu_2(1+\beta_2) \\ -\mu_2(1+\beta_2) & 1-\beta_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

となる。一方、SUR 推定量の漸近分布は、

$$\begin{bmatrix} T^{1/2}(\tilde{\mu}_1 - \mu_1) \\ T^{3/2}(\tilde{\beta}_1 - \beta_1) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow N \left( 0, \begin{pmatrix} 4\sigma_{11}(1-r_{12}^2) + \sigma_{12}\sigma_{21}/\sigma_{22} & -6(\sigma_{11}/\mu_1)(1-r_{12}^2) \\ -6(\sigma_{11}/\mu_1)(1-r_{12}^2) & 12(\sigma_{11}/\mu_1^2)(1-r_{12}^2) \end{pmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} T^{1/2}(\tilde{\mu}_2 - \mu_2) \\ T^{1/2}(\tilde{\beta}_2 - \beta_2) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow N \left( 0, \begin{pmatrix} \frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}\mu_2^2(1-r_{12}^2) + \sigma_{22} & -\mu_2(1+\beta_2)(1-r_{12}^2) \\ -\mu_2(1+\beta_2)(1-r_{12}^2) & (1-r_{12}^2)(1-\beta_2^2) \end{pmatrix} \right)$$

で与えられる。ここで、 $r_{12}^2 = \sigma_{12}\sigma_{21}/(\sigma_{11}\sigma_{22})$  である。

前節で得られた結果と比較すると、第 1 式 (ランダム・ウォーク) について定数項を含まない場合の  $\beta_1$  の SUR、OLS 推定量の漸近分布はいずれも非標準的な分布にしたがい、定数項を含む場合はいずれの推定量の分布も漸近的に正規分布にしたがうことがわかる。また、第 2 式 (定常 AR(1)) については、定数項を含まない場合、含む場合いずれの推定量も漸近的に正規分布にしたがうことがわかる。 $r_{12}^2$  が 1 に近いほど SUR 推定量の方が分散は小さくなる。

## 4 SUR 推定量による単位根の検定

拙著(1997)第8章では、いずれの方程式もランダム・ウォークで誤差項間に相関のあるSURモデル(SURランダム・ウォーク)を考え推定効率をグラフで比較した。ここでは、このモデルを帰無モデルとする単位根検定量の検出力をシミュレーションで比較する。

次のような見かけ上無相関な回帰モデル(Seemingly Unrelated Regression model: SUR モデル)を考える。:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_1 y_{1t-1} + u_{1t}, \\ y_{2t} &= \beta_2 y_{2t-1} + u_{2t} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\beta_1 = \beta_2 = 1.0$  で  $y_{it}$  の初期値は 0 とする。 $y_{it}, u_{it}, i = 1, 2$ , はいずれもスカラーである。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &\sim N(0, \Omega), \\ \Omega &= \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I \end{pmatrix} = \Sigma_u \otimes I \end{aligned}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} y_{1,-1} & 0 \\ 0 & y_{2,-1} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ただし  $y_i, y_{i,-1}, u_i, i = 1, 2$ , は  $T \times 1$  ベクトル。

これらの行列を用いて

$$Y = X\beta + U \quad (26)$$

と表すと、 $\beta$  の OLS および GLS 推定量は次のように定義される。

$$OLS \text{推定量} : \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (27)$$

$$GLS推定量: \tilde{\beta} = (X'\tilde{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\tilde{\Omega}^{-1}Y \tag{28}$$

ここで、

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} s_{11}I & s_{12}I \\ s_{21}I & s_{22}I \end{pmatrix}.$$

制約付き Zellner 推定量を  $\tilde{\beta}_R$ 、制約なし Zellner 推定量を  $\tilde{\beta}_U$  とすると、制約付き Zellner 推定量の  $s_{ij}$  は

$$s_{ij} = \frac{\hat{u}'_i \hat{u}_j}{T - k_i},$$

$$\hat{u}_i = y_i - y_{i,-1}\hat{\beta}_i, \quad \hat{\beta}_i = (y'_{i,-1}y_{i,-1})^{-1}y'_{i,-1}y_i, \quad i = 1, 2,$$

