

漸化式とランダム・ウォーク

久松博之

1. はじめに

本稿では、経済データの生成過程 (Data Generating Process : DGP) が確定的 (deterministic) なのか確率的 (stochastic) なのかを区別する問題について考える。

第2節では、矢島 (2003) を参考に、確定的な過程の一つであるロジスティック・マップから発生させたデータからその自己相関関数のグラフを描き、ホワイト・ノイズの自己相関関数と見分けがつかないことを示す。また、 $y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ で $\alpha = 1$ のとき誤差項 $\{\varepsilon_t\}$ が確定的な過程にしたがう場合と確率的な過程にしたがう場合 (正規乱数の場合) で $\{y_t\}$ を生成すると、標本自己相関関数のグラフが同じような形状を示す場合とそうでない場合があり、区別が難しいことをシミュレーションによって示す。

第3節では、Guegan (2001) の研究を整理する。確定的な過程の一つである一般化テント・マップから発生させたデータに、計量ファイナンスでよく使われる長期記憶過程 ARFIMA(0,d,0) をあてはめると、テント・マップのべき乗の値が 0.5 に近づくにつれて実数差分パラメーター d の推定値は大きくなり、いわゆる長期記憶性を示すようになることを指摘している。この場合、なぜそのような現象が生ずるかについては、井上 (2007) の研究を引用して説明する。

第4節では、Brock (1986) が提案した、与えられたデータの DGP が確定的なのか確率的なのかを区別する方法についてサーベイし、問題点を整理する。

その際、この方法を理解するために、カオスを特徴づける量として相関次元 (correlation dimension) とリアプノフ指数 (Lyapunov exponent) という概念を取り上げる。これら2つの概念と最大リアプノフ指数の推定方法について、宮野 (2002) と田中 (1997) をもとに説明する。

第5節では、実験的に発生させたデータのリターン・マップや統計量の分布から、データの生成過程が確定的か確率的か判断できるかどうか検討した結果を整理する。最後に、第6節でこの問題に対する筆者自身の考え方で、この問題の今後の課題と展望をまとめる。

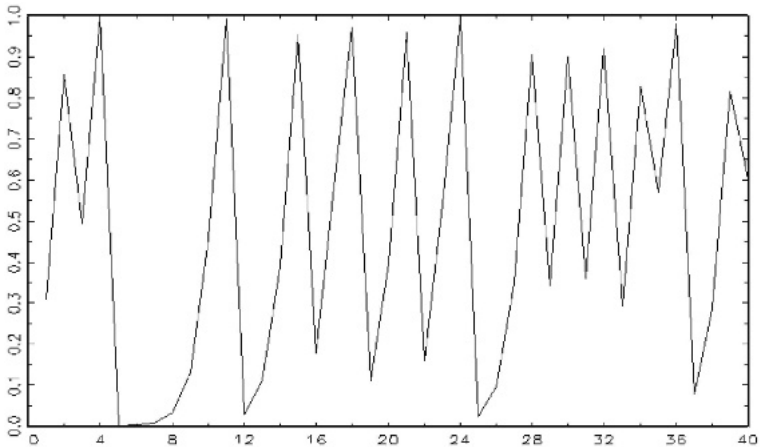
2. ロジスティック・マップとランダム・ウォーク

山口 (1986) ほかで確定的な過程の例として取り上げられている、ロジスティック・マップと呼ばれる非線形漸化式

$$X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1}) \tag{1}$$

より、系列 $\{X_t\}$ を生成してグラフを描くと図 2.1 のようになる。

図 2.1 $\{X_t\}$ のグラフ ($X_1 = 0.31$, $n=40$)



$\{X_t\}$ の標本分散，標本自己共分散，標本自己相関は，それぞれ次のように定義される．

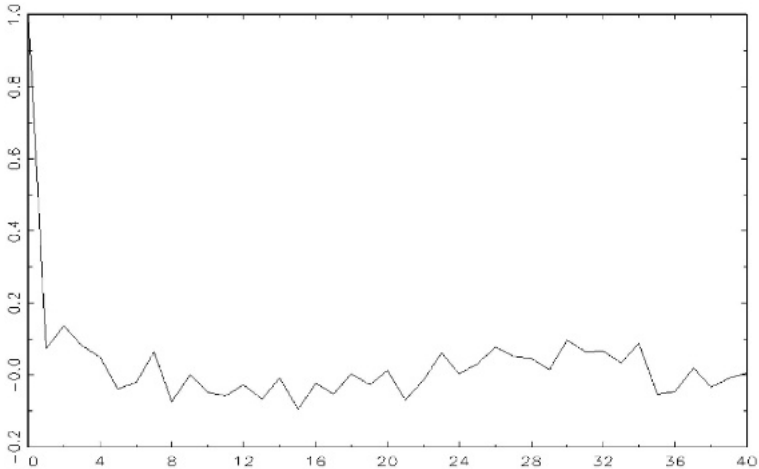
$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \quad (2)$$

