

# 微分形式の同時需要体系モデルに 関する適合性検証

横山 佳 充

## 1 はじめに

本稿では需要関数に関する同時方程式体系の中でも微分需要体系のモデルについて検証し、過去の提供されたモデルの中からどのモデルが最も日本の消費者モデルに適合するかを検証する。過去の需要関数の研究においてはこうした微分方程式体系のモデルばかりではなく、簡便的に単一方程式による分析により需要関数を定義する方法もある。こうした推定結果を使うことは大きな体系の中での一部品として使用することは考えられるが、経済学的な基礎理論に基づいておらず、他の財との関連性を経済学的な観点も含めて分析するためには単一方程式では不十分である。それゆえ単純な予算制約ばかりでなく、同次性や対称性をも考慮に入れた分析が可能となる同時推定を考慮に入れる必要がある。体系的な需要モデルは経済学的な需要の理論に基づいて、各財間の同次性、対称性などの制約を加えることができる。推定法や理論的考察に関しては単一方程式による分析と比較し煩雑となるが、理論的な側面を付加した上で推定を行うことは経済学的な理論と整合性を共有する意味でも重要である。

初期の研究を除けば、同時方程式体系の需要モデルは、本稿で分析する微分形式のモデル体系と間接効用関数または支出関数をフレキシブルな関数形に特定化し、そこから推定すべき同時方程式体系を導く方法がある。フレキシブルな関数から導かれた同時方程式体系の需要関数で代表的なモデルは AIDS モデルであるが、適当な変形を利用することで AIDS モデルは微分体系のモデルにすることができ、もう一方の微分需要体系の代表モデルである Rotterdam モデ

ルと比較が可能である。

本稿では、日本のデータに照らし、微分需要体系で表現できる AIDS モデルと Rotterdam モデルをはじめ、CBS モデルと NBR モデルを比較するとともに、より一般的なモデル体系を用いて分析を行う。

本稿の構成は次の通りである。まず、第2節において微分需要体系のモデルについて考察を行い、4タイプの各モデルとそれらを統合した Barten の一般モデルについての関係を示す。第3節においてデータの特徴について記述し、第4節において推定結果を示す。その結果を受け、第5節において各モデルに関する評価を行い、最終的に第6節において総括を示す。

## 2 微分需要体系モデル

本節においては微分需要体系と呼ばれる需要関数の体系をサーベイし、それらを統合したモデルに関して検討する。微分需要体系の需要関数モデルは Barten (1993) によって統合されたものを含むと合計5種類あり、他の4種類のモデルを入れ子モデルとして包含する。本節においてはその理論的側面について考察する。以下で考察を行う上で使用する記号については以下のようにする。

$p_i$	第 $i$ 財の価格
$q_i$	第 $i$ 財の需要量
$n$	財 (費目) の種類
$m = \sum_i^n p_i q_i$	支出総額
$w_i = p_i q_i / m$	第 $i$ 財の支出ウエイト
$\eta_i = \partial \log q_i / \partial \log m$	第 $i$ 財の支出弾力性
$\epsilon_{ij} = \partial \log q_i / \partial \log p_j$	第 $i$ 財と第 $j$ 財の (非補償) 価格弾力性
$\delta_{ij} = 1(i=j). \text{or. } 0(i \neq j)$	Kronecker delta
$d \log P = \sum_i w_i d \log p_i$	Divisia 価格指数
$d \log Q = \sum_i w_i d \log q_i$	Divisia 数量指数

実際にデータを扱う際には観測時間での時間の添え字  $t$  がつき、 $T$  は観測値

の個数を表す。 $d$ は時間に関する微小な変化を表す。なお、 $\epsilon_{ij}$ は Marshall 型の需要関数の価格弾力性とも表現できる。

## 2.1 Rotterdam Model

Rotterdam モデルは Barten (1964), Theil (1965) によって研究されたモデルで、モデルの体系は

$$w_i d \log q_i = \mu_i \sum_j w_j d \log q_j + \sum_j \lambda_{ij} d \log p_j \quad (1)$$

と表記される。ただし、 $d \log p_i$ ,  $d \log q_i$  は  $p_i$ ,  $q_i$  の対数値を示し、時点  $t$  における時間に関する微小な変化を示す。実際にデータで分析を行う場合には  $d \log p_i$  を  $\Delta \log p_{it} = \log p_{it} - \log p_{i, t-1}$  で置き換え、同様に  $d \log q_i$  を  $\Delta \log q_{it} = \log q_{it} - \log q_{i, t-1}$  で置き換える。一方、各時点の  $w_i$  については  $\bar{w}_{it} = (w_{it} + w_{i, t-1})/2$  を利用する。最終的にこの表記を用いて推定を行う式は、

$$\bar{w}_{it} \Delta \log q_{it} = \mu_i \sum_j \bar{w}_{it} \Delta \log q_{jt} + \sum_j \lambda_{ij} \log p_{jt} \quad (2)$$

となる。また、 $\lambda_{ij}$  および  $\mu_i$  はパラメータであり、各種の制約条件を満たす上で制約を課すことになる。

Rotterdam モデルに関してさまざまな制約条件を検討する。まず支出に関する総和条件については、

$$\sum_i \mu_i = 1, \sum_i \lambda_{ij} = 0 \quad (3)$$

が成り立ち、同次性の条件は

$$\sum_j \lambda_{ij} = 0 \quad (4)$$

によって規定される。最後に対称性に関しては

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad (5)$$

で与えられる。

第  $i$  財の支出弾力性  $\eta_i$ , 第  $i$  財および第  $j$  財の Marshall の補償されない需要関数の価格弾力性  $\epsilon_{ij}$  は,

$$\eta_i = \mu_i / w_i \quad (6)$$

$$\epsilon_{ij} = \lambda_{ij} / w_i - \mu_i w_j / w_i \quad (7)$$

と表現される。

Rotterdam モデルの導出に関して若干考察を加えておく。予算制約  $m = \sum_i p_i q_i$  の下で効用最大化を行うことによって得られる Marshall 型の需要関数,  $q_i = q(m, p_1, p_2, \dots, p_n)$  を全微分して,

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial m} dm + \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial p_j} dp_j \quad (8)$$

となる。また, Slutsky 方程式より,

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial m} q_j \quad (9)$$

である。ただし, ここで,  $h_i$  は財  $i$  の補償された需要関数である Hicks 型の需要関数を示す。ここで, 式(8)と式(9)を用いてまとめると,

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial m} \left( dm - \sum_j q_j dp_j \right) + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j} dp_j \quad (10)$$

となる。一方で, 予算制約線を全微分した,

$$dm = \sum_j q_j dp_j + \sum_j p_j dp_j \quad (11)$$

を式(10)に代入すると,

$$dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial m} \sum_j p_j dq_j + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial p_j} dp_j \quad (12)$$