制約なし Zellner 推定量の  $s_{ij}$  は

$$s_{ij} = \frac{e'_i e_j}{T - k_1 - k_2},$$

$$e_i = y_i - Z\hat{\gamma}$$

ここで

$$Z = (y_{1,-1} \quad y_{2,-1}), \quad \hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'y_i, \quad i = 1, 2,$$

で与えられる。この場合、 $k_1 = k_2 = 1$  である。

$T(\hat{\beta}_{1,OLS} - \beta_1)$ ,  $T(\tilde{\beta}_{1,RSUR} - \beta_1)$ ,  $T(\tilde{\beta}_{1,USUR} - \beta_1)$ 、ただし  $H_0: \beta_1 = 1$ 、の帰無分布を 5000 回のシミュレーションで計算し、検定の 5% 有意点を求めた。  
 $T = 30, r = 0.8$  のとき  $OLS: -7.394, RSUR: -5.657, USUR: -5.631$   
 $T = 100, r = 0.8$  のとき  $OLS: -7.933, RSUR: -5.945, USUR: -5.883$  である。これらを使って 3000 回のくり返して 3 つの単位根検定量の検出力を計算した。検定仮説は

$$H_0: \beta_1 = 1$$

$$H_a: \beta_1 < 1$$

である。図 3.1 および図 3.2 にそれぞれ  $T = 30, T = 100, r = 0.8$  のときの検出力のグラフが与えられている。いずれの場合も SUR の方が OLS より検出力が高いことがわかる。この傾向は  $r$  が 1 に近いほど顕著である。

## 5 補論

最初の節で扱ったモデル

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \beta_1 x_{1t} + u_{1t}, \\ y_{2t} &= \beta_2 x_{2t} + u_{2t}\end{aligned}$$

においては、説明変数  $x_{it}, i = 1, 2$  の生成過程として

$$\begin{aligned}x_{1t} &= x_{1t-1} + v_{1t}, \\ x_{2t} &= x_{2t-1} + v_{2t}\end{aligned}$$

を仮定した。ここでは、説明を簡単にするために誤差項を AR(1) とするのではなく単に

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \sim N \left( 0, \begin{pmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I \end{pmatrix} \right),$$

とおく。また、 $v_1, v_2$  については本論と同じく

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \sim N \left( 0, \begin{pmatrix} \sigma_{v1}^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 I \end{pmatrix} \right)$$

とおく。

このとき、 $y_{1t}$  と  $y_{2t}$  の間に共和分関係があるかどうかは Phillips(1986) の方法で確認できる。

モデルを

$$\begin{aligned}y_{1t} &= y_{1t-1} + \beta_1 v_{1t} + u_{1t} - u_{1t-1} \\ y_{2t} &= y_{2t-1} + \beta_2 v_{2t} + u_{2t} - u_{2t-1}\end{aligned}$$

と書き換え、第1式の右辺第2項以降を  $v_t$ 、第2式の右辺第2項以降を  $w_t$  とおくと、

$$\Sigma = E \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t & w_t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1^2 \sigma_{v_1}^2 & 2\sigma_{12} \\ 2\sigma_{12} & \beta_2^2 \sigma_{v_2}^2 \end{pmatrix}$$

となる。 $y_{1t}$ と $y_{2t}$ の間に共和分関係があるかどうかは $\Sigma$ のsingularityを調べればよい。すなわち、

$$|\Sigma| = \beta_1^2 \beta_2^2 \sigma_{v_1}^2 \sigma_{v_2}^2 - 4\sigma_{12}^2$$

