香 川 大 学 経 済 論 叢
第77巻 第4号 2005年3月 235−250

研究ノート

ロッテルダムモデルの定数項部分に関する一考察

横山佳充

1 はじめに

本稿では線形支出体系のモデル推定で使用されるロッテルダムモデルについて検証を行う。具体的にはロッテルダムモデルを行列表記し、推定を行い、パラメータの妥当性について検証を行う。

ロッテルダムモデルは Theil(1965,1971,1974) と Barten(1967,1969) によって研究されたモデルであり、費目別の消費について推定を行う際に多く用いられる。同様の目的で用いられるモデルとしては Deaton(1974) をはじめとする AIDS などが存在する。[1]ロッテルダムモデルは経済理論的な側面を有したモデルであり、その推定に関して、同時にすべての費目を推定しようとする場合、予算制約の関係があるために問題が生じる。これを含めて本稿ではロッテルダムモデルの推定について理論的な考察を加えた後、経済理論においては本来必要ない定数項部分に関しての考察を行う。Barten(1969) 等の説明によるとこの定数項部分の変化は趣向の変化を示すが、この部分が有意に作用しているか否かの検証を行う。ロッテルダムモデルを用いた日本の消費の分析の中で特に定数項部分に関する部分に詳細に検討を加えているのは、主要なものとして Suruga(1980)、橋本 (1986)、Maki(1992) 等が挙げられる。その中では Suruga(1980) においては定数項部分が不要であるとしているものの、橋本 (1986) や Maki(1992) をはじめ欧米の分析例を参照してみる限り定数項部分は有意な働きを示している。本稿においても推定を行い、定数項部分についての分析を行う。

本稿の構成は以下のとおり、2節において推定の枠組みを設定し、理論的な考察を行う。この部分の多くは Barten(1969) および Theil(1974) によっているが、これらにおいて省略された部分を補う形で記述している。3節においては実際のデータを用い推定結果から尤度を求め、定数項部分の有意性について議論している。この結果を受けてダミー変数を導入し、時間的な変化の可能性について考察している。最後に4節において結果の要約を示す。

2 推定方法

2.1 ロッテルダムモデルの理論的構成

ロッテルダムモデルは Theil と Barten によって研究されたモデルであり、消費者需要モデルの検証において広く利用されている。はじめに対数需要関数を仮定する。n 財が存在するモデルを考えると、

$$D_{wi,t} = \beta_i + \beta_{i0} D_{x,t} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} D_{pj,t} + \epsilon_{i,t} \tag{1}$$

[1]ロッテルダムモデルを含む線形支出体系の需要分析の歴史および発展については、Deaton(1986)、牧 (1997)、佐伯 (2002) を参照されたい。

ここで、

$$D_{wi,t} = w^*_{i,t} d\log q_{it}, \quad D_{x,t} = (d\log x_t - \sum_{j=1}^{n} w^*_{j,t} d\log p_{j,t}), \quad D_{pj,t} = d\log p_{j,t} \tag{2}$$

であり、

$$w^*_i = \frac{w_{i,t} + w_{i,t-1}}{2} \tag{3}$$

である。d で示しているものは時間の差分をとることを示している。t の添え字は t 期であることを意味し、変数の他の部分に関しては、$q_{i,t}$: 第 i 財の需要量、$p_{i,t}$: 第 i 財の価格、z_t : 総支出額であり、予算制約より $z_t = \sum_{i=1}^{n} p_{i,t} q_{i,t}$ が成り立つ。$w_{i,t} = \frac{p_{i,t} q_{i,t}}{z_t}$ は消費額のウェイトである。これらにおいて w^*_i は2期間におけるウェイトの平均を用いて表す。

β_i は定数項に関する部分でトレンド的な趨向の推移を示すが、他のパラメータに関する部分は若干解釈が難解である。ここで、e_i : 第 i 財の支出弾力性、e^*_{ij} : 第 i 財の第 j 財に対する補償された需要曲線の交差価格弾力性、w_i を期間における第 i 財の支出に占める割合を示すウェイトとすると、

$$\beta_{i0} = e_i w_i, \quad \beta_{ij} = w_i e^*_{ij} \tag{4}$$

と表現できる。したがって、β_{i0} は支出弾力性に関わる係数、β_{ij} は補償された需要曲線の価格弾力性に関する係数を示す。$\epsilon_{i,t}$ は誤差項であり、単一方程式においては $N(0, \sigma_i^2)$ と仮定される。

このモデルは以下の制約を満足せねばならない。

総和条件：

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{i0} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} = 0 \tag{5}$$

n 本のモデル間に予算制約を満たし、線形関係が成り立っているため必然的に成立するもので、モデルを推定することによってその妥当性を検証できない。

同次性条件：

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} = 0 \tag{6}$$

モデルが各財の価格、総支出額によってゼロ次同次になるため。

対称性条件：

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \tag{7}$$

各財間の財 i に対する財 j の交差価格弾力性と財 j に対する財 i の交差価格弾力性が等しくなる。

2.2　推定のための行列表記

はじめに式(1)から式(4)の表記に基づいて、第 i 財の観測値 T 個についてモデルを表すために、次のベクトルを定義する。

$$\boldsymbol{y}_i = (D_{wi,1}, D_{wi,2}, \ldots, D_{wi,T})' \tag{8}$$

$$\boldsymbol{x}_0 = (D_{x,1}, D_{x,2}, \ldots, D_{x,T})', \quad \boldsymbol{x}_i = (D_{pi,1}, D_{pi,2}, \ldots, D_{pi,T})' \ (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\iota}_T = (1, 1, \ldots, 1)' \tag{10}$$

ここで、プライムの記号は転置を示し、$\boldsymbol{y}_i$、$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{x}_i, (i=1,\ldots,n)$ は $T\times 1$ の列ベクトルであり、$\boldsymbol{\iota}_T$ は T 個の要素がすべて 1 である $T\times 1$ の列ベクトルである。n は費目の数を表す。これらを用いて行列 $\boldsymbol{X}$ を

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\iota}_T, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \tag{11}$$

と設定する。これにより $\boldsymbol{X}$ は $T\times(n+2)$ の行列として表記される。

同様に推定するパラメータおよび誤差項に関しても、

$$\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_i, \beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in})', \quad \boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \ldots, \epsilon_{iT})' \tag{12}$$