が得られる。さらに両辺に  $p_i/m$  をかけてさらに対数部分を考慮して変形すると,

$$w_i d \log q_i = \mu_i d \log Q + \sum_j \lambda_{ij} d \log p_j \quad (13)$$

となる。これが式(1)に対応する Rotterdam モデルである。ここで、

$$\mu_i = p_i \cdot \frac{\partial q_i}{\partial m} \quad (14)$$

かつ

$$\lambda_i = \frac{p_i p_i}{m} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial p_i} \quad (15)$$

とおいている。

## 2.2 Almost Ideal Demand System (AIDS)

このモデルは Deaton and Muellbauer(1980)によって提示された。これは AIDS モデルを微分形で表した派生形である。モデルの体系は、

$$w_i d \log q_i = (\mu_i + w_i) \sum_j d \log q_j + \sum_j [\lambda_{ij} - w_i (\delta_{ij} - w_j)] d \log p_j \quad (16)$$

のように表される。AIDS モデルも Rotterdam モデル同様にデータで分析を行う場合には、

$$\bar{w}_{it} \Delta \log q_{it} = (\mu_i + \bar{w}_{it}) \sum_j \Delta \log q_{jt} + \sum_j [\lambda_{ij} - \bar{w}_{it} (\delta_{ij} - \bar{w}_{jt})] \Delta \log p_{jt} \quad (17)$$

と表記される。

AIDS モデルの総和条件に関しては

$$\sum_i \mu_i = 0, \quad \sum_i \lambda_{ij} = 0 \quad (18)$$

を満たす。

同次性の条件については、

$$\sum_j \lambda_{ij} = 0 \quad (19)$$

を満たす必要がある。

対称性の条件については、

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \tag{20}$$

である。

第  $i$  財の支出弾力性  $\eta_i$ , 第  $i$  財および第  $j$  財の Marshall の価格弾力性  $\epsilon_{ij}$  は,

$$\eta_i = 1 + \mu_i/w_i \tag{21}$$

$$\epsilon_{ij} = -\delta_{ij} + \lambda_{ij}/w_i - \mu_i w_j/w_i \tag{22}$$

と表現される。

モデルの導出に関して考察を加えると, 通常使用される AIDS モデルの形式は

$$w_i = \alpha_i + \mu_i \log(m/P) + \sum_j \lambda_{ij} \log p_j \tag{23}$$

と表記されるのが一般的であり, 式(23)を基に以降では本稿で用いる微分形式の AIDS モデルの導出について考察する。<sup>(1)</sup> 本稿における AIDS モデルは差分の形式で表したもので,

$$dw_i = \mu_i d \log(m/P) + \sum_j \lambda_{ij} d \log p_j \tag{24}$$

である。ここで,  $w_i = p_i q_i/m$  の関係より,

$$dw_i = w_i (d \log p_i + d \log q_i - d \log m) \tag{25}$$

また, Divisia 数量指数  $d \log Q$  の関係より

(1) 通常の AIDS のモデルは費用関数をフレキシブルな関数型を仮定することから導かれる。初めに費用関数  $c(u, p)$  の対数をとったもの

$$\log c(u, p) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \log p_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \log p_i \log p_j + u \mu_0 \prod_i p_i^{\mu_i}$$

を考察する。ただし,  $u$  は効用関数である。これに Shephard の補題を適用し, トランスログ型の価格指数

$$\log P = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i \log p_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \log p_i \log p_j$$

とおくことで, 式(23)を得る。

$$d \log Q = d \log m + d \log P \quad (26)$$

ここで、 $d \log P$  は Divisia 価格指数であるとして、

$$d \log P = \sum_i w_i d \log p_i \quad (27)$$

と定義する。式(24)に式(25)、式(26)および式(27)の関係を適用すると、式(16)を得ることができる。

### 2.3 Central Bureau of Statistics Model (CBS)

本モデルは Rotterdam モデルの一定としている限界消費性向を支出の関数として取り扱ったものであり、Keller and van Driel (1985) によって与えられた。その体系は

$$w_i d \log q_i = (\mu_i + w_i) \sum_j d \log q_j + \sum_j \lambda_{ij} d \log p_j \quad (28)$$

で表される。

総和条件に関しては

$$\sum_i \mu_i = 0, \quad \sum_i \lambda_{ij} = 0 \quad (29)$$

が成り立ち、同次性の条件は

$$\sum_j \lambda_{ij} = 0 \quad (30)$$

によって規定される。最後に対称性に関しては

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad (31)$$

で与えられる。第  $i$  財の支出弾力性  $\eta_i$ 、第  $i$  財および第  $j$  財の Marshall の価格弾力性  $\epsilon_{ij}$  は、

$$\eta_i = 1 + \mu_i/w_i \quad (32)$$

$$\epsilon_{ij} = \lambda_{ij}/w_i - w_j(1 + \mu_i/w_i) \quad (33)$$

となる。

CBS の導出に関しては、Working-Leaser 型モデルの

$$w_i = \alpha_i + \mu_i \log m \quad (34)$$

を用いる。

式(34)に  $m$  をかけて  $m$  で偏微分して、式(34)の関係を適用すると、

$$mw_i = w_i + \mu_i \quad (35)$$

が得られる。これは支出弾力性であるが、これを用いて Rotterdam モデルの支出弾力性を表す  $\mu_i$  部分を入れ替えると、CBS を得る。

## 2.4 National Bureau of Research Model (NBR)

このモデルは Neves (1987) によって提示された。これは Rotterdam モデルと AIDS を合成したものである。CBS が Rotterdam モデルの  $\mu$  の係数部分を変更したのとは異なり、NBR では  $\lambda_{ij}$  部分の係数を AIDS のように置き換えたものである。

モデルの形式は

$$w_i d \log q_i = \mu_i \sum_j d \log q_j + \sum_j [\lambda_{ij} - w_i(\delta_{ij} - w_j)] d \log p_j \quad (36)$$

である。

総和条件に関しては

$$\sum_i \mu_i = 1, \sum_i \lambda_{ij} = 0 \quad (37)$$

である。

同次性の条件については、



$$\sum_j \lambda_{ij} = 0 \quad (38)$$

を満たす必要がある。

対称性の条件については,

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad (39)$$

である。

第  $i$  財の支出弾力性  $\eta_i$ , 第  $i$  財および第  $j$  財の Marshall の価格弾力性  $\epsilon_{ij}$  は,

$$\eta_i = \mu_i / w_i \quad (40)$$

$$\epsilon_{ij} = -\delta_{ij} + \lambda_{ij} / w_i - w_j (1 + \mu_i / w_i) \quad (41)$$

と表現される。

## 2.5 Barten's Generalized Demand Model (GD)

このモデルは Barten (1993) によって提示された。これはこれら四つのモデルを統合したものである。モデル自体はすでに考察した 4 モデルを二つのパラメータ  $k_1, k_2$  を用いて人工的に連結したもので、パラメータ自体に具体的な意味合いはない。

モデルの形式は

$$w_i d \log q_i = (\mu_i + k_1 w_i) \sum_j d \log q_j + \sum_j [\lambda_{ij} - k_2 w_i (\delta_{ij} - w_j)] d \log p_j \quad (42)$$