と表される。そして $|\Sigma| = 0$ のとき $v_t$ と $w_t$ の長期の相関係数 $\rho = 2\sigma_{12}/(\beta_1\beta_2\sigma_{v_1}\sigma_{v_2})$ が1になるので $y_{1t}$ と $y_{2t}$ の間に共和分関係が存在する。Phillips(1986)にあるように、 $\Sigma$ のsingularityは $y_{1t}, y_{2t}$ の間に共和分が存在するための必要条件である。因みに $\rho$ が1より小さければ両者の間に共和分は存在せず、0の場合両者は独立で、仮に $y_{1t}$ を $y_{2t}$ で説明するモデルを考えるとGranger and Newbold(1974)の“見せかけの回帰(spurious regression)”にあたる。

## 6 参考文献

- [1] 久松博之, 1997, 『単位根の推定と検定』, 香川大学経済研究叢書No.10.
- [2] Granger, C.W.J. and P. Newbold, 1974, Spurious regressions in econometrics, *Journal of Econometrics*, 2, 111-120.
- [3] Hatanaka, M. and T. Idee, 1995, Cointegrations in panel and macro data, mimeo.
- [4] Maekawa, K., 1980, An asymptotic expansion of the test statistics for linear restrictions in Zellner's SUR model, 広島大学経済論叢, 第4巻, 第2号, 81-97.
- [5] Phillips, P.C.B., 1986, Understanding spurious regressions in econometrics, *Journal of Econometrics*, 33, 311-340.
- [6] Phillips, P.C.B., 1987, Time series regression with a unit root, *Econometrica*, 55, 277-301.
- [7] Phillips, P.C.B., and S.N. Durlauf, 1986, Multiple time series regression with integrated processes, *Review of Economic Studies*, 53, 473-496.

[8] Zellner, A., 1962, An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias, *Journal of the American Statistical Association*, 57, 348-368.

[9] Zellner, A., 1963, Estimator for seemingly unrelated regressions: some finite sample results, *Journal of the American Statistical Association*, 58, 977-992.

### Appendix A

(1) 制約付き SUR の場合

$$\begin{aligned}
 s_{ij} &= \frac{\hat{u}'_i \hat{u}_j}{T - k_1} \\
 &= \frac{y'_i [I - x_i(x'_i x_i)^{-1} x'_i] [I - x_j(x'_j x_j)^{-1} x'_j] y_j}{T - k_1} \\
 &= \frac{u'_i u_j}{T - k_1} + O_p\left(\frac{1}{T}\right), i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{T} s_{ij} = \frac{1}{T(T - k_1)} u'_i u_j \Rightarrow \int_0^1 B_{1i}(r) B_{1j}(r) dr, i, j = 1, 2.$$

(2) 制約なし SUR の場合

$$\begin{aligned}
 s^*_{ij} &= \frac{e'_i e_j}{T - k_1 - k_2} = \frac{y'_i [I - Z(Z'Z)^{-1} Z'] y_j}{T - k_1 - k_2} \\
 &= \frac{1}{T - k_1 - k_2} u'_i u_j - \frac{1}{T - k_1 - k_2} u'_i (x_1 \ x_2) \left\{ \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} (x_1 \ x_2) \right\}^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} u_j \\
 &= \frac{1}{T - k_1 - k_2} u'_i u_j + O_p\left(\frac{1}{T}\right), i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{T} s^*_{ij} = \frac{1}{T(T - k_1 - k_2)} u'_i u_j \Rightarrow \int_0^1 B_{1i}(r) B_{1j}(r) dr, i, j = 1, 2.$$

Appendix B<sup>2</sup> $s_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}$  の証明

(1) 制約付き SUR の場合

$$\begin{aligned}
 s_{ij} &= \frac{\hat{u}'_i \hat{u}_j}{T - k_1} \\
 &= \frac{y'_i [I - y_{i,-1}(y'_{i,-1} y_{i,-1})^{-1} y'_{i,-1}] [I - y_{j,-1}(y'_{j,-1} y_{j,-1})^{-1} y'_{j,-1}] y_j}{T - k_1} \\
 &= \sigma_{ij} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