$$\hat{\gamma}(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=s+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-s} - \bar{X}) \quad (3)$$

$$\hat{\rho}(s) = \hat{\gamma}(s) / \hat{\gamma}(0) \quad (4)$$

図 2.2 は $X_1 = 0.31$ ， $n=400$ のときの， $\{X_t\}$ の自己相関関数のグラフである．横軸目盛は時間の遅れ s で， $0 \sim 40$ まで取っている．

図 2.2 $\{X_t\}$ の自己相関関数 ($X_1 = 0.31$ ， $n=400$ ，横軸は遅れ s)



矢島 (2003) で指摘されている通り， $\hat{\rho}(s)$ はホワイト・ノイズのそれと同様，すべての s で 0 に近い値を取ることがわかる．なお，矢島 (2003) p.189 の図 29 は，図 28 の(a)，(b)どちらのデータの自己相関関数なのか明記されていないが，(a)の初期値が $X_1 = 0.30$ のときの，遅れ s を $0 \sim 40$ まで取った時のグラフである．

ここで、漸化式(1)から生成された「確定的な」系列 $\{X_t\}$ を次のように変換する。

$$\varepsilon_t = (X_t - 0.5) / \sqrt{1/8} \quad (5)$$

(5)式の変換によって得られる $\{\varepsilon_t\}$ は確率変数ではなく、「確定的」な系列である。矢島(2003)より、ロジスティック・マップ(1)を満たす確率変数

$$X_t = \sin^2(2^{t-1} \pi U), \text{ ただし, } U \text{ は}[0,1] \text{ 上の一様分布,}$$

の期待値は0.5, 分散は1/8であることがわかっている。 $\{X_t\}$ がこの分布から生成される確率変数であれば(5)式は標準化を意味することになるが, $\{X_t\}$ は「確定的」な過程であるから $\{\varepsilon_t\}$ は確率変数ではなく「確定的」な系列である。

$X_1 = 0.31$, $n=400$ のときの $\{\varepsilon_t\}$ のグラフは, $\{X_t\}$ の線形変換なので, 図2.1の縦軸目盛の中央0.5が0に変わるだけで, 形は全く同じになる。また, 横軸に遅れsを40まで取った $\{\varepsilon_t\}$ の自己相関関数のグラフは図2.2と全く同じになる。

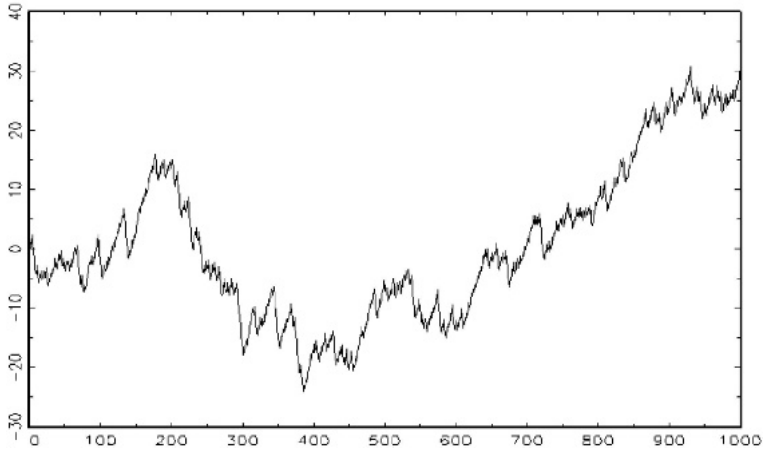
このとき,(5)式の $\{\varepsilon_t\}$ を用いて

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

により $\{y_t\}$ を生成する。 $\alpha = 1$, $y_0 = 0$ である。

図2.3は,(6)式で生成された系列 $\{y_t\}$ のグラフである。系列 $\{X_t\}$ およびそれを変換した系列 $\{\varepsilon_t\}$ は, 初期値 $X_1 = 0.31$ に依存してその後の動きが決まるので, $X_1 = 0.31$ である限り, $\{y_t\}$ はこの図の通りの動き方ししない。この場合, $\{\varepsilon_t\}$ は「確定的」な過程であるから $\{y_t\}$ も「確定的」な過程になる。この図を一見すると, $\{\varepsilon_t\}$ が確率的に変動する場合のランダム・ウォークとよく似ている。