として、$\boldsymbol{\beta}_i$ は $(n+2)\times 1$、$\boldsymbol{\epsilon}_i$ は $T\times 1$ のベクトルである。$\boldsymbol{\beta}_i$ に関して、第 1 行に関しては定数項に関する部分、第 2 行は支出弾力性に関する部分に対応し、以下第 3 行以降 n 個の要素については価格弾力性に関する部分を表す。

式 (8) から式 (12) の表現を用いると、第 n 財に関する単一方程式に関して、

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i \tag{13}$$

と表すことができる。さらに、n 財のモデル体系を同時に示すために、

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_n) \tag{16}$$

と定義することで、全体のモデル体系は、

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} \tag{17}$$

と表記することができる。ただし、$\boldsymbol{Y}$ は $T\times n$、$\boldsymbol{X}$ は同様に $T\times(n+2)$、$\boldsymbol{B}$ は $(n+2)\times n$、$\boldsymbol{E}$ は $T\times n$ の行列である。これを、行列のスタック演算子 vec を用いて表記すると、

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}) + \mathrm{vec}(\boldsymbol{E}) \tag{18}$$

となり、さらに $\boldsymbol{y} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{Y})$、$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{B})$、$\boldsymbol{\epsilon} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{E})$ とし、クロネッカー積の関係を用いて表記すると、

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{19}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{I}_n$ は $n\times n$ の単位行列である。ここでは、同じ期における分散に関してはゼロでないと仮定し、異なった期における分散はゼロであると仮定する。すなわち、

$$\mathrm{V}(\epsilon_{i,s}\epsilon_{j,t}) = \begin{cases} \sigma_{ij} & s=t \text{ のとき} \\ 0 & s\neq t \text{ のとき} \end{cases} \tag{20}$$

これを要素とする分散共分散行列を、$\boldsymbol{\Sigma}$ であらわし、上記のモデルにおいて $\boldsymbol{\epsilon}$ がこの仮定を満たす正規分布に従うとすると、

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_T) \tag{21}$$

と表記できる。

2.3　推定上の問題点と尤度関数の設定

推定においては総和条件が成り立つため、同時に n 本の需要体系を推定できないという問題が生じる。$\boldsymbol{\iota}_n$ を各要素に 1 を持つ $n \times 1$ のベクトルとして、総和条件により、$\boldsymbol{E}\boldsymbol{\iota}_n = \boldsymbol{0}_T$ が成り立つため、$\mathrm{vec}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{\iota}_n) = (\boldsymbol{\iota}_n' \otimes \boldsymbol{I}_T)\mathrm{vec}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}_T$ であり、

$$(\boldsymbol{\iota}_n' \otimes \boldsymbol{I}_T)\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}') = (\boldsymbol{\iota}_n' \otimes \boldsymbol{I}_T)(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_T) = \boldsymbol{\iota}_n'\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_T = (\boldsymbol{\iota}_n'\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_T) = \boldsymbol{0}_{T \times nT} \tag{22}$$

以上より、$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\iota}_n = \boldsymbol{0}_n$ が成り立つため、$|\boldsymbol{\Sigma}| = 0$ となり、同様に、$|\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}| = 0$ であることから尤度は定義できない。したがって、以上のことより方程式体系から式を一本除外し尤度関数を定義する。この除外に関してはいずれの方程式でも良いが、便宜上 n 本目の方程式を除外するものとする。

ここで、n 本目の方程式を除外したモデル体系である

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^* + \boldsymbol{E}^* \tag{23}$$

を考える。式 (23) におけるアスタリスクを用いて表現した行列は、n 本目に相当する部分をモデルから除去したもので、具体的には $\boldsymbol{Y}^*$ は $T \times (n-1)$、$\boldsymbol{B}^*$ は $(n+2) \times (n-1)$、 $\boldsymbol{E}^*$ は $T \times (n-1)$ の行列である。ここで、誤差項に関しては

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \mathrm{vec}(\boldsymbol{E}^*) \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}^* \otimes \boldsymbol{I}_T) \tag{24}$$

と仮定される。ただし、$\boldsymbol{\Sigma}^*$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ から最後の一行と、最後の一列を除いた $(n-1) \times (n-1)$ 行列である。これを用いると、対数尤度は

$$l(\boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*) = -\frac{T(n-1)}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|\boldsymbol{\Sigma}^*| - \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^{*\prime}(\boldsymbol{\Sigma}^* \otimes \boldsymbol{I}_T)^{-1}\boldsymbol{\epsilon}^* \tag{25}$$

と表現できる。

つぎに、$\boldsymbol{\Sigma}^*$ が $\boldsymbol{\Sigma}$ の部分行列であったことより、

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^* & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma}' & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{26}$$

と表すことができる。ここで、$\boldsymbol{\sigma}$ は $(n-1) \times 1$ のベクトルであり、σ_{nn} はスカラーである。このとき、すべての要素に 1 を持つ $n \times 1$ のベクトル $\boldsymbol{\iota}_n$ を用いて、$\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\iota}_n = \boldsymbol{0}_n$ であることより、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^* & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma}' & \sigma_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\iota}_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

であり、したがって

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^*\boldsymbol{\iota}_{n-1} \\ \boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\iota}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} \\ -\sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{28}$$

となる。またここで、

$$\boldsymbol{E}_{nn} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1,n-1} & -\boldsymbol{\iota}_{n-1} \\ -\boldsymbol{\iota}_{n-1}' & -1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

を定義すると、$|\boldsymbol{E}_{nn}| = -n$ であり、式 (28) を用いることで、

$$\boldsymbol{E}_{nn}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^* & \boldsymbol{0}_{n-1} \\ \boldsymbol{0}_{n-1}' & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\boldsymbol{E}_{nn} = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' \tag{30}$$

が成り立つ。ただし、$\boldsymbol{i} = \frac{1}{\sqrt{n}}\iota$ の $n \times 1$ ベクトルである。式 (30) の関係より

$$|\, \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' \,| = n \,|\, \boldsymbol{\Sigma}^* \,| \tag{31}$$