である。

総和条件に関しては

$$\sum_i \mu_i = 1 - k_1, \quad \sum_i \lambda_{ij} = 0 \quad (43)$$

を満たす。

同次性の条件は

$$\sum_j \lambda_{ij} = 0 \quad (44)$$

によって規定される。最後に対称性に関しては

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad (45)$$

で与えられる。第  $i$  財の支出弾力性  $\eta_i$ 、第  $i$  財および第  $j$  財の Marshall の補償されない需要関数の価格弾力性  $\epsilon_{ij}$  は、

$$\eta_i = k_1 + \mu_i / w_i \quad (46)$$

$$\epsilon_{ij} = -w_i k_1 + (w_i - \delta_{ij}) k_2 + \frac{\lambda_{ij}}{w_i} - \mu_i \quad (47)$$

となる。

本モデルは四つのモデルを統合したもので、 $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  の場合 Rotterdam モデルに、 $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$  のとき CBS モデルに、 $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$  のときには NBR モデル、 $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$  のときに AIDS モデルに対応している<sup>(2)</sup>。

### 3 データ

データは『家計調査』から得られた年次データを用いた。費目数  $n$  は 10 である。単純に個別の費目に対し推定を行う場合、推定するパラメータの個数は、制約を無視した場合定数項を含めて 12 個であり、定数項を含めない場合は 11 個である。推定に関して 1970 年から 2003 年までの 34 個のデータであるが、実際の推定においては差分を用いるので 33 個のデータを使用することになる。式の推定に関しては自由度という点では問題はないが、實際上ひとつのパラメータ推定に関して 3 個程度のデータしか有していない点注意が必要である。また一方で、『国民所得計算』などの四半期に対応できたデータを用いることも考えられるが、本稿では家計の行動に関しての行動を把握する上では集

(2) 本稿においては、Gorman の Rank 2 に準拠したモデル構成であるが、Fousekis and Revell (2003) のように Rank 3 に基づいたモデル構成も可能である。ただし、Rank 3 のモデルはパラメータが多数であり、安定的な推定値を得るためには多数の観測値を確保することが必要である。

計された『国民所得計算』の概念より、各家計の調査により得られた『家計調査』のほうがより消費行動を反映していると考え、年次ではあるが『家計調査』レベルのデータを用いた。費目は大費目の分類を利用し、費目の記号*i*との対応は表1に示している。費目の分割は10であり、『国民所得計算』との違いは個々の家計の記述データの平均であることおよび住宅の費目に関しては帰属計算分を算入していないことがあげられる。

表1：費目分類

費目番号 <i>i</i>	1	2	3	4	5
費目名	食料	住居	光熱・水道	家具・家事用品	被服及び履物
費目番号 <i>i</i>	6	7	8	9	10
費目名	保健医療	交通・通信	教育	教養娯楽	諸雑費

表1の分類に基づいて分類したデータのウエイトと価格の基本統計量は表2と表3に示しており、その時系列的な変化については図1と図2に示している。分析においては $q_i$ も必要であるが、 $q_i$ については $w_i = \frac{p_i q_i}{m}$ の関係を用いて計算することで導出する。

家計の消費に関する各費目の割合を検討してみると、時系列的に明らかにウエイトの低下傾向が見られるのは*i* = 1, 4, 5の食料、家具・家事用品、被服及び履物である。これらは衣食住に関する財の一部であるが、特に食料は支出の上昇とともにその購入量が減少する下級財である可能性がある。支出の中でウエイトが大きいのは*i* = 1, 10である。*i* = 1の食料に関しては通常の財として分析の対象となるが、*i* = 10の諸雑費などは使途不明金などを含み、分析を行ううえでは取り扱いが難しいと考えられる。

一方で価格に関しては『消費者物価指数年報』の消費者物価指数を用い、西暦2000年を100とした指数によって表現している。価格はすべての財に関して基本的にどのデータも期間内での価格が上昇する傾向にあるが、区間の前半部の増加の程度が大きく、後半においては価格自体が減少している場合があるか、またはその増加程度が減速している。

表 2 : ウェイトの基本統計量

	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$
平均	0.272	0.054	0.057	0.042	0.073	0.029	0.089	0.039	0.092	0.255
中央値	0.264	0.050	0.058	0.041	0.072	0.027	0.092	0.041	0.090	0.259
最大値	0.341	0.068	0.069	0.054	0.100	0.041	0.124	0.047	0.103	0.269
最小値	0.232	0.045	0.042	0.034	0.046	0.025	0.052	0.026	0.083	0.226
標準偏差	0.035	0.008	0.009	0.006	0.015	0.004	0.019	0.007	0.007	0.011

表 3 : 価格の基本統計量

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$
平均	81.72	73.36	86.26	98.62	77.06	77.18	87.31	63.66	80.41	79.16
中央値	88.10	77.15	97.00	105.10	81.85	83.35	98.60	65.90	86.75	88.05
最大値	102.50	100.20	108.60	113.70	101.30	102.90	102.80	102.70	102.00	100.90
最小値	32.90	26.00	36.90	53.50	28.10	39.60	39.30	13.90	33.30	32.00
標準偏差	21.37	23.97	22.77	17.41	22.40	19.35	20.85	29.38	21.44	22.30