図 2.3 $\{y_t\}$ のグラフ ($X_1 = 0.31$, $y_0 = 0$, $\alpha = 1$, $n=1000$)



$n=400$, 遅れ $s=0\sim 40$ のとき, $\{\varepsilon_t\}$ が (5) 式で生成される場合の $\{y_t\}$ と, $\{\varepsilon_t\}$ を標準正規乱数で生成した場合の $\{y_t\}$ の自己相関関数のグラフを横軸に遅れ s を取って描くと, 右下がりのなめらかな線になる場合が多く, 自己相関関数のグラフから, どちらの生成過程か見分けることは難しい.

図 2.4(a)は, $X_1 = 0.31$, $y_0 = 0$, $\alpha = 1$, $n=10000$, 遅れ $s=0\sim 4000$ を横軸に取ったときの, $\{\varepsilon_t\}$ が (5) 式で生成される場合の $\{y_t\}$ の標本自己相関関数のグラフである. また, 図 2.4(b)は, $y_0 = 0$, $\alpha = 1$, $n=10000$, 遅れ $s=0\sim 4000$ の時の $\{\varepsilon_t\}$ を標準正規乱数で生成した場合の $\{y_t\}$ の自己相関関数のグラフである.

2 つのグラフはたまたま似たような形状を呈しているが, 前者は初期値を変えると様相を異にし, 後者は再試行すると様相を異にする. 観測値数 $n=10000$, 遅れ $s=0\sim 4000$ のように遠くの時点まで取ったとき, 同じような形になる場合とそうでない場合があり, 自己相関関数 $\hat{\rho}(s)$ を計算してそのグラフを見比べることで, ランダム・ウォーク $\{y_t\}$ が確定的な過程から生成されたのか, 確率的な過程から生成されたのか見分けることは難しい.

図 2.4(a) $\{y_t\}$ の自己相関関数 ($X_1 = 0.31$, $n=10000$)

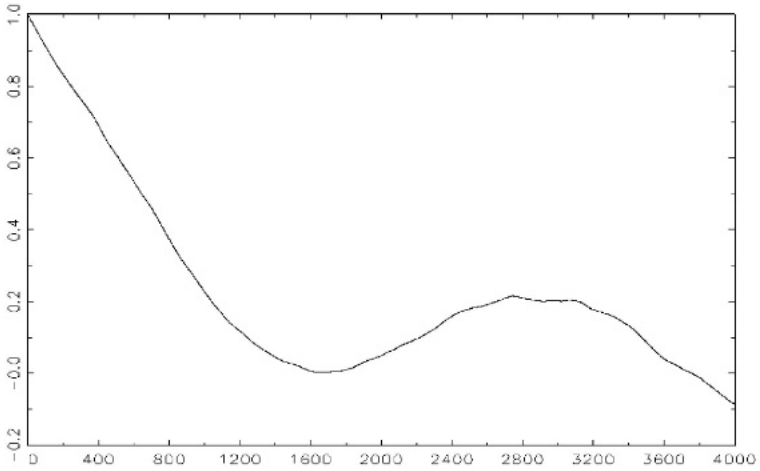
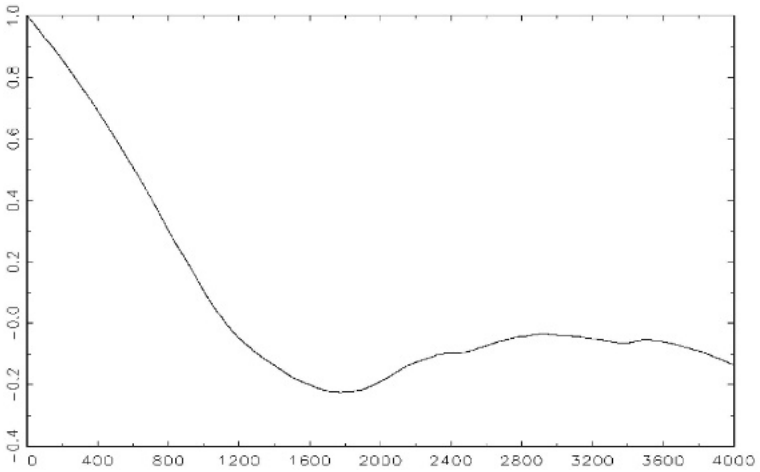


