香川大学経済論叢
第75巻 第1号 2002年6月 183－191

研究ノート

名目貨幣供給の増加率とインフレーションについての覚書

－Blanchardによる説明をめぐって－

井上貴照

Ⅰ．はじめに

ある条件の下では長期において名目貨幣供給の増加率とインフレ率とは等しいという命題はよく知れている。この命題は，通常，貨幣市場の需給均衡条件を用いて論証されるが[(1)]，Blanchard（1997）(2000）は，財市場と貨幣市場の需給均衡条件から求められた総需要関係式からその命題を導いている[(2)]。このノートでは第Ⅱ節において，名目貨幣供給の増加率，利子率およびインフレ率との関係についてのBlanchardの説明を検討し，第Ⅲ節では名目貨幣供給の増加率とインフレ率との関係を演算子法とLaplace変換という２つの解法を示すことによって導出することである。

Ⅱ．名目貨幣供給の増加率，利子率およびインフレ率 －Blanchardによる説明－

名目貨幣供給の増加率，利子率およびインフレ率の関係を得るためのBlanchardの基本モデル[(3)]は，次の通りである。

(1)　$y=C(y-T)+I(y,\ r)+G$

(2)　$\dfrac{M^S}{P}=yL(i)$

（1）　たとえば，Barro（1984, chap. 8）(1997, chap. 8)，McCallum（1989, chap. 6）等。

（2）　Blanchard（1997, chap. 19）(2000, chap. 20)

（3）　Blanchard（1997, chap. 7）(2000, chap. 14)，ただし，Blanchard(2000)では，Blanchard(1997)における「長期」を「中期」と言い換えている。

(3)　$r=i-\pi^e$

ただし，y＝実質国民所得（産出量），T＝実質租税，r＝実質利子率，G＝実質政府支出，M^S＝名目貨幣供給量，P＝物価水準，i＝名目利子率，π^e＝期待インフレ率，である。

(1)式は，財市場均衡条件を示している。とくに，投資Iは，yとrに依存すると仮定されている。(2)式は，貨幣市場の均衡条件を示している。実質貨幣需要の所得弾力性が1と仮定されている。(3)式は，実質利子率は，名目利子率から期待インフレ率を引いたものに等しいことを示している[(4)]。さらに長期において産出量は，自然産出量y_nに等しくなると仮定され，簡単化のためにy_nは一定と仮定される。以上より，(1)から(3)式の方程式体系において，独立な方程式の数は，3である。今はπ^eを所与とすると，外生変数は，G，T，M^Sおよびy_nであるので，未知数は，r，iおよびPの3個である。(1)式においてrが決まり，このrを(3)式に代入するとiが決まる。そして，このiを(2)式に代入すれば，Pが決定される。

そこで，y_nが与えられているとき，財市場の需給均衡式は，

(4)　$y_n=C(y_n-T)+I(y_n, r)+G$

となる。(4)式において内生変数は，実質利子率rのみであるので，長期においては財市場の均衡条件からrが決定される。以上より，長期においては，貨幣供給量は，産出量（雇用）や実質利子率には影響を与えないことになる。

次に，期待インフレ率π^eが，長期では，現実のインフレ率πに等しくなると仮定される。(3)式とより，長期においては，

(5)　$r_n=i-\pi$

が得られる。ただし，r_n：長期の実質利子率，である。この$\pi^e=\pi$の場合には，(1)，(2)および(4)式の3個の独立な方程式において，G，T，M^Sおよびy_nが与えられると，r，iおよびPが決まる。

他方，Blanchardは，次のような総需要関係，

(6)　$y=y\left(\dfrac{M^S}{P},\ G,\ T\right)$

(4)　この関係式は，Fisher equationあるいはFisher効果と言われている。

から，長期においては産出量は自然産出量 y_n に等しく一定と仮定されているので，(6)式より，

$$(7)\quad \pi = g_m$$

という結論を得ている。[5] ただし，g_m は，名目貨幣供給の増加率である。このようにして名目貨幣供給増加率がインフレ率に等しいという命題を導いている。

さらに，(5)および(7)式より，

$$(8)\quad r_n = i - \pi = i - g_m$$

が得られる。(8)式は，長期では名目貨幣供給の増加率が上昇するとちょうど同じ率だけ名目利子率が上昇することを示している。

ところで，総需要関係(6)は，π^e がゼロのときの関係式である。(2)式より，$i = i\left(y, \frac{M^S}{P}\right)$ が得られ，これを(1)式に代入すると，$\pi^e = 0$ のとき，

$$(9)\quad y = C(y - T) + I\left(y,\ i\left(y,\ \frac{M^S}{P}\right)\right) + G$$