図 1 : ウェイトの時系列的変化

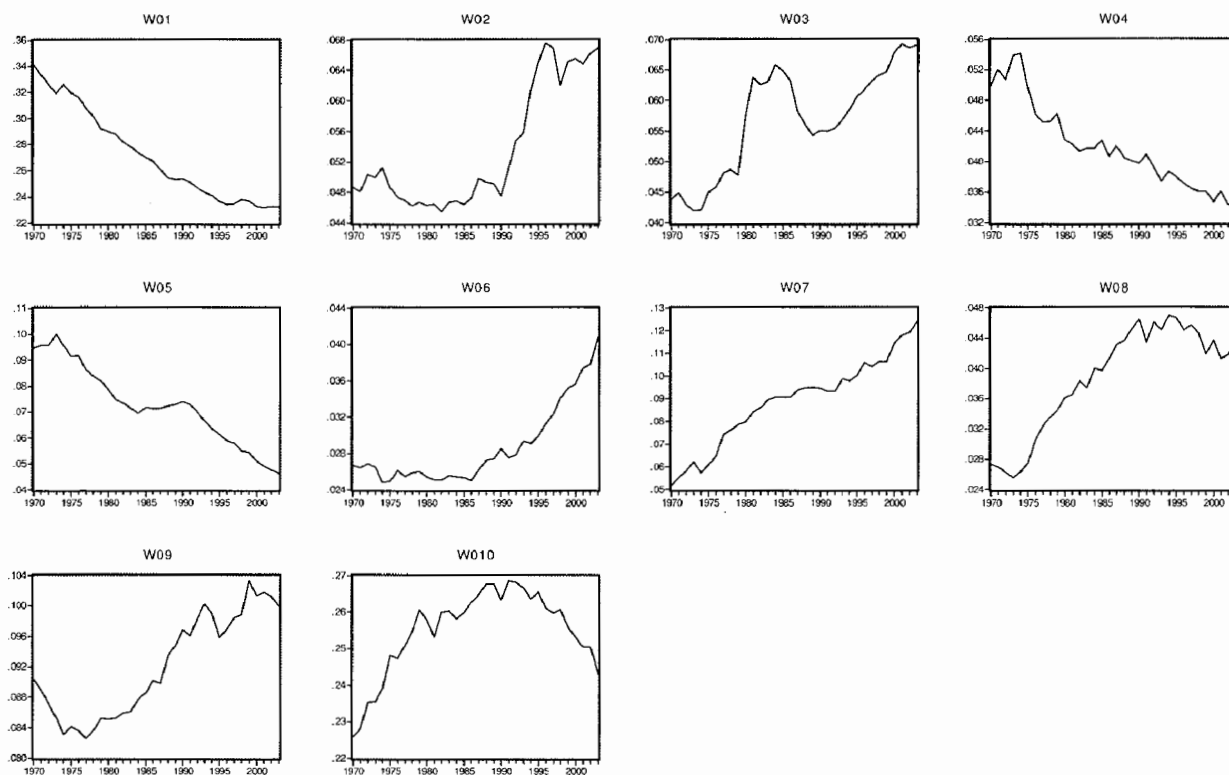
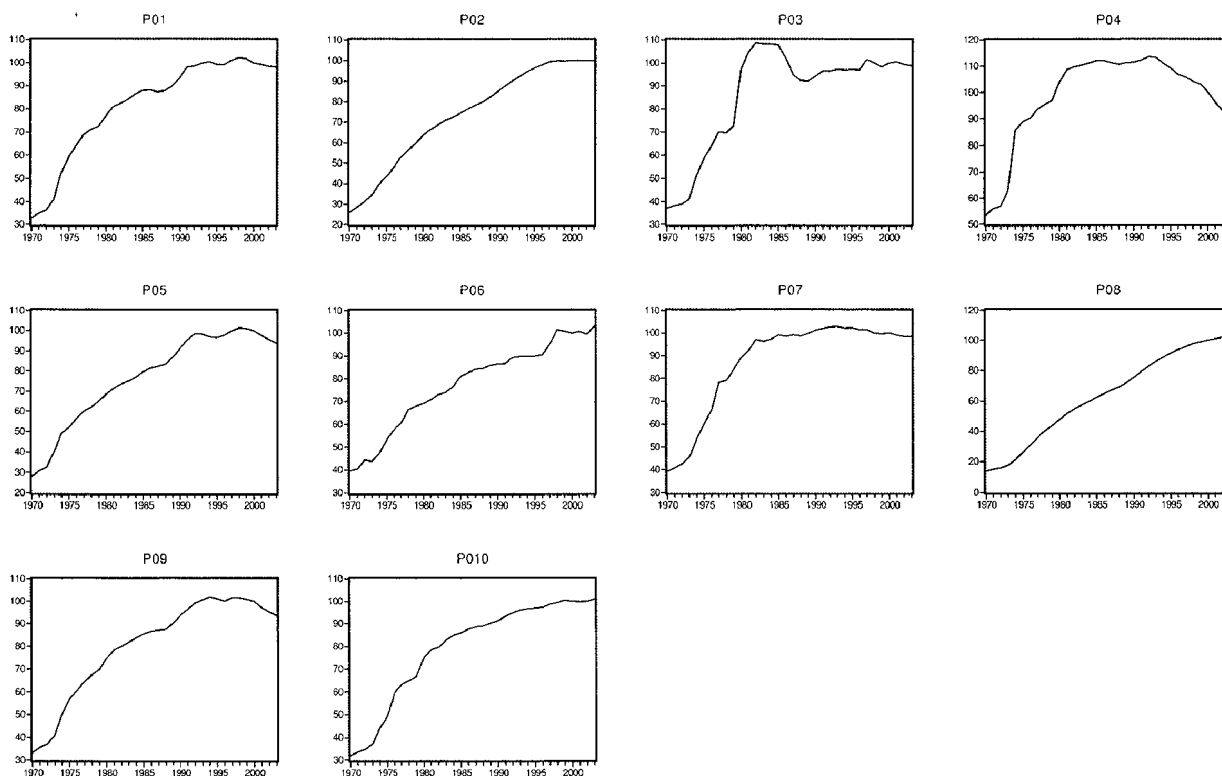


図 2 : 価格の時系列的変化



#### 4 推定方法および推定結果

推定に関しては Barten (1969) および Barten and Geyskings (1975) に基づいた最尤推定法を行った。推定を行う上では総和条件が自動的に満足されるために直接同時に  $n$  本の体系を推定できない。しかしながら、任意の 1 方程式を除外することで同時推定が可能となりかつ尤度も求めることができる。

本稿における推定では  $i = 10$  の諸雑費を除き 9 本の方程式体系にして推定を行った。推定する式は Rotterdam, AIDS, CBS, NBR および GD のそれぞれに関して、定数項がない場合には式(1), 式(16), 式(28), 式(36)および式(42)の  $d \log p_i$  を  $\Delta \log p_{it} = \log p_{it} - \log p_{i,t-1}$  で、 $d \log q_i$  を  $\Delta \log q_{it} = \log q_{it} - \log q_{i,t-1}$  で置き換え、また  $w_i$  は  $\bar{w}_{it} = (w_{it} + w_{i,t-1})/2$  で置き換えることで推定する。一方で、定数項のある場合には各式に定数項を加えた式を推定する。推定するパラメータの個数は同時推定であり、その課した制約の有無に依存する。それぞれの推定パラメータ数は GD モデルを除くいずれのモデル体系であっても同じ

であり、表4に示すようになる。<sup>(3)</sup> 推定値を求めた結果得られた対数尤度は表5に示している。

表4：推定するパラメータ数

	制約なし	同次性	同次性かつ対称性
定数項なし	$(n-1)(n+1)$	$(n-1)n$	$(n-1)(n/2+1)$
定数項あり	$(n-1)(n+2)$	$(n-1)(n+1)$	$(n-1)(n/2+2)$

表5：対数尤度結果

		制約なし	同次性	同次性かつ対称性
Rotterdam	定数項なし	1,676.6	1,644.8	1,584.9
	定数項あり	1,694.5	1,664.4	1,607.2
CBS	定数項なし	1,681.1	1,644.0	1,585.1
	定数項あり	1,699.2	1,662.7	1,609.2
NBR	定数項なし	1,640.8	1,577.1	1,515.4
	定数項あり	1,654.5	1,594.9	1,537.6
AIDS	定数項なし	1,636.4	1,577.3	1,515.9
	定数項あり	1,650.3	1,595.0	1,538.9
GD	定数項なし	1,681.5	1,665.4	1,612.0
	定数項あり	1,699.6	1,682.2	1,633.0