図 2.4(b) $\{y_t\}$ の自己相関関数 (ε_t は正規乱数, $n=10000$)



3. 一般化テント・マップと ARFIMA モデル

Guegan (2001) は、確定的な過程の一つである一般化テント・マップ

$$X_t = 1 - (1 - 2X_{t-1})^\nu, \quad 0 \leq X_t < 1/2 \quad (7 \text{ a})$$

$$X_t = 1 - (2X_{t-1} - 1)^\nu, \quad 1/2 \leq X_t \leq 1 \quad (7 \text{ b})$$

から発生させたデータに ARFIMA(0,d,0)モデルをあてはめ、Whittle 推定で実数差分パラメーター d の値を推定すると、 ν の値が 0.5 に近づくにつれて d の推定値は大きくなり、いわゆる長期記憶性を示すようになることを示した。なお、一般化テント・マップは $\nu = 2.0$ のときロジスティック・マップになる。以下は、Guegan (2001) p.2148 の Table1 である。

ν	\hat{d}
0.5	0.4029
0.6	0.1916
0.7	0.0641
0.8	0.0464
0.9	0.0177
1.0	0.0156

本稿での関心は、なぜ ν が 0.5 に近づくとき長期記憶性を示すようになるのかということと、データ生成過程 (DGP) が確定的なのか確率的なのかをどう区別すればいいかということである。

前者に関しては井上 (2007) の先行研究がある。そこではまず、Guegan (2001) の研究をフォローし、一般化テント・マップで生成された時系列に ARFIMA(0,d,0)モデルをあてはめ、実数差分パラメーター d を Whittle 推定している。

矢島 (2003) および Beran(1994)にしたがって ARFIMA(p,d,q)モデルのパラメーター推定法を整理する.

ARFIMA(p,d,q)モデルは以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned} (1-\phi_1L-\phi_2L^2-\dots-\phi_pL^p)(1-L)^d X_t &= (1-\theta_1L-\theta_2L^2-\dots-\theta_qL^q)U_t \\ \phi(L)\nabla^d X_t &= \theta(L)U_t \end{aligned} \tag{8}$$

ここで, $\nabla^d = (1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-L)^j$, d は任意の実数, j は非負整数,

また, $\binom{d}{j}$ は一般化された 2 項係数で,

$$\binom{d}{j} = \frac{d!}{j!(d-j)!} = \frac{d(d-1)\cdots(d-j+1)}{j(j-1)\cdots 1} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d-j+1)} \tag{9}$$

である.

自己相関関数が短期間で 0 に収束する場合を「短期記憶系列」といい, 0 になかなか収束しない場合を「長期記憶系列」という. ARFIMA(p,d,q)モデルは $0 < d < 0.5$ のとき「長期記憶系列」になる. $d < 0.5$: 定常長期記憶系列, $d > 0.5$: 非定常長期記憶系列, $d = 0$: ARMA(p,q)過程である.

このとき, 推定するパラメーターを $\beta = (d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$ と表記し

観測値ベクトルを $X_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ とすると, 尤度関数は

$$L(\beta, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\Gamma_n(\beta, \sigma^2)|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} X_n' \Gamma_n^{-1}(\beta, \sigma^2) X_n\right) \tag{10}$$

と書くことができる. これを最大にする β, σ^2 が「最尤推定量」である.

$\Gamma_n(\beta, \sigma^2)$ は β, σ^2 が真のときの $n \times n$ の共分散行列で、 $\Gamma_n(\beta, \sigma^2)$ の (i, j) 成分は $\gamma(i-j)$ である。 $L(\beta, \sigma^2)$ を最大にするには $\Gamma_n(\beta, \sigma^2)$ の逆行列と行列式を求める必要があるが、計算が複雑なので $\log L(\beta, \sigma^2)$ の定数部分を除去した次の近似式（疑似尤度関数）が使われる。

$$U_n(\beta, \sigma^2) = -\frac{1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{2\pi \cdot I_n(\lambda_j)}{ng(\lambda_j; \beta)} \quad (11)$$