となる。よって，(9)式より，総需要関係式(6)式を得る。Blanchard は，このようにして求められた(6)式から(7)式を導いている。

しかしながら，期待インフレ率が必ずしもゼロでない場合，貨幣市場の均衡条件が満たされているときの財市場需給均衡式は，$y = C(y - T) + I\left(y, i\left(y, \frac{M^S}{P}\right) - \pi^e\right) + G$ なので，総需要関係式は，

$$(10)\quad y = \tilde{y}\left(\frac{M^S}{P},\ G,\ T,\ \pi^e\right)$$

である。この総需要関係式から，$\pi^e = \pi$ が成立すると仮定される長期において命題 $\pi = g_m$ を導出することが適切であると思われる。

そこで，長期においては，$\pi^e = \pi$ および貨幣市場均衡条件が成立しているとき，財市場需給均衡条件は，

$$(11)\quad y_n = C(y_n - T) + I\left(y_n,\ i\left(y_n,\ \frac{M^S}{P}\right) - \pi\right) + G$$

(5) Blanchard (1997, pp. 318－320, pp. 363－364) (2000, pp. 128－129, p. 171, pp. 277－279)

となる。長期では，y_nが所与となりG，TおよびM^Sが外生変数であるので，⑾式より，実質利子率$r_n\left(=i\left(y_n,\ \frac{M^S}{P}\right)-\pi\right)$が決まり，一定となる。今，$\pi=g_m$が成立すると推論する。これが実質利子率が一定となることと整合的であるかどうかを調べる。g_mは一定なので，πは一定となる。また$\frac{M^S}{P}$も一定となるので，実質貨幣供給量は不変である。貨幣市場の均衡条件より，名目利子率は一定となる。名目利子率が一定でありインフレ率も一定なので，実質利子率も一定となる。貨幣市場の均衡条件を満たし，実質貨幣供給量が一定となるように今期のPが決まれば，実質利子率も一定となり，⑾式の均衡条件は成立する。このように考えることにより，総需要関係から$\pi=g_m$が求められるように思われる。

Ⅲ．名目貨幣供給量の増加率とインフレ率の関係についての２つの解法 －演算子法とLaplace変換－

第Ⅲ節では第Ⅱ節で得られた命題$\pi=g_m$を演算子法とLaplace変換を用いて求める。(6) 第Ⅱ節の基本モデルより，長期においては，⑾式が成立する。以下ではこの⑾式を用いて$\pi=g_m$を求める。⑾式より実質利子率が一定であるので，$r_n=i\left(y_n,\ \frac{M^S}{P}\right)-\pi$より，

$$(12)\quad \lambda\left[\frac{\dot{M}^S}{M^S}-\frac{\dot{P}}{P}\right]-\dot{\pi}=0$$

が得られる。ただし，$\lambda=i\left[\frac{\left(\frac{M^S}{P}\right)}{i}\ \frac{\partial i}{\partial\left(\frac{M^S}{P}\right)}\right]<0$，$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$である。

⑿式を書きかえると，

$$(13)\quad \dot{\pi}+\lambda\pi=\lambda g_{mt}$$

となる。ただし，$\pi=\frac{\dot{P}}{P}$，$g_{mt}=\frac{\dot{M}^S}{M^S}$

⒀式からわかるように，ここでは物価水準について解くのではなく，インフレ率に

（６）　ここでは連続型の場合を取り上げる。離散型の場合については，例えば，Obstfeld and Rogoff（1996，pp. 515－521）参照。

ついて解いていくことになる。そこで，以下では，⒀式を２つの解法によって解いていく。

１．演算子法[7]

微分方程式⒀を前向きに解く。⒀式を，

$$D\pi + \lambda\pi = \lambda g_{mt} \tag{14}$$

と書きかえる。ただし，$\pi = \frac{DP}{P}$，$g_{mt} = \frac{DM^S}{M^S}$ であり，Dxは，xの右微分係数を示す。[8]

演算子法では，Dを数のように操作できると考える。すると，⒁式は，

$$\pi = \frac{\lambda}{\lambda + D} g_{mt} \tag{15}$$

となる。

ここで，$\lambda + D < 0$と仮定すると，

$$\frac{\lambda}{\lambda+D} = -\lambda\int_t^{\infty} e^{(\tau-t)(\lambda+D)}d\tau = -\frac{\lambda}{\lambda+D}\left[e^{(\tau-t)(\lambda+D)}\right]_{\tau=t}^{\tau=\infty}$$

が成立することに注意すると，

$$\pi = \left[-\lambda\int_t^{\infty} e^{(\tau-t)(\lambda+D)}d\tau\right]g_{mt} = -\lambda\int_t^{\infty} e^{(\tau-t)\lambda}e^{(\tau-t)D}g_{mt}d\tau \tag{16}$$