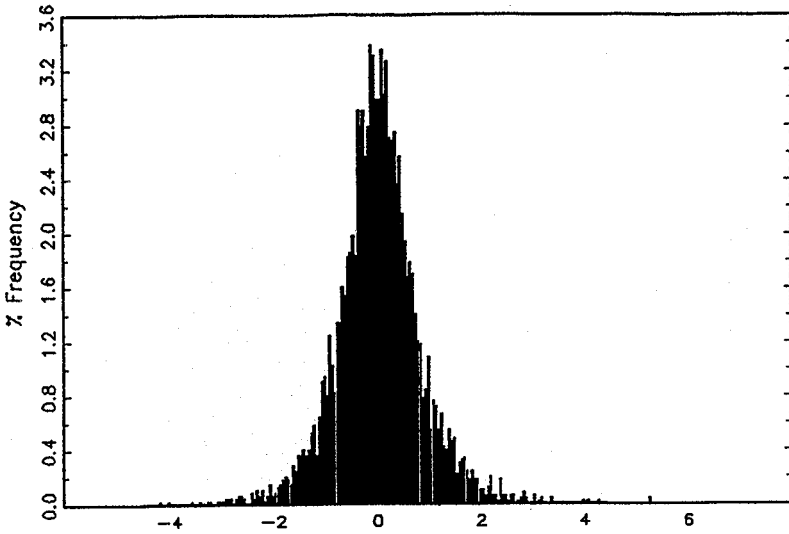
(2) 制約なし SUR の場合

$$\begin{aligned}
 s_{ij}^* &= \frac{e'_i e_j}{T - k_1 - k_2} = \frac{y'_i [I - Z(Z'Z)^{-1} Z'] y_j}{T - k_1 - k_2} \\
 &= \frac{1}{T - k_1 - k_2} u'_i u_j - \frac{1}{T - k_1 - k_2} u'_i (y_{1,-1} \ y_{2,-1}) \\
 &\quad \times \left\{ \begin{pmatrix} y'_{1,-1} \\ y'_{2,-1} \end{pmatrix} (y_{1,-1} \ y_{2,-1}) \right\}^{-1} \begin{pmatrix} y'_{1,-1} \\ y'_{2,-1} \end{pmatrix} u_j \\
 &= \sigma_{ij} + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Appendix B の余剰項の確率オーダーが  $1/\sqrt{T}$  の大きさにになることは、広島大学経済学部の福地純一郎助教授の指摘による。同氏に記して謝意を表します。