を最小にする β, σ^2 がいわゆる「Whittle 推定量」である。

(10) を最大にする「最尤推定量」も、(11) 式を最小にする「Whittle 推定量」も、いずれも一致推定量であり極限分布は同一の正規分布になる。ただし、漸近的には同値な推定量であっても、小標本での推定の精度はどちらが優れているかが問題になるが、それに関する研究についてはここでは省略する。このとき、(11) 式の右辺第1項と第2項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \log |\Gamma_n(\beta, \sigma^2)|^{-1/2} &= -\frac{1}{2} \log |\Gamma_n(\beta, \sigma^2)|, \\ \log \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} X_n' \Gamma_n^{-1}(\beta, \sigma^2) X_n \right) \right\} &= -\frac{1}{2} X_n' \Gamma_n^{-1}(\beta, \sigma^2) X_n \end{aligned}$$

を近似する項になっている。ここで、 $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j U_{t-j}$ の ψ_j は β に依存する

るのでこれを $\psi_j(\beta)$ と書くと、

$$g(\lambda; \beta) = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\beta) e^{-ij\lambda} \right|^2, \quad I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-it\lambda} \right|^2$$

となる. Beran(1994)より,

$$Y_t = \nabla^d X_t = (1-L)^d X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-L)^j X_t = \tau(L)X_t \quad (12)$$

であるから, $\{Y_t\}$ のスペクトル密度関数は

$$f_Y(\lambda) = \frac{\sigma^2 |\theta(e^{i\lambda})|^2}{2\pi |\phi(e^{i\lambda})|^2} \quad (13)$$

となる.

一方, $\tau(e^{i\lambda}) = (1 - e^{i\lambda})^d$ であるから, ARFIMA(p,d,q)過程 $\{X_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_X(\lambda)$ は

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|^2}{|\phi(e^{i\lambda})(1 - e^{i\lambda})^d|^2} \quad (14)$$

で与えられる. $I_n(\lambda)$ はピリオドグラムで, $f(\lambda)$ の一つの推定量である.

このとき, 周波数 $\lambda_j = 2\pi j/n$, $j = 1, 2, \dots, n$ はフーリエ周波数と呼ばれる.

井上 (2007) では, ν が 0.5 に近づくにつれて d の推定値は大きくなり, 長期記憶性を持つことをグラフで示している. そのうえで, Whittle 推定の推定誤差を小さくするために情報量を用いる方法を提案している.

一般化テント・マップが, $X_{t+1} = T_\nu(X_t)$, 具体的には Guegan の定義 (7 a) (7 b) で与えられるとき, 井上 (2007) の表記を使えば, 微分可能な滑らかな 1 次元写像 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ に対して,

$$L_O(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \left| \frac{df}{dX}(X_i) \right| \quad (15)$$

を、軌道 $O \equiv \{f^N(X_0) : N = 0, 1, 2, \dots\}$ のリアプノフ指数 (Lyapunov exponent) という。初期値 X_0 によらず $L_O(f)$ が一定であるとき、単に $L(f)$ と書く。リアプノフ指数は軌道 O の平均的な指数発散の度合いを表し、リアプノフ指数が正の値を取るとき、軌道 O がカオスとなり、正の値が大きいほどカオスが強くなる。

井上 (2007) は、Guegan (2001) が見出した、一般化テント・マップから発生させたデータに ARFIMA(0,d,0) モデルをあてはめるとき、 ν の値が 0.5 に近づくにつれて d の Whittle 推定値は大きくなり、いわゆる長期記憶性を示すようになるのは、「 $\nu=0.5$ のときリアプノフ指数が 0 となりカオスの縁となることで軌道は初期値に関するべき乗的依存性を持つことから、軌道が自己相似構造を示し長期記憶性を持つ。」からだと説明している。

4. データ生成過程 (DGP) が確定的か確率的か区別する方法

データ生成過程 (DGP) が確定的か確率的か区別する方法の一つに Brock (1986) がある。この方法を理解するために、カオスの特徴づける量として次元 (dimension) とリアプノフ指数 (Lyapunov exponent) という概念を知る必要がある。この 2 つの概念は、それぞれ、カオスの性質であるアトラクター (attractor) の存在と初期値敏感性に対応している。

確率的な過程の特徴は自己共分散、自己相関関数、パワースペクトルなどで表すことができるが、次元とリアプノフ指数はこれらに代わるカオスの特徴を捉えるための重要な概念である。それらの概念と最大リアプノフ指数の推定方法について、宮野 (2002) と田中 (1997) をもとに時系列データから次元とリアプノフ指数を推定し、時系列のカオス性を実証する方法を整理する。