であり、同様に式 (30) より、変形を行った後、クロネッカー積を行うと、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^* & \boldsymbol{0}_{n-1} \\ \boldsymbol{0}'_{n-1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T = (\boldsymbol{E}_{nn}(\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}')^{-1}\boldsymbol{E}_{nn}) \otimes \boldsymbol{I}_T \tag{32}$$

の関係が導かれる。

新たに、$\boldsymbol{E}^{**} = (\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{0}_T)$ に対応した $\boldsymbol{\epsilon}^{**} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{E}^{**})$ を考え、これを用い、式 (32) の左から $\boldsymbol{\epsilon}^{**\prime}$ を右から $\boldsymbol{\epsilon}^{**}$ をかけると、

$$\boldsymbol{\epsilon}^{*\prime}(\boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)\boldsymbol{\epsilon}^* = \boldsymbol{\epsilon}'((\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}')^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)\boldsymbol{\epsilon} \tag{33}$$

が導かれる。

式 (31) と式 (33) を式 (25) に代入することで、

$$l(\beta^*, \boldsymbol{\Sigma}^*) = -\frac{T(n-1)}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|\, \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' \,| - \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}'((\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}')^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)\boldsymbol{\epsilon} \tag{34}$$

と表記することができ、任意の式を削除し推定しても尤度関数式 (34) の形状に影響を与えない。

ここで、推定を行うために、尤度関数を変形する。はじめに、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}^{*\prime}(\boldsymbol{\Sigma}^* \otimes \boldsymbol{I}_T)^{-1}\boldsymbol{\epsilon}^* &= (\boldsymbol{\epsilon}'_1\boldsymbol{\epsilon}'_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}'_{n-1})(\boldsymbol{\Sigma}^* \otimes \boldsymbol{I}_T)^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ \boldsymbol{\epsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (\mathrm{vec}(\boldsymbol{\epsilon}^*))'(\boldsymbol{\Sigma}^* \otimes \boldsymbol{I}_T)^{-1}\mathrm{vec}(\boldsymbol{\epsilon}^*) \\
&= (\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_{n-1}))'(\boldsymbol{I}_{n-1} \otimes \boldsymbol{E}^*)'(\boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)(\boldsymbol{I}_{n-1} \otimes \boldsymbol{E}^*)\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_{n-1}) \\
&= (\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_{n-1}))'(\boldsymbol{I}_{n-1} \otimes \boldsymbol{E}^{*\prime})(\boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \otimes \boldsymbol{I}_T)(\boldsymbol{I}_{n-1} \otimes \boldsymbol{E}^*)\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_{n-1}) \\
&= (\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_{n-1}))'(\boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \otimes \boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^*)\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_{n-1}) \\
&= (\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_{n-1}))'\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}\boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^*) \\
&= \mathrm{tr}(\boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{\Sigma}^{*-1})
\end{aligned} \tag{35}$$

式 (35) を用いることによって、対数尤度は、

$$\begin{aligned}
l(\beta^*, \boldsymbol{\Sigma}^*) &= -\frac{T(n-1)}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\, \boldsymbol{\Sigma}^* \otimes \boldsymbol{I}_T \,| - \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^{*\prime}(\boldsymbol{\Sigma}^* \otimes \boldsymbol{I}_T)^{-1}\boldsymbol{\epsilon}^* \\
&= -\frac{T(n-1)}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log|\, \boldsymbol{\Sigma}^* \,| - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{\Sigma}^{*-1})
\end{aligned} \tag{36}$$

と表現できる。ここで、

$$\frac{\partial \log|\, \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \,|}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{*-1}} = \boldsymbol{\Sigma}^*, \quad \frac{\partial \mathrm{tr}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{*-1}} = \boldsymbol{S} \tag{37}$$

の関係を用い、Σ に関して偏微分する。

$$\frac{\partial l(\beta^*, \boldsymbol{\Sigma}^*)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}^{*-1}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^* - \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^*}{T} \tag{38}$$

したがって、これを $\mathbf{0}$ と置き解くと、求める推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^* = \frac{\boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^*}{T} \tag{39}$$

となる。

分散共分散行列の推定量 $\boldsymbol{\Sigma}^*$ は

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^* = \frac{1}{T}\boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^* = \frac{1}{T}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1'\boldsymbol{\epsilon}_1 & \boldsymbol{\epsilon}_1'\boldsymbol{\epsilon}_2 & \cdots & \boldsymbol{\epsilon}_1'\boldsymbol{\epsilon}_{n-1} \\ \boldsymbol{\epsilon}_2'\boldsymbol{\epsilon}_1 & \boldsymbol{\epsilon}_2'\boldsymbol{\epsilon}_2 & \cdots & \boldsymbol{\epsilon}_2'\boldsymbol{\epsilon}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\epsilon}_{n-1}'\boldsymbol{\epsilon}_1 & \boldsymbol{\epsilon}_{n-1}'\boldsymbol{\epsilon}_2 & \cdots & \boldsymbol{\epsilon}_{n-1}'\boldsymbol{\epsilon}_{n-1} \end{pmatrix} \tag{40}$$

と表される。

式 (39) の推定量を用いて式 (36) に代入することで、

$$l(\boldsymbol{\beta}^*) = l(\boldsymbol{\beta}^*, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*) = -\frac{T(n-1)}{2}(\log(2\pi)+1) - \frac{T}{2}\log|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*| \tag{41}$$

を得るが、これは $\boldsymbol{\beta}^*$ のみの関数である。

つぎに、$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{\epsilon}_n)$ であることより、$\boldsymbol{E}\boldsymbol{\iota}_n = \mathbf{0}_n$ であることを考慮すると、

$$\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{\iota}_{n-1} = -\boldsymbol{\epsilon}_n \tag{42}$$

この関係を用いて

$$\boldsymbol{E}_{nn}\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{E}^{*\prime}\boldsymbol{E}^*}{T} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{0}_{n-1}' & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\boldsymbol{E}_{nn} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' \equiv \boldsymbol{A} \tag{43}$$

が成り立つ。ただし、$\boldsymbol{i} = \frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\iota}$ の $n \times 1$ ベクトルである。式 (43) を $\boldsymbol{A}$ と定義する。すると、

$$|\boldsymbol{A}| = n|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^*| \tag{44}$$