最終的にモデル体系に関する制約条件の成立に関しては尤度比検定を用いる。帰無仮説と対立仮説を仮定し、各モデルを推定する。それによって得られた二つのモデルのパラメータ数の差を自由度とする尤度比検定となる。テストの種類は表6に示すとおりであり、 $L_5$  と  $L_7$  は自由度36のカイ二乗分布に従うが、他の検定はすべて自由度9のカイ二乗分布に従うとして検定を行う。尤度比検定結果は表7に示している。<sup>(4)</sup> 結果を見る限り、定数項に関しての検定はいずれも定数項ありを支持する結果を示しており、同次性の帰無仮説を採択できないという結論になっている。一方で、同次性かつ対称性を帰無仮説にしても、対立仮説を同次性に設定した場合いずれのモデルに関しても対称性は支持

(3) GDモデルに関して推定するパラメータの個数は各モデル体系の推定値に  $k_1, k_2$  を加えた2個分大きい。

(4) 自由度9のカイ二乗分布の5%臨界値は16.92であり、1%臨界値は21.67である。同様に自由度36のカイ二乗分布の5%臨界値は51.00であり、1%臨界値は58.62である。

されない。この点経済理論と矛盾するが、過去の研究においては費目の分割が細かく費目数が多くなる場合こうした制約が満たされない可能性があるという報告がなされている。これに関しては分割を統合するなど費目数を減少させ、より詳細に分析を行うことも可能ではあるが、統合によって費目数を減少させることに関しては恣意性を排除できないため本稿では行わなかった。この部分に関してはデータの<sup>(5)</sup>問題であるのか、それとも理論の問題であるのか検証を続けていく必要がある。

表6：尤度比検定の種類

検定名	帰無仮説	対立仮説	自由度
$L_1$	制約なし, 定数項なし	制約なし, 定数項あり	$n-1$
$L_2$	同次性, 定数項なし	同次性, 定数項あり	$n-1$
$L_3$	同次性かつ対称性, 定数項なし	同次性かつ対称性, 定数項あり	$n-1$
$L_4$	制約なし, 定数項なし	同次性, 定数項なし	$n-1$
$L_5$	同次性, 定数項なし	同次性かつ対称性, 定数項なし	$n-1$
$L_6$	制約なし, 定数項あり	同次性, 定数項あり	$(n-1)(n/2-1)$
$L_7$	同次性, 定数項あり	同次性かつ対称性, 定数項あり	$(n-1)(n/2-1)$

表7：尤度比検定結果

	$L_1$	$L_2$	$L_3$
		$L_4$	$L_5$
		$L_6$	$L_7$
Rotterdam	35.8	39.1	44.5
		63.7	119.8
		60.4	114.4
CBS	36.2	37.4	48.2
		74.0	117.9
		72.9	107.1
NBR	27.4	35.5	44.4
		127.4	123.5
		119.4	114.5
AIDS	27.7	35.3	46.0
		118.1	122.9
		110.5	112.3
GD	36.2	33.6	42.0
		32.2	106.8
		34.8	98.4

## 5 各モデル間の妥当性について

各モデルの妥当性を検証するために GD の関係を用いて各モデル間の中で、どのモデルがもっとも妥当な説明力を有しているかを検証する。単純には GD の推定を行い、推定結果より GD 中のパラメータの組み合わせが (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) のいずれに近いかによって検証することが可能である。GD とその他のモデルとの対応関係は表 8 のようになる。モデル自体は GD により他の 4 個のモデルを内包する形である入れ子型のモデルであり、 $k_1, k_2$  に関しては基本的に経済的なインプリケーションはない。<sup>(6)</sup>

表 8：モデルとパラメータの対応関係

Models	$k_1$	$k_2$
Rotterdam	0	0
CBS	1	0
NBR	0	1
AIDS	1	1

一方で一般モデルである GD モデルに関して定数項とそれぞれの制約を課した 6 タイプのモデルの推定結果および  $k$  が 0 または 1 に近いかな否かの検定結果は表 9 に示している。<sup>(7)</sup> 表の結果は  $k_1$  に関しては基本的に 1 に近く、同次性および対称性が仮定されている場合を除けば、統計的に  $k_1 = 1$  の帰無仮説を棄却できない。一方で  $k_2$  は 0 に近い。帰無仮説として  $k_2 = 1$  は棄却されるが、 $k_2 = 0$  の帰無仮説に関しては制約のないモデルは統計的に否定できない。

(5) また分離可能性を仮定して個々の細かな費目間の需要関係を分析することも考えられる。

(6) ただし、Matsuda (2005) は一部パラメータがフレキシブルなエンゲル関数の次数と関連しているとしている。

(7) 検定を行う上で  $k$  以外のパラメータ推定値は煩雑になるため省略した。



表9：GDモデルの $k$ の値について

モデル名 制約	$k_1$ (s. e.)	$k_2$ (s. e.)	$k_1 = 0$ $k_1 = 1$	$k_2 = 0$ $k_2 = 1$
GDN 1 定数項なし, 制約なし	0.911 (0.434)	0.061 (0.070)	2.10 -0.20	0.87 -13.43
GDN 2 定数項なし, 同次性	1.540 (0.327)	-0.194 (0.015)	4.72 1.65	-13.21 -81.17
GDN 3 定数項なし, 同次性かつ対称性	1.927 (0.312)	-0.109 (0.013)	6.18 2.97	-8.72 -88.63
GDC 1 定数項あり, 制約なし	0.634 (0.347)	0.066 (0.064)	1.83 -1.05	1.04 -14.61
GDC 2 定数項あり, 同次性	1.154 (0.278)	-0.164 (0.015)	4.14 0.55	-11.07 -78.77
GDC 3 定数項あり, 同次性かつ対称性	1.795 (0.271)	-0.202 (0.013)	6.62 2.93	-15.25 -90.83

s. e. は標準誤差を表し,  $k = 0$ . or.  $1$  は帰無仮説を示し, その $t$ 値を表す。

実際 GD モデルを直截的に推定した結果を示した表5において, GD の結果と他の4モデルの結果を比べてみても制約なしのモデルを初めとしてCBSに近いという結果が得られている。<sup>(8)</sup>この結論はオランダデータにおいてBarten (1993) が示した結果と同じである。Barten (1993) においては比較する4モデル間から取り出した複数のモデルを複合することで検定を行っているが, 本稿においては検証を行うため,  $k_1, k_2$  に関して動かすことで尤度関数の状態を求めた。<sup>(9)</sup>図3から図14には尤度の3次元グラフとその等高線によるグラフを示している。

図を総合的に見るといずれの場合にも $k_1$ が0付近で頂上部分が縦に伸びており, その中でも $k_2$ が1付近で最大値をとっている。これは一般化モデルによるモデル選択の結果, CBSモデルが最も他のモデルに比較して当てはまり

(8) 条件においてはRotterdamモデルの方がGDに近い場合もある。

(9) グラフにおいて示した定義域は $k_1, k_2$ のいずれにしても $(-2, 2)$ の間で示している。GDが四つのタイプのモデルを複合したものであると考えると, 各パラメータの定義域は $(0, 1)$ であると考えられるが, 結果を見る限り, 最大値はそうした範囲外にあると考えられる。