4.1 アトラクターとその次元

カオスシステムでは、初期状態の設定時における無限小の差が、時間が経つにつれて見る見る増幅され、有限の大きさまで成長する。これを「軌道不安定性 (orbital instability)」という。軌道間距離の増加速度を示す量が「リアプノフ指数」である。カオスでは、状態空間における周期的軌道はすべて不安定になるが、軌道が不安定だからといって無限の彼方まで軌道が飛び去ることはなく、どのような初期条件から始めても、時間が十分に経過すると軌道は状態空間のある有界閉領域に閉じ込められる。

カオスでは、その動学を構成する n 変数すべてを集めて n 次元空間にプロットすれば空間内にある形が現れる。軌道がそこに引き寄せられ、その上を動き続けるという意味でこの領域を「アトラクター (attractor)」と呼ぶ。次の図は、第2節(1)式、ロジスティック・マップで、それぞれ $X_1 = 0.31$, $n=40$ と $n=1000$ のときに生成された系列 $\{X_t\}$ について、横軸に $\{X_{t-1}\}$, 縦軸に $\{X_t\}$ を取った図 (リターン・マップ) である。

いずれも、最も外側の点で構成される2次曲線がアトラクターである。

図 4.1 ロジスティック・マップのリターン・マップ: $X_1 = 0.31$, $n=40$

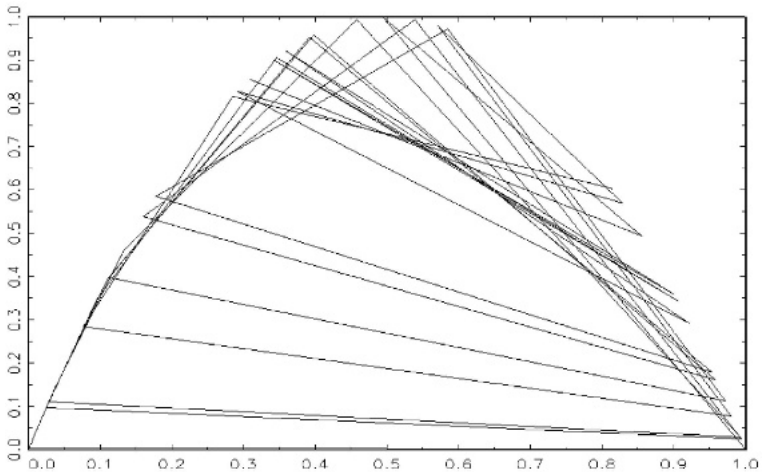
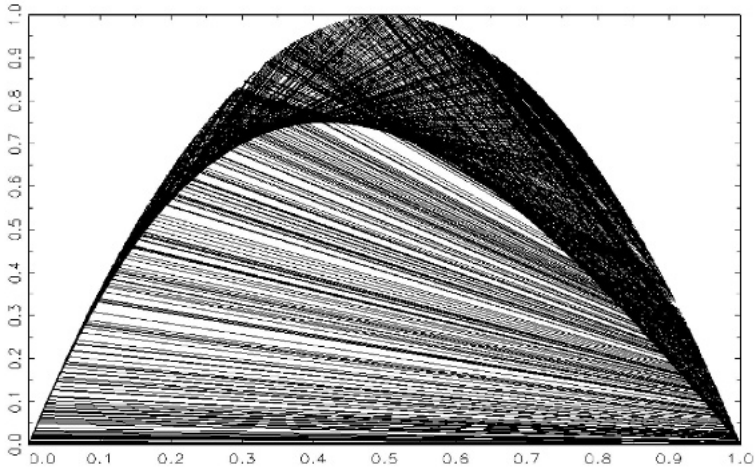


図 4.2 ロジスティック・マップのリターン・マップ: $X_1 = 0.31$, $n=1000$



さて、アトラクターの存在を示すことができればそのシステムがカオスであると判断できるが、我々はカオスシステムを構成する変数がどんなものかわからず、1つの変数だけ観測するので、それが確率的なのか確定的なのか判断できない。

たとえば、レスラー (Rossler) 方程式は次のような3つの変数の連立微分方程式になっている、

$$\begin{aligned}
 dx/dt &= -y + z \\
 dy/dt &= x + 0.2z \\
 dz/dt &= 0.2 + y(x - c)
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