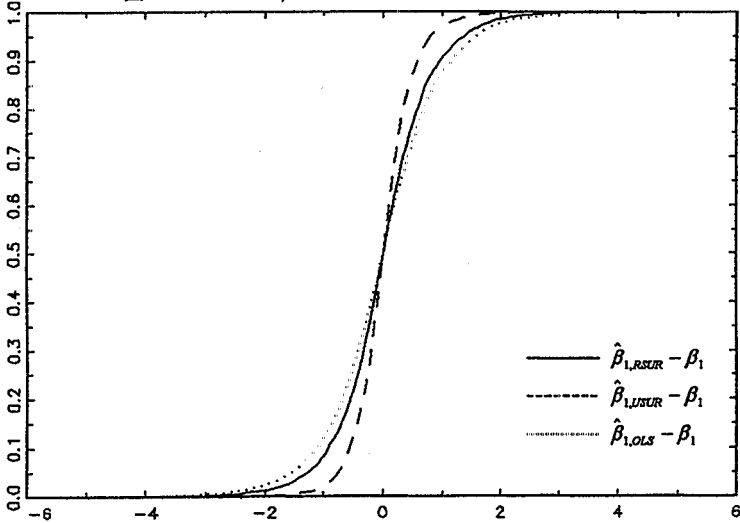


図 1.1： 制約付き SUR 推定量の分布



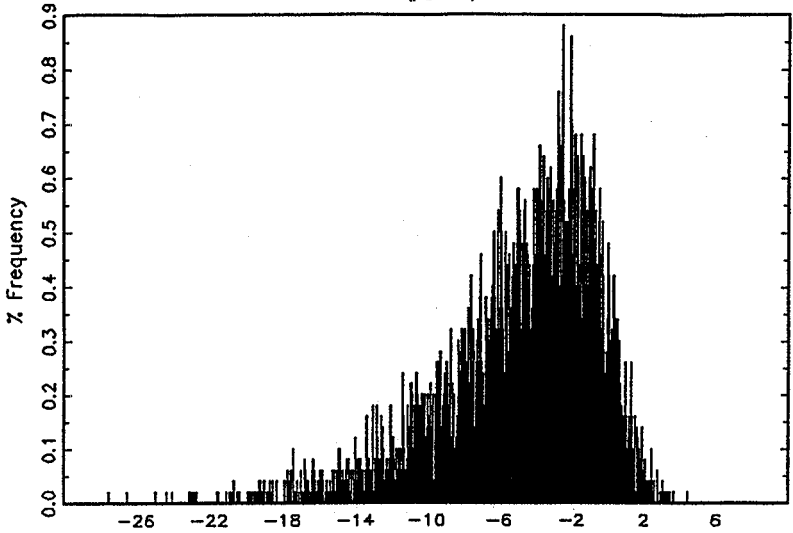
note: T=30, r=0.8, 繰り返し5000回

図 1.2： RSUR, USUR および OLS 推定量の分布



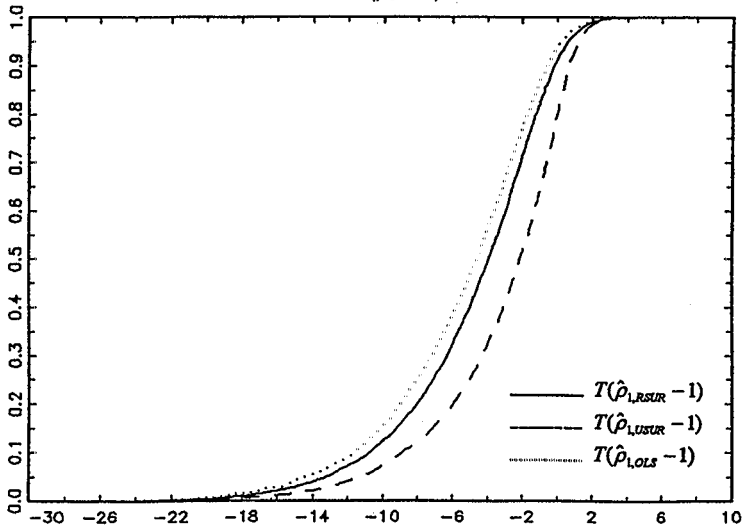
note: T=30, r=0.8, 繰り返し5000回

図1.3:  $T(\hat{\rho}_1 - 1)$ の分布



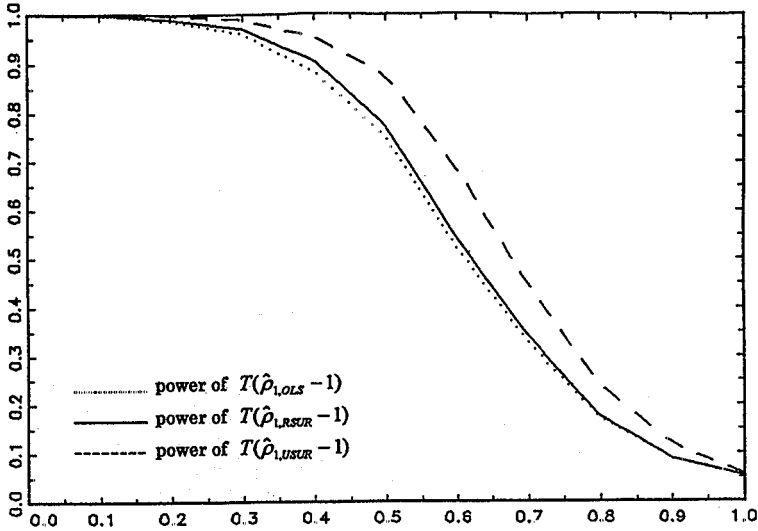