であるので、式 (41) に代入すると、

$$l(\boldsymbol{\beta}^*) = -\frac{T(n-1)}{2}(\log(2\pi)+1) + \frac{T}{2}\log n - \frac{T}{2}\log|\boldsymbol{A}| \tag{45}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{1}{T}(\boldsymbol{E}'\boldsymbol{E}) \\ &= \frac{1}{T}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}) \\ &= \frac{1}{T}(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{B}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}) \end{aligned} \tag{46}$$

である。

2.4　制約条件のない場合の推定について

推定に関しては最尤法を用いる。具体的には式 (45) を最大化することで、$\boldsymbol{\beta}$ または $\boldsymbol{B}$ に関する推定を行う。

式 (45) を偏微分することで、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= -\frac{T}{2}\frac{\partial l(\log \mid \boldsymbol{A} \mid)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \\
&= -\frac{T}{2}\left(\boldsymbol{I}_{n-2} \otimes \frac{\partial l(\log \mid \boldsymbol{A} \mid)}{\partial \boldsymbol{B}}\right)\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) \\
&= (\boldsymbol{I}_{n-2} \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1})\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) \\
&= \mathrm{vec}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}) \\
&= (\boldsymbol{A}^{-1} \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}))\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) \qquad (47)
\end{aligned}
$$

したがって、$\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}$ と置くことで、$\boldsymbol{B}$ の推定量を $\hat{\boldsymbol{B}}_1$ と表記すると、

$$(\boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{I})\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{B}}_1) = \boldsymbol{0} \qquad (48)$$

であり、

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{B}}_1 = \boldsymbol{0} \qquad (49)$$

より、$\boldsymbol{B}$ の推定量

$$\hat{\boldsymbol{B}}_1 = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \qquad (50)$$

を得ることができる。式 (17) を用いて、

$$\hat{\boldsymbol{B}}_1 = \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{E} \qquad (51)$$

とも表すことができる。以上から、$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \mathrm{vec}(\hat{\boldsymbol{B}}_1)$ に関して、

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{vec}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{I}_n \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{vec}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{I}_n \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\epsilon} \qquad (52)$$

であり、したがって、$\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) = \boldsymbol{\beta}$ であり、さらに分散共分散行列に関しては

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) &= (\boldsymbol{I}_n \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\mathrm{E}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}')(\boldsymbol{I}_n \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')' \\
&= (\boldsymbol{I}_n \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_T)(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) \\
&= \boldsymbol{\Sigma} \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \qquad (53)
\end{aligned}
$$

である。

2.5　同次性を課した場合の推定について

同次性の条件を課した場合には式 (6) を満たさなければならず、$(n+2)\times 1$ ベクトル $\boldsymbol{r} = (0, 0, \boldsymbol{\iota}_n')'$ を用いて制約を表現すると、

$$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}_n \qquad (54)$$

となる。そこで、ラグランジェ乗数で構成される $n \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて、最大化すべき目的関数

$$l^*(\boldsymbol{\beta}) = l(\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda} \qquad (55)$$

を定義し、微分して $\mathbf{0}$ とおく。はじめに式 (55) を $\boldsymbol{\beta}$ によって偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial l^*(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \left(\boldsymbol{I}_{n+2} \otimes \frac{\partial(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{B}}\right)\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) \\ &= (\boldsymbol{I}_{n+2} \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1})\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) + (\boldsymbol{I}_{n+2} \otimes \boldsymbol{r}\boldsymbol{\lambda}')\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) \\ &= \mathrm{vec}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}) + \mathrm{vec}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\lambda}') \end{aligned} \tag{56}$$

が得られる。さらに、これを $\mathbf{0}_{n^2}$ とすると、同次性の制約を課した場合の $\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{B}$ の推定量を $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ と $\hat{\boldsymbol{B}}_2$ として、

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{\lambda}' = -(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{B}}_2)\boldsymbol{A}^{-1} \tag{57}$$

左から、$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$、右から $\hat{\boldsymbol{A}}$ をかけることで、

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{r}\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \hat{\boldsymbol{B}}_2 \tag{58}$$

となり、さらに、$\boldsymbol{r}'$ を左からかけることによって、

$$\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{r}\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{r}'\hat{\boldsymbol{B}}_2 \tag{59}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{r}$ はスカラーであるため、$\delta = 1/(\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{r})$ と置き、式 (54) の関係を用いると、

$$\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{A} = -\delta\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{60}$$

の関係が導かれる。式 (60) を式 (58) に代入することで、

$$\hat{\boldsymbol{B}}_2 = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \delta\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{61}$$

したがって、推定量は

$$\hat{\boldsymbol{B}}_2 = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{I} - \delta(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}')\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{62}$$

とすることができる。また、

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) = (\boldsymbol{I} - \delta(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{63}$$

と定義することで、

$$\hat{\boldsymbol{B}}_2 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{64}$$

式 (17) を用いると、

$$\hat{\boldsymbol{B}}_2 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{E} \tag{65}$$

となる。式 (64) をベクトル表示で書くと

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{\epsilon} \tag{66}$$

となり、分散共分散行列は

$$\mathrm{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2) = (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{M}) = (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{M}) \tag{67}$$

となる。ただしここで、$\boldsymbol{r}'\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$ の関係より導かれる $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}$ を用いている。

2.6 対称性を課した場合の推定について

対称性の条件を課した場合には式 (7) を満たさなければならず、これを表現するために、はじめに行列 $\boldsymbol{F}$ を考慮し、$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{I}_n)$ の $n \times (n+2)$ とする。ただし、$\boldsymbol{0}_n$ は $n \times 1$ の行列、$\boldsymbol{I}_n$ は $n \times n$ の単位行列である。この行列を用いてスタック演算子を用いて、$n^2 \times 1$ のベクトル $\mathrm{vec}(\boldsymbol{FB})$ を考える。