図 3 : GDN 1 の尤度 ( 3 次元 )

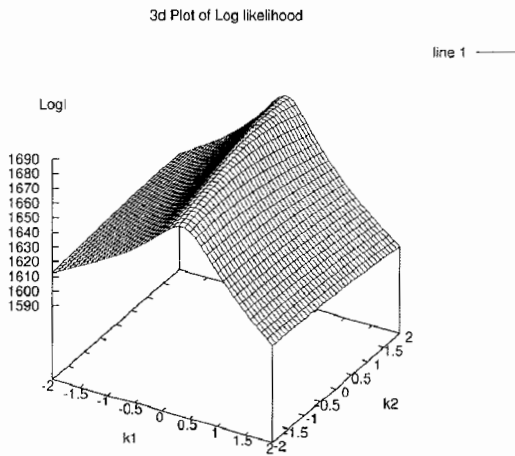


図 4 : GDN 1 の尤度 ( 等高線 )

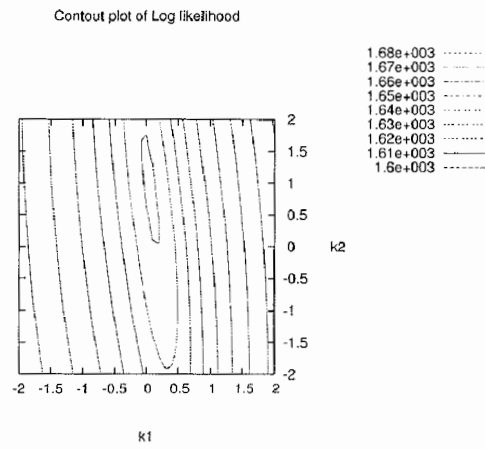


図 5 : GDN 2 の尤度 ( 3 次元 )

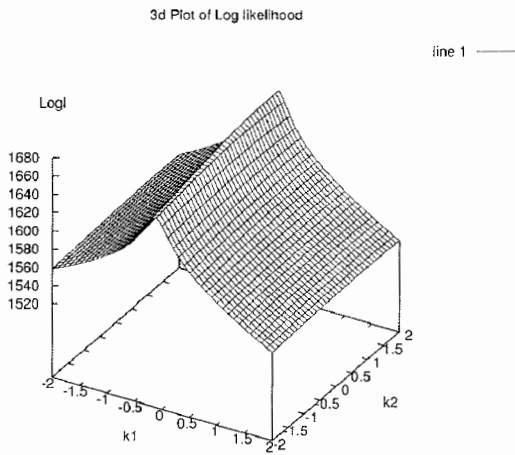


図 6 : GDN 2 の尤度 ( 等高線 )

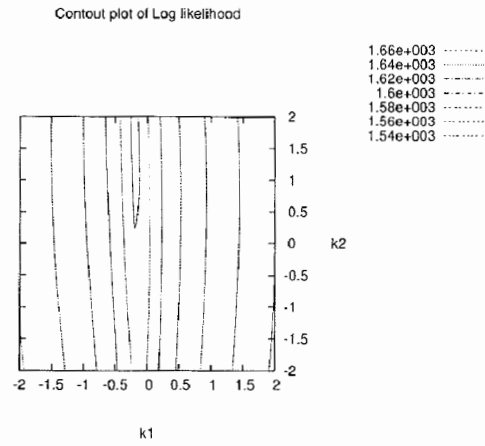


図 7 : GDN 3 の尤度 ( 3 次元 )

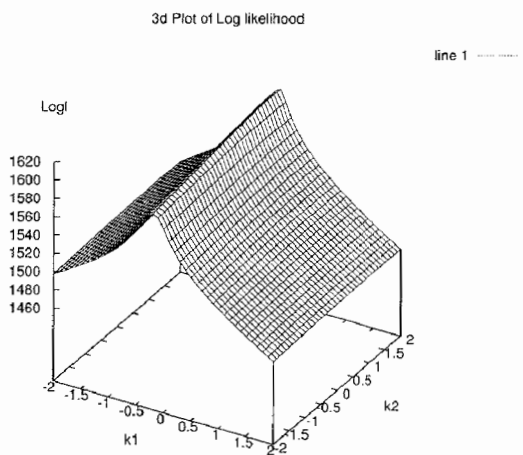


図 8 : GDN 3 の尤度 ( 等高線 )

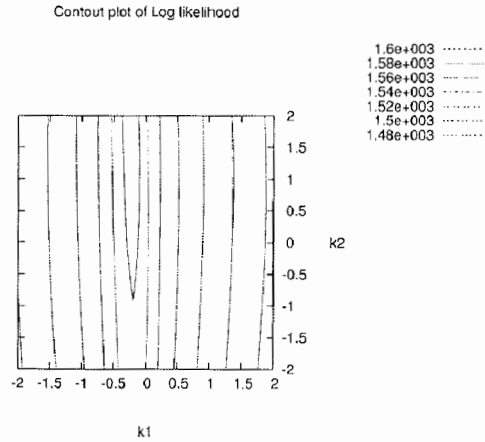


図 9 : GDC 1 の尤度 ( 3 次元 )

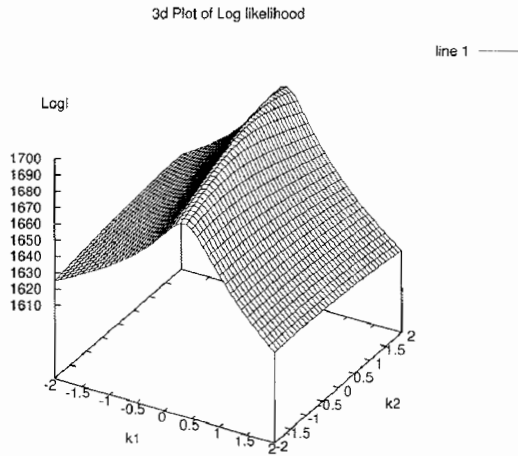


図 10 : GDC 1 の尤度 ( 等高線 )

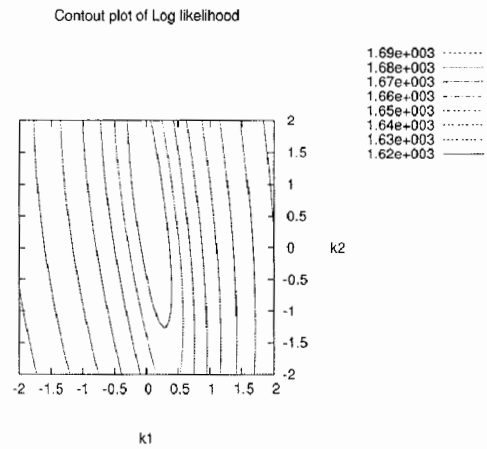


図 11 : GDC 2 の尤度 ( 3 次元 )