という関係が成り立つ。このとき、これら3つの変数をそれぞれ軸に取った立方体の中にアトラクターができる。実際に時系列データ $\{x_i\}$ が1系列与えられて、この系列が確定的か確率的か判断しようとするとき、背後にそのような関係があってカオスが成り立っているとすれば、この1系列の

みからどうやってそのアトラクターの存在を突き止めたらいかがが問題になる。

その場合のアトラクターの存在を示す手立てが「ターケンス (Takens) の埋め込み定理 (embedding theorem)」である。 $\{x_t\}$ の時間遅れの項を組み合わせ $x_t = (x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L))$ のようにベクトル化し、埋め込み次元 m と時間の遅れ L を適切に選択すると、3変数を使わなくても元のアトラクターと似た形を得ることが出来る。それによってカオスの存在を判断するというもので、 k 次元空間にあった元のアトラクターと同じ性質を持ったアトラクターが m 次元空間に再現できる (埋め込める)。関係している k 個の変数をすべて観測しなくても、1個の変数の過去の値だけから、アトラクターを埋め込み空間内に再構成できる。

アトラクターの有無を調べるには、 m 次元空間内に埋め込んだデータに形があるか見れば良いが、3次元を超えると目で見て判断することはむずかしいので、定量的に測定できる方法が必要となる。そのためには m 次元空間内に埋め込んだ点がかたちづくる図形の次元を測定出来れば良い。

次元を測定する方法の一つ、相関次元 (correlation dimension) は比較的データが少なくても測定可能なので広範に利用されている。相関次元を求めるアルゴリズムで具体的によく使われるのは、グラスバーガー-プロカッチア (Grassberger and Procaccia (1983)) のアルゴリズムである。

田中 (1997) の説明がわかりやすい。2次元空間 ($m=2$) に埋め込んだ時、プロットした点が一面に散在している場合と線上に分布している場合を考えると、前者の次元は2、後者の次元は1と考えられる。これを直感ではなく定量的に観測する方法が必要になる。プロットした空間内のある点を取り、そこを中心とした半径 r の円を描く。この円の中に点がいくつあるか数え個数 C を測定する。円の半径 r が大きくなれば円内に含まれる点の数は増えるので C は r の関数である。 r を大きくしていったとき個数がどう増えるかを考える。まんべんなく点在していて r が大きくなれば、個数 C は円の面積にほぼ比例して増加すると考えられるので

$$C(r) \approx ar^2 \quad (17)$$

となる．一方，プロットした平面に点が直線的に分布している場合は，円の中に入った直線の長さにほぼ比例して増えると考えられる．つまり，円内に含まれる点の数は円の直径（したがって半径 r ）にほぼ比例して増えると考えられるので

$$C(r) \approx br \quad (18)$$

である．したがって，実際のデータをプロットし， $C(r)$ を r の関数として測定して， $C(r)$ が半径 r のどのような関数が調べればよい． $C(r)$ が r の 2 乗に比例すれば 2 次元的に， r の 1 乗に比例すれば 1 次元的に点が分布していることになる．実際に計算する場合は

$$C(r) \approx \alpha r^d \quad (19)$$

の対数を取り

$$\log C(r) \approx d(\log r) + \log \alpha \quad (20)$$

より傾き d を計算すれば，プロットした点の次元が得られる．このアイディアにもとづいて，すべての点を出発点に取って $C(r)$ を計算しその平均的な挙動を調べる．これを定式化したものが，グラスバーガープロカッチア (Grassberger-Proccacia) のアルゴリズムである．

$$\begin{aligned} & \{x(t)\}, t = 1, 2, \dots, n \\ x_t = & (x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L)), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & t = 1, 2, \dots, T, (T = n - (m-1)L) \\ C_m(r) = & \# \text{ of } \{ \{x_i, x_j\} \mid r > |x_i - x_j| \} / T^2 \end{aligned} \quad (22)$$

データが n 個の時系列 $\{x(t)\}, t = 1, 2, \dots, n$ として与えられているとする．最初に埋め込み次元 m を決め，データを m 個ずつまとめてベクトル x_t の系列を作る． L はサンプリング間隔（時間の遅れ）である．

次に系列 $\{x(t)\}, t=1,2,\dots,n$ を m 次元空間に埋め込み, 埋め込んだ点データの次元を測定する. $|x_i - x_j|$ は埋め込んだ 2 つの点 x_i, x_j の距離, また, # of $\{ \}$ は集合 $\{ \}$ の要素の個数である. 埋め込んだ点のすべてのペア (ペアの総数は T^2) の間の距離を調べ, そのうち距離が r より小さいペア (x_i, x_j) の個数を求める. このとき「すべての点」とすると $i=j$ が含まれるが, 無意味なので

$$C_m(r) = \# \text{ of } \{(x_i, x_j) \mid r > |x_i - x_j|, i < j\} / (T(T-1)/2) \quad (2.3)$$