次に、変換用行列 $\boldsymbol{P}_{ij}$ を定義する。$\boldsymbol{P}_{ij}$ は $n^2 \times n^2$ の行列であり、スタックベクトル $\mathrm{vec}(\boldsymbol{FB})$ の $n(j-1)+i$ 番目の要素を $n(i-1)+j$ 番目の要素に移し変えるために第 $(n(j-1)+i, n(i-1)+j)$ 要素に 1 を持ち、それ以外の要素に 0 を持つ行列である。行列により、変換後のベクトルは当初 $n(j-1)+i$ 番目の要素であったものが $n(i-1)+j$ 番目の要素として取り出すことができ、その他の要素は 0 となる。この変換を計 n^2 個の要素に関して変換を行い、スタックベクトル $\mathrm{vec}(\boldsymbol{FB})$ の各要素を変換するためには、新しい行列

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_{ij} \tag{68}$$

を定義し、制約条件は

$$\boldsymbol{P}\mathrm{vec}(\boldsymbol{FB}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{FB}) \tag{69}$$

すなわち、

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\mathrm{vec}(\boldsymbol{FB}) = \boldsymbol{0} \tag{70}$$

と表現できる。

これをパラメータに関してベクトル表示すると、

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{F})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0} \tag{71}$$

となる。

ここで、必要な制約を取り出すために、$(n-m) \times n$ の行列として、

$$\boldsymbol{R}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

を考える。$\boldsymbol{R}_m$ は第 $(i, i+1)$ 要素（ただし、$i = 1, \ldots, m-1$）に 1 を持ち、他の要素が 0 である行列である。

これを用いて、$n \times n$ のブロック部分を含む行列 $n(n-1)/2 \times n^2$ を考える。求める行列は第 m 番目の主対角ブロック行列部分に、$\boldsymbol{R}_m$ を持つブロック対角行列である。行列は次のように表される。

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots \boldsymbol{R}_{n-1}) \tag{73}$$

式 (71) に左から式 (73) をかけることで、制約式を取り出すことができる。すなわち、

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{F})\boldsymbol{\beta} = 0 \tag{74}$$

が成り立つ。この制約に関して、$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{F})$ とおいて、ラグランジェ乗数で構成される $n(n-1)/2 \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ を用いると、最大化すべき目的関数に関して、

$$l^{**}(\boldsymbol{\beta}) = l(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\lambda}'(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{r})'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\beta} = l(\boldsymbol{\beta})^* + \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\beta} \tag{75}$$

と定義することができる。式 (75) を β によって偏微分すると、式 (56) の関係より、

$$\frac{\partial l^{**}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{A}^{-1} \otimes (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}))\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) + (\boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\mu} \tag{76}$$

が得られる。さらに、$\frac{\partial l^{**}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$ とおき、左より $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M}$ をかけ、さらに、$\boldsymbol{M}\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$ および $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ （$\boldsymbol{r}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ より、$\boldsymbol{M}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{I} - \delta(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{B}$）の関係を用いて、対称性の制約を課した場合の β と $\boldsymbol{B}$ の推定量を $\hat{\boldsymbol{\beta}}_3$ と $\hat{\boldsymbol{B}}_3$ とすると、

$$(\boldsymbol{I} \otimes (\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{B}}_3)))\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}_n) + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \tag{77}$$

であり、したがって、

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_3 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2 + (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \tag{78}$$

を得るが、これより

$$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{Q}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_3) = (\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \tag{79}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{\beta}}_3 = \mathbf{0}$ を用いている。式 (79) を式 (78) に代入して、整理すると、

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_3 = (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{Q})\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 \tag{80}$$

となり、さらに、$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{Q})$ とおいて分散共分散行列を求めると、

$$\mathrm{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_3) \approx \boldsymbol{N}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{N}' \tag{81}$$

となる。関係が近似になっているのは $\boldsymbol{N}$ が $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ の関数になっているためである。

3　推定結果

3.1　定数項部分の有意性と推定結果

通常のロッテルダムモデルを定数項ありの場合となしの場合で推定し定数項部分が有意であるかどうかを検討する。用いたデータは 1970 年第 2 四半期から 1999 年第 1 四半期までのデータである。[2]消費額については『国民経済計算』の結果得られた名目データを消費者物価指数でデフレートし実質額に直している。[3]同様に各費目の支出については 8 項目に分割しており、各費目の消費額を対応する消費者物価指数でデフレートし実質化を行っている。費目の番号と名前の対応は 1:食品・飲料・煙草、2:衣服・はきもの、3:家賃・水道・光熱、4:家具・家庭器具・家計雑費、5:医療・保健、6:交通・通信、7:レクリエーション・娯楽・教育・文化サービス、8:その他である。したがって、推定するパラメータ数は定数項がない場合 72 個、定数項を含む場合全部で 80 個になる。モデルを定数項なしとありの場合にわけ推定し、その結果得られた尤度について検討する。

定数項なしの場合について推定を行うには、式 (11) において定義した行列 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{\iota}_n$ 部分を除き、

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \tag{82}$$

[2]本稿では旧の国民経済計算体系である SNA68 に基づいたデータを用いている。旧規格を用いた場合、SNA93 へ移行したのに伴い、最近時点での結果を得ることは困難である。また新規格に従った場合、過去長期にわたる遡及計算は提供されていない。

[3]デフレータの基準年は 1995 年である。

とすることで $T\times(n+1)$ の行列を再定義し、同様に推定するパラメータに関しても、β_i を除いて再定義し、

$$\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2} \ldots, \beta_{in})', \tag{83}$$

として同様の議論のもと推定を行う。制約条件のない場合に関しては同様の推定方法によって処理が可能になるが、同次性の仮定を含む場合については $(n+1)\times 1$ ベクトル $\boldsymbol{r}=(0,\boldsymbol{\iota}_n')'$ を用いて制約を式 (54) のように定義し推定を行う。さらに対称性を課した場合については、$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{I}_n)$ の $n\times(n+1)$ 行列を定義し、同様な議論のもとでパラメータを推定することが可能である。その結果得られた対数尤度を表 1 に示す。[4]表に関して自由度すなわち制約条件の差は 7 であるので、いずれのモデルにおいても定数項が 1%の水準で有意を示し、最終的に定数項を無視することはできないと結論付けられる。

表 1: 定数項の有無に関する検定

帰無仮説	定数項あり	定数項なし	尤度比検定	結論
制約なし	3909.44	3867.058	84.76	有意水準 1%で棄却
同次性	3898.178	3823.208	149.94	有意水準 1%で棄却
同次性かつ対称性	3887.452	3810.121	154.66	有意水準 1%で棄却