となる。

ところで，$e^{(\tau-t)D}$を$(\tau-t)D=0$の近傍でTaylor展開すると，

$$e^{(\tau-t)D} = 1 + (\tau-t)D + \frac{(\tau-t)^2D^2}{2!} + \cdots$$

となる。さらに$x(t)$のTaylor展開が収束すると仮定すると，

$$\begin{aligned} e^{(\tau-t)D}x(t) &= x(t) + (\tau-t)Dx(t) + \frac{(\tau-t)^2}{2!}D^2x(t) + \cdots \\ &= x(t+(\tau-t)) = x(\tau) \end{aligned}$$

（７）　演算子法については，例えば，Sargent（1970，pp. 35−38），布川（1987，第１章）参照。

（８）　Sargent and Wallace（1973，p. 1044 fn. 4，p. 1045）は，右微分係数は，完全予見という仮定の自然な表現であると考えている。

が得られる。この関係式を用いると，(16)式は，

$$(17)\quad \pi = -\lambda\int_{t}^{\infty} e^{(\tau - t)\lambda} g_{m\tau}\, d\tau$$

となる。そして同次方程式 $D\pi + \lambda\pi = 0$ の解を(17)式に加えると次のような一般解，

$$(18)\quad \pi = Ae^{-\lambda t} - \lambda\int_{t}^{\infty} e^{(\tau - t)\lambda} g_{m\tau}\, d\tau$$

を得る。ただし，Aは，任意の定数である。

ここで人々は，貨幣供給量の増加率自体が増加していく場合のみインフレが生じると期待すると仮定[9]すれば，$A = 0$ となる。したがって，(17)式がわれわれの求める解である。

貨幣供給の増加率が無限の将来にわたり一定の場合，すなわち $g_{m\tau} = g_m$ の場合には，

$$(19)\quad \pi = g_m$$

が成立する。これが(7)式である。すなわち，貨幣供給の増加率が毎期一定の場合には，インフレ率は貨幣供給の増加率に等しい。

2．Laplace 変換による解法

次に，Laplace 変換によって(13)式を解いてみよう。その前に Laplace 変換の基本的な性質[10]を確認しよう。

関数 $f(t)$ の Laplace 変換は，

$$(20)\quad F(l) = L(f(t)) = \int_{0}^{\infty} e^{-lt} f(t)\, dt$$

と定義される l の関数である。ただし，(20)式の右辺の積分（Laplace 積分）が有界であると仮定されている。このとき，$L(f(t))$ を Laplace 変換の像，$f(t)$ をその原像と

---

(9) Sargent and Wallace (1973, p. 1046), Sargent (1979, p. 38) 参照。このような仮定を Obstfeld and Rogoff (1984, p. 169) は，saddlepath assumption, Obstfeld. and Rogoff (1996, p. 520) は，the assumption of no speculative bubblesと呼んでいる。

(10) Laplace 変換については，Gabel and Roberts (1973, chap. 6), Sokolnikoff and Redheffer (1966), 布川 (1987) 参照。また，Laplace 変換の為替レートの決定理論への応用については，たとえば，Obstfeld and Rogoff (1984, Appendix) 参照。また演算子法と Laplace 変換との関係については，布川 (1987, pp. 17−18) 参照。

いう。Laplace 変換の基本的性質として，次の３つが重要である。

① $L(\cdot)$は線型である。すなわち，$L(af(t))+bg(t))=aL(f(t))+bL(g(t))$，② $L(\dot{f}(t))=lL(f(t))-f_0$，③ $L(f(t))L(g(t))=L\left(\int_0^t f(s)g(t-s)ds\right)$(11)

性質②からわかるように，微分方程式の解は，$f(t)$の初期値$f(0)$によって表現される。これがLapace 変換の優位な点である。

以上の性質を念頭におきながら，(13)式の両辺の Laplace 変換を求めると，性質①より，

$$L(\dot{\pi})=-\lambda L(\pi)+\lambda L(g_{mt}) \tag{21}$$

となるが，Laplace 変換の性質②を考慮すると，

$$L(\pi)=\frac{1}{l+\lambda}\pi_0+\frac{\lambda}{l+\lambda}L(g_{mt}) \tag{22}$$

になる。ここで $l+\lambda>0$ と仮定すると，$L(e^{-\lambda t})=\frac{1}{l+\lambda}$ であることに注意すると，(22)式は，性質③と性質①を用いると，

$$\begin{aligned} L(\pi)&=\pi_0 L(e^{-\lambda t})+\lambda L(e^{-\lambda t})L(g_{mt})=\pi_0 L(e^{-\lambda t})+\lambda L\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds\right)\\ &=L\left[\pi_0 e^{-\lambda t}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds\right] \end{aligned} \tag{23}$$