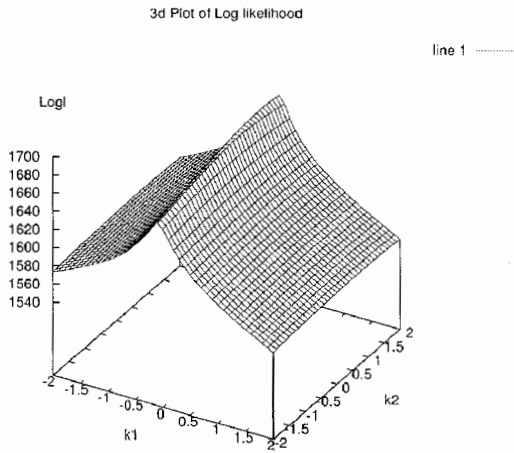


図 12 : GDC 2 の尤度 ( 等高線 )

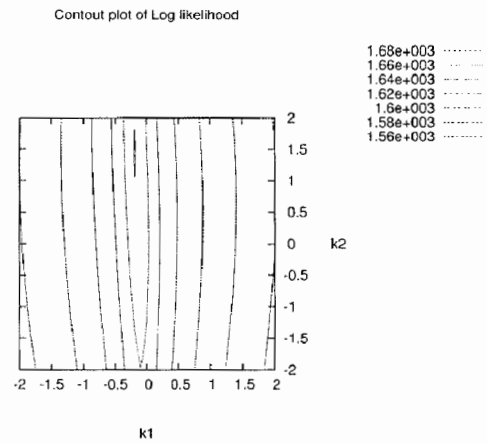


図 13 : GDC 3 の尤度 ( 3 次元 )

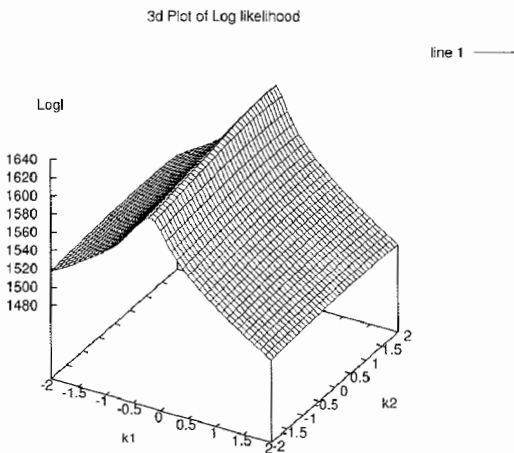
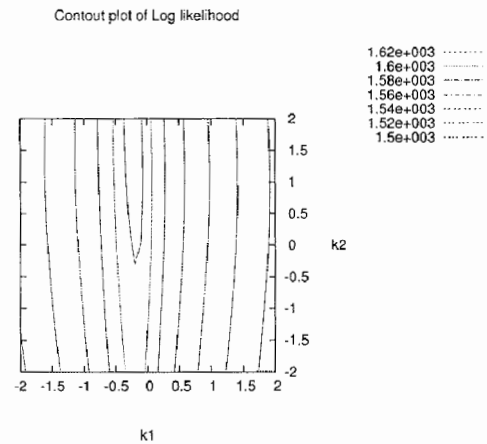


図 14 : GDC 3 の尤度 ( 等高線 )



が良いことを示す。

表9の結果とあわせて検証すると一部(0, 1)の範囲外に存在する場合もあるが、3次元グラフおよび等高線をみると、RotterdamおよびCBS方向に尤度が高いのに比較し、NBRとAIDSの関係に関しては頂点からすぐに小さくなる。したがって、CBSとRotterdamの方向性がフィットが良いように考えられる。式の関係から判断すると、式(16)と式(36)の第二項の部分が適合が悪いと考えられる。

同様に $k$ のとり値により、一般モデルの尤度比検定結果を三次元にプロットした図とその等高線の図を図15から図22に示す。これらの図はいずれの図も $k_1$ が0のときに値が最小の谷の部分を取り、値が小さい部分の方がよりモデルが経済学的な条件を満たすことを示すことを勘案すると、図ではどのモデルに関しても $k_1$ が0に近いときに経済学的な条件に近いので、 $k_2$ の値は $k_1$ が0より大きい小さいかで多少の変化はあるもののあまり重要ではないと考えられる。ただし、統計的な側面から言えば、同次性の検定に関しては最小値の値をとる場合1%程度の有意水準で経済学的な条件を満たすが、対称性の検定については最小値をとる場合でも1%程度の有意水準で経済学的な条件は満たさない。

図15：定数項あり同次性の尤度比検定  
(3次元)

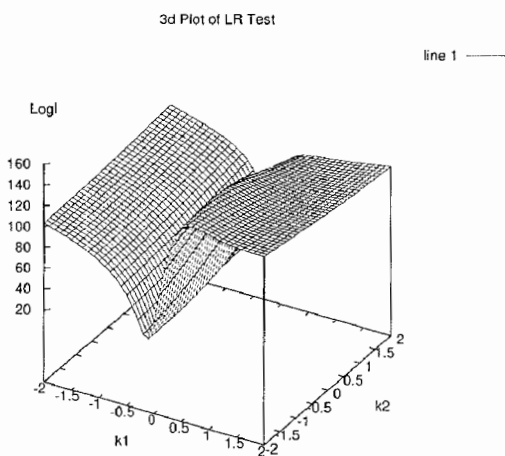


図16：定数項あり同次性の尤度比検定  
(等高線)

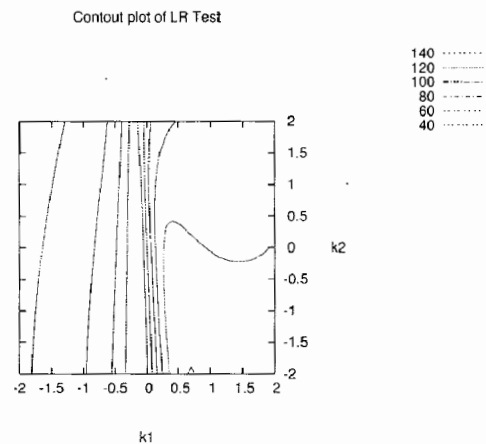


図 17：定数項あり対称性の尤度比検定 (3次元)

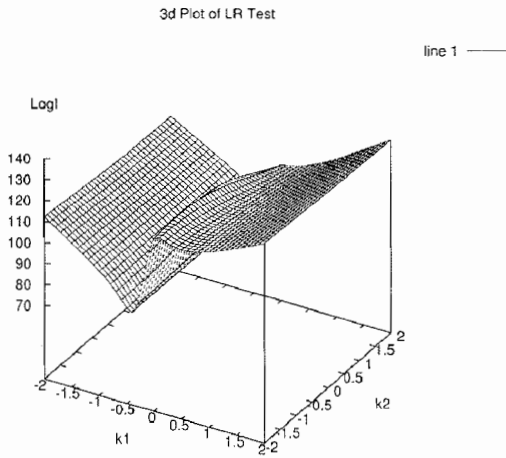


図 18：定数項あり対称性の尤度比検定 (等高線)