定数項部分が無視できないことを受けて、定数項部分を含んだ推定結果は制約のない場合、同次性の条件を課した場合、対称性の条件を課した場合についてそれぞれ表 2、表 3 および表 4 に示している。表においては上段に各パラメータの推定値、下段に各推定値に対応する標準誤差を示している。

表 2: 制約なし

Param/i	1	2	3	4	5	6	7	8
β_i	-0.00104	-0.00071	0.00155	-0.00035	0.00018	0.00006	0.00036	-0.00006
s.e.	0.00036	0.00030	0.00016	0.00032	0.00041	0.00037	0.00044	0.00075
β_{i0}	0.17912	0.11218	0.02548	0.14794	0.04247	0.11811	0.14835	0.22637
s.e.	0.02027	0.01720	0.00925	0.01798	0.02324	0.02087	0.02519	0.04283
β_{i1}	-0.05696	0.03253	0.03831	0.03200	0.00515	0.01439	-0.00804	-0.05738
s.e.	0.02679	0.02273	0.01222	0.02376	0.03071	0.02758	0.03329	0.05660
β_{i2}	0.00145	-0.04910	0.00741	-0.03313	0.01713	0.01131	-0.01357	0.05850
s.e.	0.02135	0.01812	0.00974	0.01893	0.02447	0.02198	0.02653	0.04511
β_{i3}	0.07355	0.03068	0.03143	-0.01365	0.01161	-0.03845	-0.10225	0.00708
s.e.	0.03746	0.03179	0.01709	0.03322	0.04294	0.03858	0.04656	0.07915
β_{i4}	0.01903	0.00097	-0.00426	-0.00659	-0.03204	-0.00294	-0.02925	0.05508
s.e.	0.01892	0.01606	0.00863	0.01678	0.02169	0.01948	0.02352	0.03998
β_{i5}	-0.00277	-0.00099	-0.00335	-0.00135	-0.04801	0.01075	0.03062	0.01510
s.e.	0.01162	0.00986	0.00530	0.01030	0.01332	0.01196	0.01444	0.02455
β_{i6}	0.00664	0.00169	-0.00505	0.00719	0.03911	-0.06551	-0.01137	0.02730
s.e.	0.01965	0.01668	0.00897	0.01743	0.02253	0.02024	0.02443	0.04152
β_{i7}	0.03186	0.00648	0.00244	-0.02369	0.01000	-0.00236	-0.07864	0.05390
s.e.	0.01490	0.01265	0.00680	0.01322	0.01708	0.01535	0.01852	0.03149
β_{i8}	-0.02707	-0.00941	-0.02713	-0.00781	0.03007	0.06912	0.14925	-0.17702
s.e.	0.02318	0.01967	0.01058	0.02056	0.02657	0.02387	0.02881	0.04897

*上段は推定値、下段はその標準誤差を表す。

[4]帰無仮説のもとでのパラメータスペースを Ω、ダミー変数を用いないモデルのパラメータスペースを Ω_S としその尤度比を求め、$-2\log(\Omega/\Omega_S)$ が χ^2 分布に従うことで検定した。その際、自由度は制約条件の個数、言い換えると推定するパラメータ数になる。後の尤度比検定についても同様である。ここで推定するパラメータの差は 8 であるが、定数項部分の和は 0 になるという制約を含み結果的に自由度 7 となる。

表 3: 同次性

Param/i	1	2	3	4	5	6	7	8
β_i	-0.00059	-0.00059	0.00194	-0.00081	0.00051	0.00003	-0.00026	-0.00023
s.e.	0.00026	0.00022	0.00012	0.00023	0.00029	0.00026	0.00032	0.00054
β_{i0}	0.18495	0.11381	0.03056	0.14194	0.04668	0.11764	0.14028	0.22414
s.e.	0.02029	0.01700	0.00958	0.01807	0.02306	0.02060	0.02529	0.04229
β_{i1}	-0.05966	0.03177	0.03596	0.03478	0.00320	0.01461	-0.00431	-0.05635
s.e.	0.02712	0.02273	0.01281	0.02416	0.03083	0.02754	0.03381	0.05653
β_{i2}	-0.00801	-0.05176	-0.00082	-0.02341	0.01030	0.01207	-0.00049	0.06211
s.e.	0.02097	0.01758	0.00991	0.01869	0.02384	0.02130	0.02615	0.04373
β_{i3}	0.02449	0.01689	-0.01127	0.03680	-0.02381	-0.03450	-0.03440	0.02579
s.e.	0.02595	0.02175	0.01226	0.02312	0.02950	0.02636	0.03235	0.05410
β_{i4}	0.02375	0.00230	-0.00015	-0.01145	-0.02863	-0.00332	-0.03577	0.05328
s.e.	0.01900	0.01592	0.00897	0.01693	0.02160	0.01930	0.02369	0.03961
β_{i5}	-0.00812	-0.00249	-0.00800	0.00415	-0.05188	0.01119	0.03801	0.01714
s.e.	0.01139	0.00954	0.00538	0.01014	0.01294	0.01156	0.01420	0.02374
β_{i6}	0.01897	0.00515	0.00568	-0.00548	0.04801	-0.06650	-0.02842	0.02260
s.e.	0.01867	0.01565	0.00882	0.01663	0.02122	0.01896	0.02327	0.03892
β_{i7}	0.03221	0.00658	0.00274	-0.02405	0.01025	-0.00239	-0.07912	0.05377
s.e.	0.01511	0.01266	0.00714	0.01346	0.01718	0.01535	0.01884	0.03150
β_{i8}	-0.02364	-0.00844	-0.02414	-0.01134	0.03255	0.06884	0.14450	-0.17833
s.e.	0.02342	0.01963	0.01106	0.02087	0.02663	0.02379	0.02920	0.04883