となる。よって，(23)式の原像は，

$$\pi=\pi_0 e^{-\lambda t}+\lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds \tag{24}$$

である。さらに，$\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds=\int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds-\int_t^\infty e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds$，より(24)式を書きかえると，

$$\pi=\left[\pi_0+\lambda\int_0^\infty e^{\lambda s}g_{ms}ds\right]e^{-\lambda t}-\lambda\int_t^\infty e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds \tag{25}$$

---

(11)　とくに，性質③については，次の通りである。

$h(t)=(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds=\int_0^t f(t-s)g(s)ds$とおく。ここで$x=t-s$，$y=s$とおくと，$t=x+y$，$s=y$となるので，

$$L(h(t))=\int_0^\infty e^{-lt}h(t)dt=\int_0^\infty e^{-lt}\left(\int_0^t f(s)g(t-s)ds\right)dt=\iint_{0\le s\le t<\infty} e^{-lt}f(s)g(t-s)dsdt$$

$$=\iint_{0\le x,\ y<\infty} e^{-lx}e^{-ly}f(y)g(x)dxdy=\left(\int_0^\infty e^{-ly}f(y)dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-lx}g(x)dx\right)=L(f(t))L(g(t))$$

となる。証明については，Sokolnikoff and Redheffer (1966, pp. 224-225)，布川 (1987, pp. 22-23)，梶原 (1988, pp. 176-177) 参照。

となる。ここで，発散的バブル項 (explosive bubble term) $e^{-\lambda t}$の係数をゼロと仮定すると，$\pi_0+\lambda\int_0^\infty e^{\lambda s}g_{ms}ds=0$ より，π の初期値が次式のように与えられる。

(26)　$$\pi_0=-\lambda\int_0^\infty e^{\lambda s}g_{ms}ds$$

よって，(13)式の解は，

(27)　$$\pi=-\lambda\int_t^\infty e^{-\lambda(t-s)}g_{ms}ds$$

となり演算子法で得られた解(17)式と同じである。この場合も貨幣供給の増加率が一定の場合には，$\pi=g_m$が成立する。

Ⅳ．む　す　び

このノートでは，生産量がその自然失業率に対応する水準に等しくインフレ率について完全予見を仮定する場合に成立する$\pi=g_m$という命題についての Blanchard の説明は，$\pi^e=0$を前提に求められていることを示し，それがπ^eが必ずしもゼロでない場合にも成立することを，Blanchard と同様に，総需要関係式を用いて説明した。また命題$\pi=g_m$を演算子法と Laplace 変換を用いて導出する解法を示した。[12]

引　用　文　献

Barro, R. J.(1984) *Macroeconomics* (John Wiley & Sons)（谷内　満訳（1987）『マクロ経済学』（多賀出版））

Barro, R. J.(1997) *Macroeconomics* (MIT Press)

Blanchard, O.(1997) *Macroeconomics* (Prentice Hall)（鴇田忠彦・知野哲郎・中山徳良・中泉真樹・渡辺慎一訳（1999）『マクロ経済学』（東洋経済新報社））

Blanchard, O.(2000) *Macroeconomics*, 2nd ed. (Prentice Hall)

Gabel R. A. and R. A. Roberts（1973）*Signals and Linear Systems*, 3rd ed. (John Wiley & Sons)

McCallum, B. T.(1989) *Monetary Economics－Theory and Policy－*(Macmillan)（書間文彦・金子邦彦訳（1997）『マクロ金融経済分析　期待とその影響』（成文堂））

---

(12)　Laplace 変換は，完全予見を仮定する場合には，便利なテクニックである。このノートでは取り扱わなかったが，Laplace 変換を用いた連立微分方程式の解法については，たとえば，布川（1987，第５章），Obstfeld and Rogoff (1984，Appendix) 参照。

Obstfeld, M. and K. Rogoff (1984) "Exchange Rate Dynamics with Sluggish Prices under Alternative Price-Adjustment Rules", *International Economic Review*, Vol. 25, No. 1 (February) pp. 159－174

Obstfeld, M. and K. Rogoff (1996) *Foundations of International Macroeconomics* (MIT Press)

Sargent, T. J. (1979) *Macroeconomic Theory* (Academic Press)

Sargent, T. J. and N. Wallace (1973) "The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight", *Econometrica*, Vol. 41, No. 6 (November) pp. 1043－1048

Sokolnikoff, I. S. and R. M. Redheffer (1966) *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2 nd ed. (McGraw-Hill)

布川 昊 (1987)『ラプラス変換と常微分方程式』(昭晃堂)

梶原壌二 (1988)『新修応用解析学』(現代数学社)