note:RSUR 残差の場合,  $T=30, r=0.8$ , 繰り返し5000回

図1.4:  $T(\hat{\rho}_1 - 1)$ の分布



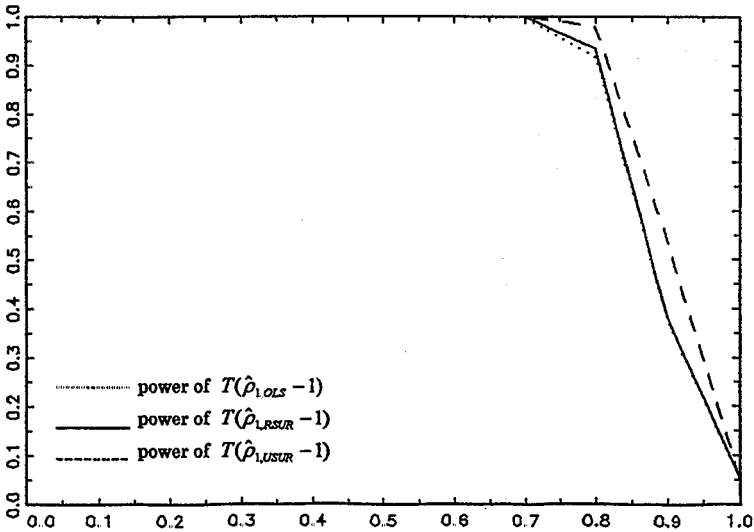
note:OLS, RSUR, USUR 残差の場合,  $T=30, r=0.8$ , 繰り返し5000回

図 1.5 :  $T(\hat{\rho}_1 - 1)$  の検出力の比較



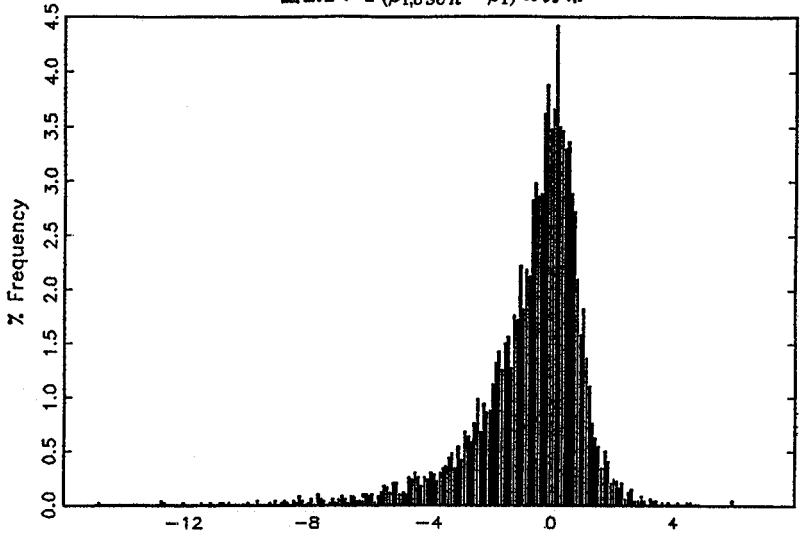
note: OLS, RSUR, USUR 残差の場合,  $T=30$ ,  $r=0.8$ , 繰り返し 3000 回