*上段は推定値、下段はその標準誤差を表す。

表 4: 同次性&対称性

Param/i	1	2	3	4	5	6	7	8
β_i	-0.00057	-0.00062	0.00194	-0.00087	0.00057	0.00006	-0.00014	-0.00037
s.e.	0.00025	0.00021	0.00012	0.00023	0.00029	0.00026	0.00032	0.00053
β_{i0}	0.18068	0.10841	0.03077	0.14079	0.05616	0.11426	0.13852	0.23042
s.e.	0.01909	0.01585	0.00933	0.01667	0.02013	0.01855	0.02235	0.03723
β_{i1}	-0.06180	0.01113	0.03109	0.02320	-0.00752	0.01417	0.02089	-0.03116
s.e.	0.02616	0.01435	0.01104	0.01383	0.00992	0.01491	0.01314	0.02218
β_{i2}	0.01113	-0.03912	-0.00017	-0.00410	0.00005	0.01061	0.00330	0.01830
s.e.	0.01435	0.01527	0.00845	0.01075	0.00798	0.01153	0.01041	0.01663
β_{i3}	0.03109	-0.00017	-0.00681	0.00413	-0.00576	-0.00126	0.00054	-0.02176
s.e.	0.01104	0.00845	0.01132	0.00773	0.00515	0.00807	0.00703	0.01070
β_{i4}	0.02320	-0.00410	0.00413	-0.01966	0.00724	0.00037	-0.02638	0.01521
s.e.	0.01383	0.01075	0.00773	0.01381	0.00796	0.01105	0.01056	0.01656
β_{i5}	-0.00752	0.00005	-0.00576	0.00724	-0.05016	0.01543	0.02041	0.02031
s.e.	0.00992	0.00798	0.00515	0.00796	0.01098	0.00976	0.00968	0.01609
β_{i6}	0.01417	0.01061	-0.00126	0.00037	0.01543	-0.08017	-0.01754	0.05841
s.e.	0.01491	0.01153	0.00807	0.01105	0.00976	0.01785	0.01199	0.01885
β_{i7}	0.02089	0.00330	0.00054	-0.02638	0.02041	-0.01754	-0.08920	0.08798
s.e.	0.01314	0.01041	0.00703	0.01056	0.00968	0.01199	0.01722	0.01967
β_{i8}	-0.03116	0.01830	-0.02176	0.01521	0.02031	0.05841	0.08798	-0.14729
s.e.	0.02218	0.01663	0.01070	0.01656	0.01609	0.01885	0.01967	0.04204

*上段は推定値、下段はその標準誤差を表す。

3.2　ダミー変数による構造変化の検証

ここにおいてはダミー変数を用いて構造変化に関する可能性を探る。ダミー変数の用い方として $D_{k,t}$ ただし k はデータ番号に相当し 1970:3.1999:1 の期間を意味し、1 から T までの数字である。ダミー変数を設定する期間に応じて k を決定する必要があるが、$k > t$ の時 0 を、$k \geq t$ の時 1 を取る事にし、k を期間で変化させ、それに応じて対数尤度を計算することで構造変化が生じているかどうかを尤度比検定を用いることで検証した。具体的にはロッテルダムモデルの同次性かつ対称性の推定結果の対数尤度と、

$$D_{wi,t} = \beta_i + \beta_{id}D_{k,t} + \beta_{i0}D_{x,t} + \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}D_{pj,t} + \epsilon_{i,t} \tag{84}$$

によって推定されたモデルを比較することで分析を行う。なお、記号の表記に関しては β_{id} と $D_{k,t}$ がダミーに対応するパラメータおよび変数である以外は以前と同様である。

計算を行ううえで、第 i 財の観測値 T 個について、$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{\beta}$ を再設定する。はじめにダミー部分について、

$$\boldsymbol{x}_d = (D_{k,1}, D_{k,2}, \ldots, D_{k,T})' \tag{85}$$

を定義する。これは実際には前半部は要素に 0 を持ち、後半部は 1 を持つ $T \times 1$ のベクトルである。式 (11) において定義した行列 $\boldsymbol{X}$ の第 2 列目にダミー変数に対応するこのベクトルを挿入することで、

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{\iota}_n, \boldsymbol{x}_d, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \tag{86}$$

とし、$T \times (n+3)$ の行列を再定義した。同様に推定するパラメータに関しても

$$\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_i, \beta_{id}, \beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2} \ldots, \beta_{in})', \tag{87}$$

と定義する。ここで、$\boldsymbol{X}$ は $T \times (n+3)$、$\boldsymbol{\beta}_i$ は $(n+3) \times 1$ のベクトルまたは行列である。$\boldsymbol{\beta}_i$ に関して、第 2 行目にダミー変数に対応するパラメータ β_{id} を導入している。

これらを用いることで、第 n 財に関する単一方程式に関して同様に

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i \tag{88}$$

と表すことができる。

さらに、n 財のモデル体系を同時に示すためには、式 (14)、式 (15)、式 (16) と同様に行列を定義することで、全体のモデル体系は、式 (17) と同様に表すことができる。ただし、$\boldsymbol{B}$ を再定義した際、$(n+3) \times n$ の行列になる。これによって推定の際、制約条件のない場合に関しては同様の推定方法によって処理が可能になるが、同次性の仮定を含む場合については $(n+3) \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{r} = (0, 0, 0, \boldsymbol{\iota}_n')'$ を用いて制約を式 (54) のように定義し推定を行う。さらに対称性を課した場合については、$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{0}_n, \boldsymbol{I}_n)$ の $n \times (n+3)$ 行列と定義し、同様な議論のもとでパラメータを推定することができる。

このモデルを用いて、帰無仮説を $\beta_{id} = 0$ とし、ダミー変数を動かすことで尤度比を逐次求めている。この計算によってダミー変数を含んだモデルは常にダミー変数 8 個分多く変数を推定することになるので、尤度比検定は自由度 8 の χ^2 分布に従うことになる。[5]

---

[5]ダミー変数の存在しない定数項を含むモデルに関しては、定数項間に $\sum_{i=1}^{8}\beta_{id} = 0$ が成り立っているが、ダミー変数を仮定したモデルに関しては定数項部分とダミー変数部分に $\sum_{i=1}^{8}(\beta_i + \beta_{id}) = 0$ が成り立っていると想定される。