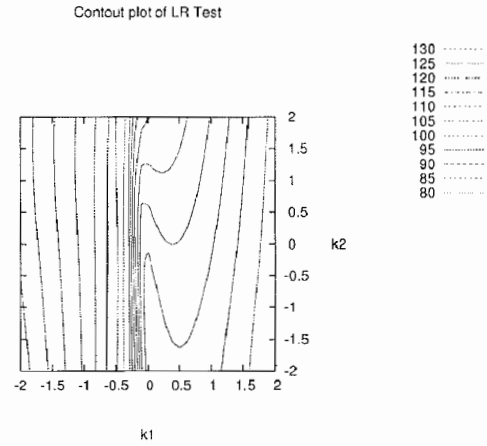


図 19：定数項なし同次性の尤度比検定 (3次元)

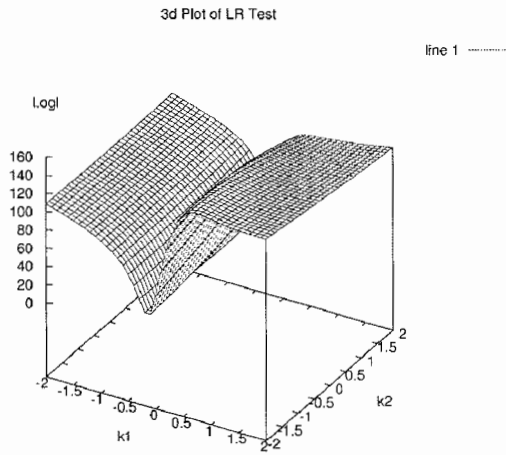


図 20：定数項なし同次性の尤度比検定 (等高線)

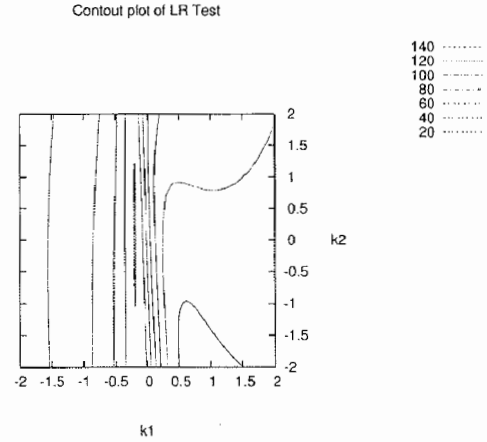


図 21：定数項なし対称性の尤度比検定 (3次元)

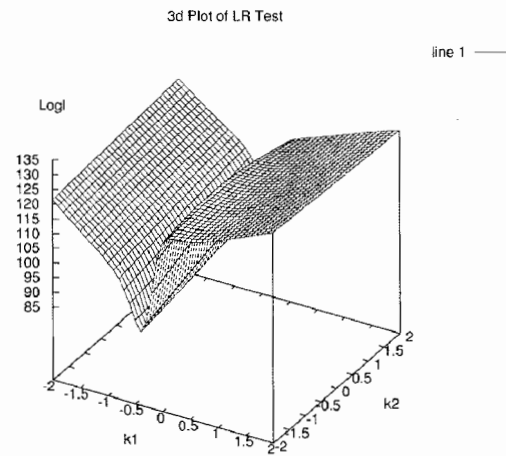
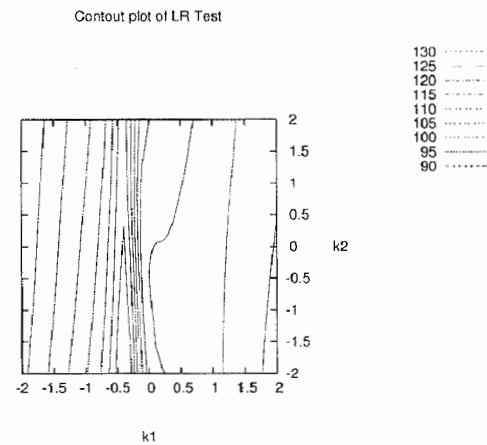


図 22：定数項なし対称性の尤度比検定 (等高線)



## 6 おわりに

本稿の結論は日本のデータを用いた場合も GD を除く四つのモデルの中では CBS が最も良いという結果を示した。この結果は Barten が示した結果と同様であるが、本稿ではさらに対数尤度の分布状況を確認することで CBS と Rotterdam のモデルの結合が他のモデルとの結合よりも優れていることが確認された。しかしながら、モデルとしては統計的に対称性の条件を満たさず、同次性の条件に関しても満足のいくものではない。完全に経済理論と整合的なモデルとするのにはまだまだ不十分である。

また、4モデルを包含する GD に関しては他のモデルに比較し、パラメータが多いことを含めフレキシブルであるが、入れ子モデルを利用した関係でパラメータの意味合いが人工的であり不明瞭である。Matsuda (2005) の研究のように一部パラメータは経済学的なインプリケーションがあるとしているが、これらのモデルの複合がどのような経済学的なインプリケーションを有するかを理解するには今後理論的な側面からの研究の発展に期待したい。

GD に関してはその作成方法から他のモデルに比較しフレキシブルなモデルであるといえるが、ただそのモデルで分析を行っても同次性や対称性は満たさなかった。経済学的な解釈からいえばそうした性質を満たすことが理想ではあるといえる。今後この点を含め、費目数を統合するなど費目数を減らすことを含め、得られるデータに適切に対応できるように詳細に検討していくことが必要であろう。

## 参 考 文 献

- [1] Barten, A. P. (1964), "Consumer Demand Functions under Conditions of Almost Additive Preferences", *Econometrica*, Vol. 1-2, pp. 1-38.
- [2] Barten, A. P. (1969), "Maximum Likelihood Estimation of a Complete System of Demand Equations", *European Economic Review*, Vol. 1, pp. 7-73.
- [3] Barten, A. P. (1993), "Consumer Allocation Models: Choice of Functional Form",

- Empirical Economics, Vol. 18, pp. 129-158.
- [ 4 ] Barten, A. P. and Geyskens E. (1975), "The Negativity Condition in Consumer Demand", European Economic Review, Vol. 6, pp. 227-260.
- [ 5 ] Deaton, A. S. and J. Muellbauer (1980), "An Almost Demand System", American Economic Review, Vol. 70, No. 3, pp. 312-326.
- [ 6 ] Fousekis, P. and B. J. Revell (2003), "Quadratic Differential Demand Systems and the Retail Demand for Pork in Great Britain", Journal of Agricultural Economics, Vol. 54, pp. 417-430.
- [ 7 ] Keller, W. J. and J. van Driel (1985), "Differential Consumer Demand Systems", European Economic Review, Vol. 27, pp. 375-390.
- [ 8 ] Matsuda, T. (2005), "Differential Demand Systems: A Further Look at Barten's Synthesis", Southern Economic Journal, Vol. 71, No. 3, pp. 607-619.
- [ 9 ] Neves, P. D. (1987), "Analysis of Consumer Demand in Portugal, 1958-1981", *Memorie de Maritrise en Sciences Economiques*, Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
- [10] Theil, H. (1965), "The Information Approach to Demand Analysis", *Econometrica*, 33, pp. 67-87.