図 1.6 :  $T(\hat{\rho}_1 - 1)$  の検出力の比較



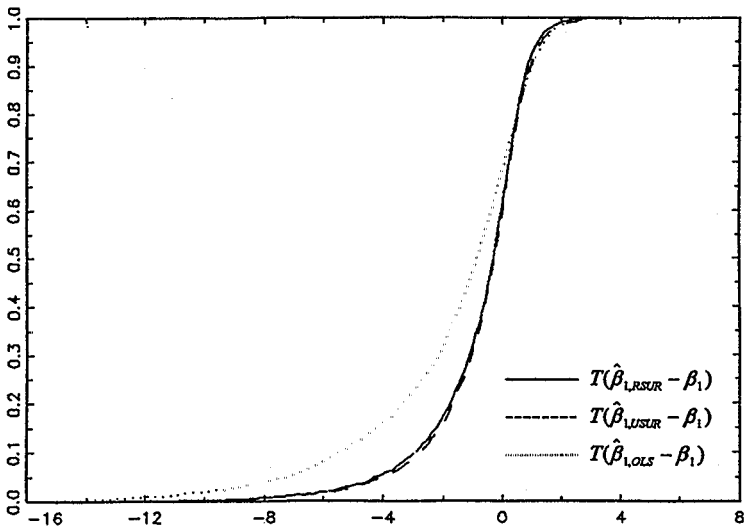
note: OLS, RSUR, USUR 残差の場合,  $T=100$ ,  $r=0.8$ , 繰り返し 3000 回