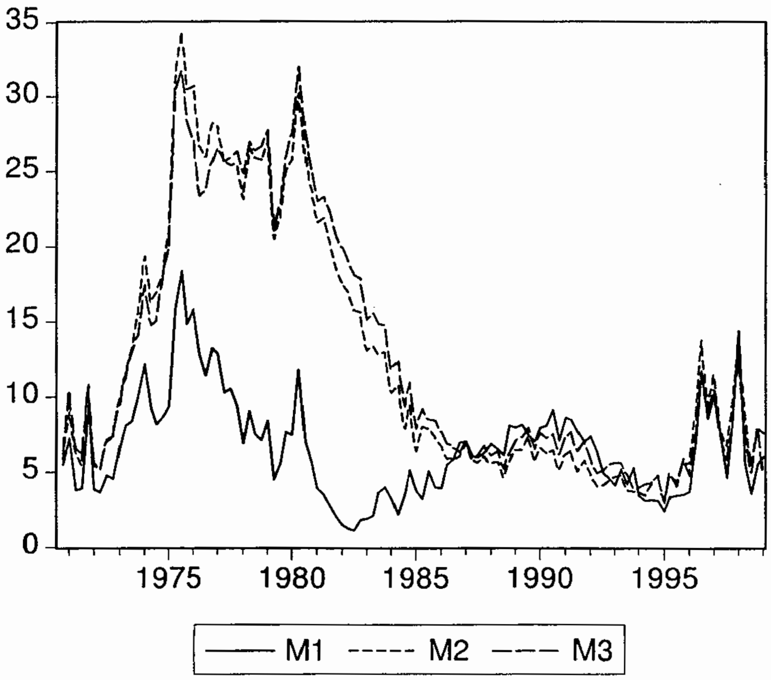
その結果を示すと、図1である。図は尤度比検定により得られた結果を「ダミー変数が影響を与えていない」という帰無仮説をχ^2検定したものを与えている。M1、M2、M3はそれぞれ制約のないモデル、同次性を課したモデル、同時性と対称性を課したモデルについての比較である。

自由度8の5%有意水準の臨界値は15.5であるので、M2、M3に関しては1974年から1983年にかけての期間が5%有意水準を超えており、また、自由度8の1%有意水準の臨界値は20.1であり、1975年から1982年までの期間が1%有意水準を超えている。またM1のモデルは他のモデルに比べてダミー変数が有意に働いているという印象は少ないが、それでも1974年前後で5%の有意水準で帰無仮説は棄却されるという計算結果を示し、結論としてM1のモデルであっても5%水準でダミー変数が有意に働いている。全体としてはいずれのモデルも1970年の半ばにダミー変数が有意を示す傾向があり、消費モデルによるダミー変数の有意性、すなわち消費の趣向の変化はこの時期に起こったと考えられる。

また、M1のモデルに対して、M2やM3などより制約を加えたモデルについてはモデルは構造の変化を強く示しており、モデルを経済理論的により整合的に捕らえようとすると、趣向の変化が大きく影響することになると結論付けられる。特にこれに関しては同次性のモデルを考察する際に影響を与える。

最後に、期間においては75年前後から80年において構造変化が生じていると考えられ、分析期間を2期間に分けるのであれば、75年以前と80年以降は経済構造の定数項の部分が異なっている可能性がある。とくにM2やM3などより制約を加えたモデルで分析を行う場合にはこうした変化を無視することはできない。

図 1: ダミー変数による消費構造の変化



4 おわりに

本稿においてはロッテルダムモデルに関して、実証研究上用いられる定数項部分の有意性について検討した。本来価格と消費との関係のみを考察する経済理論的な側面からいえば定数項部分は必ずしも必要ではないが、この定数項部分に関しては価格に対する変化以外の趣向の変化を含んでいる。検討の結果得られた結論は1%の有意水準で定数項部分が影響を与えていないという帰無仮説を棄却するものであった。言い換えれば、定数項部分は必要であるといえる。ただ、その定数項部分に関してもほぼ30年間の期間において安定的といえるものではなく、ある程度の変化を伴っていると考えることができる。このことはダミー変数を導入し、モデルを比較することで得られたが、特に同次性の制約によって定数項部分の時系列的な変化を無視し得ないことが示された。本稿において個々のパラメータの妥当性等は詳細に検討していないが、時系列データによりロッテルダムモデルを構築する場合、定数項部分の変動、言い換えれば趣向の変化が起こる場合を留意する必要があるであろう。

参考文献

[1] Barten,A. P. (1967), "Evidence on the Slutsky Condition for Demand Equation", Review of Economics and Statistics , 49 ,pp77–84.

[2] Barten,A. P. (1969), "Maximum Likelihood Estimation of a Complete System of Demand Equations", European Economic Review , 1 ,pp7–73.

[3] Deaton(1974), "The Analysis of Consumer Demand in the United Kingdam, 1900-1970", Econometrica, 42 ,pp341–367.

[4] Deaton(1986), "Demand Analysis", In Z. Griliches and M. D. Intriligator, editors, Handbook of Econometrics, Vol. 3, Chapter 30, Elsevier Science Publishers ,pp1767–1839.

[5] Deaton,A. S. and J. Muellbauer(1980), "An Almost Demand System", American Economic Review, 70 ,pp312–36.

[6] 橋本紀子 (1986), 「ロッテルダムモデルによる需要理論の検証 −日本の場合:1963〜1983−」、『季刊理論経済学』、第37巻 第3号、 pp.271–275.

[7] Maki, A.(1992), "An Empirical Test of Homogeneity and Synmetry in a Demand System with Taste Changes",Structural Change and Economic Dynamics, 59 ,pp167–176.

[8] 牧厚志 (1997), 「消費者需要分析」、『応用計量経済学 II』所収、第1章、 pp.3–68、多賀出版.

[9] 佐伯親良 (2002), 「消費者需要分析 −最近の動向−」、『構造変化と金融経済』所収、第3部、 pp.155–180、九州大学出版会.

[10] Suruga, T.(1980), "Testing the Rotterdam Demand Model on the Japanese Expenditure Pattern",Economic Review, Vol. 31 No.4 ,pp368–374.

[11] Theil, H.(1965), "The Information Approach to Demand Analysis ",Econometrica, 33 ,pp67–87.

[12] Theil, H.(1971), *Principles of Econometrics* John Wiley & Son's.

[13] Theil, H.(1974), *Theory and Measurement of Consumer Demand* Vol. II, North-Holland.