図2.1:  $T(\hat{\beta}_{1,USUR} - \beta_1)$  の分布



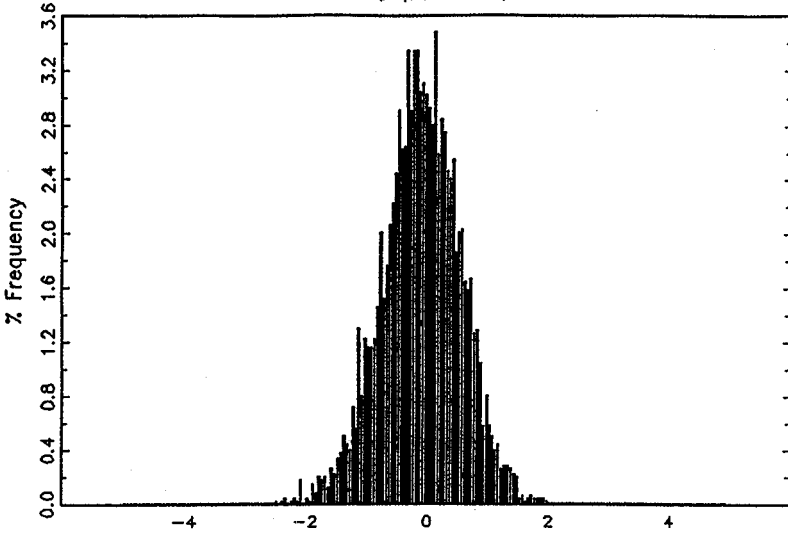
note: T=30, r=0.8, 繰り返し5000回

図2.2: RSUR, USUR および OLS の分布



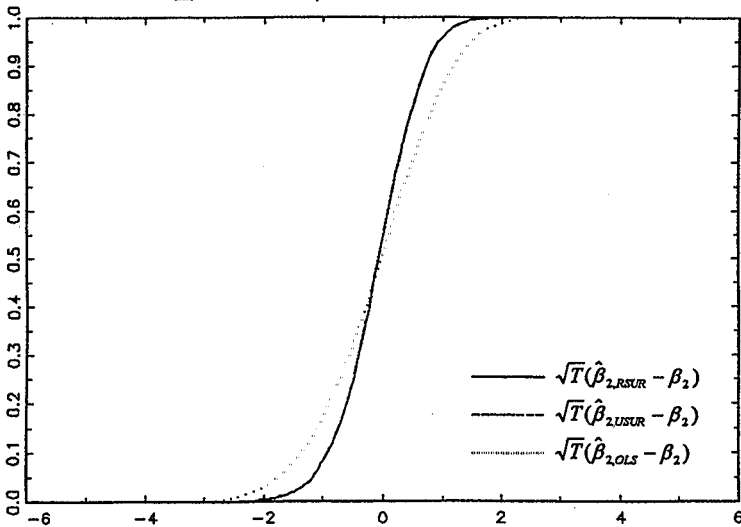
note: T=30, r=0.8, 繰り返し5000回

図2.3:  $\sqrt{T}(\hat{\beta}_{2,USUR} - \beta_2)$  の分布



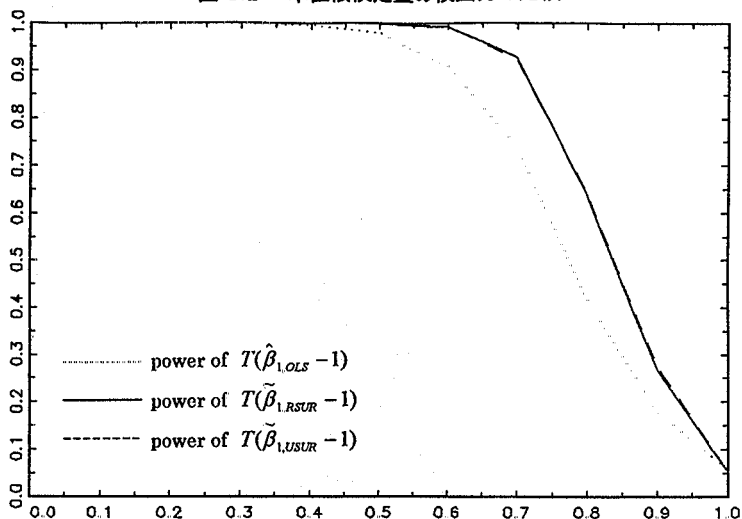
note: T=30, r=0.8, 繰り返し5000回

図2.4: RUR, USUR および OLS の分布



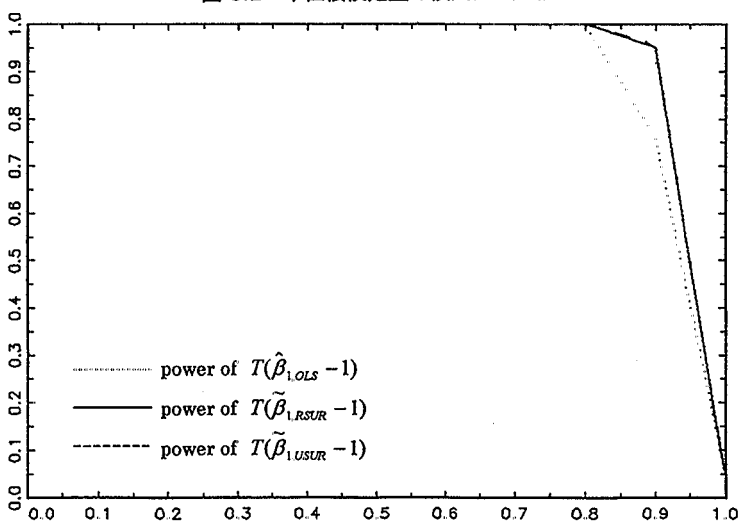
note: T=30, r=0.8, 繰り返し5000回

図 3.1：単位根検定量の検出力の比較



note: OLS, RSUR, USUR の場合,  $T=30$ ,  $r=0.8$ , 繰り返し 3000 回

図 3.2：単位根検定量の検出力の比較



note:  $T=100$ ,  $r=0.8$ , 繰り返し 3000 回