とすればよい. $C(r)$ は埋め込み次元にも依存するので $C_m(r)$ としてある. 2 点間の距離は, ユークリッドの距離

$$|x_i - x_j| = \sqrt{\sum_k \{x(i+kL) - x(j+kL)\}^2} \quad (2.4)$$

でも, 最大値ノルム

$$|x_i - x_j| = \max_k |x(i+kL) - x(j+kL)| \quad (2.5)$$

でもよい. $C_m(r)$ の対数を取り r の対数を取って

$$\log C_m(r) \approx d(\log r) + \log \alpha \quad (2.6)$$

より, 相関次元 d を求める. 具体的には縦軸に $\log C_m(r)$ を, 横軸に $\log r$ を取って m の値ごとのグラフを描く. 次に, 縦軸に相関次元 d を, 横軸に埋め込み次元 m を取ってグラフを描く. このグラフで m が大きくなるに

したがって相関次元 d が上昇せず飽和すれば（一定値を取るようになれば）、アトラクターの存在が示唆される。

宮野（2002）では、埋め込み空間の多様体の体積を V ，体積を測る尺度を M とするとき、アトラクターの次元は

$$V \propto M^{D_a}, \quad D_a = \frac{\log V}{\log M} \quad (27)$$

によって与えられ、互いに距離が r 以内にあるベクトル対の総数を

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \theta[r - |x(i) - x(j)|], \quad (28)$$

N は(22)式の T と同義で、 $z > 0$ のとき $\theta(z) = 1$ ， $z \leq 0$ のとき $\theta(z) = 0$ とすると、相関次元は

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (29)$$

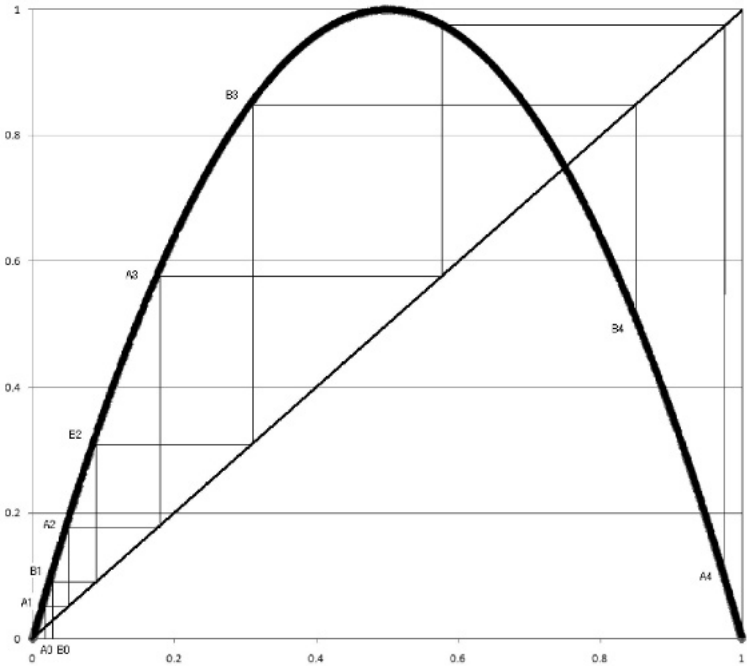
で与えられる。田中（1997）の d と意味は同じである。

4.2 リアプノフ指数 (Lyapunov exponent) について

カオスの特徴づけるもう一つの量として、リアプノフ指数 (Lyapunov exponent) がある。次の図 4.3 は図 4.2 の 2 次曲線を貼り付け、わずかな距離しかない初期値 A_0, B_0 から、どのようにその距離が引き伸ばされていくか示した模式図である。

初期値 A_0, B_0 の距離はわずかだが、1 回目の写像で A_1, B_1 と距離が延び、2 回目の写像で A_2, B_2 、3 回目の写像で A_3, B_3 、4 回目の写像で A_4, B_4 と距離が飛躍的に引き延ばされる。これが毎回繰り返されるので A, B 線分の距離は急激に広がっていく。この模式図は「引き延ばし」のみで「折り畳み」は再現されていない。初期値の取り方による。

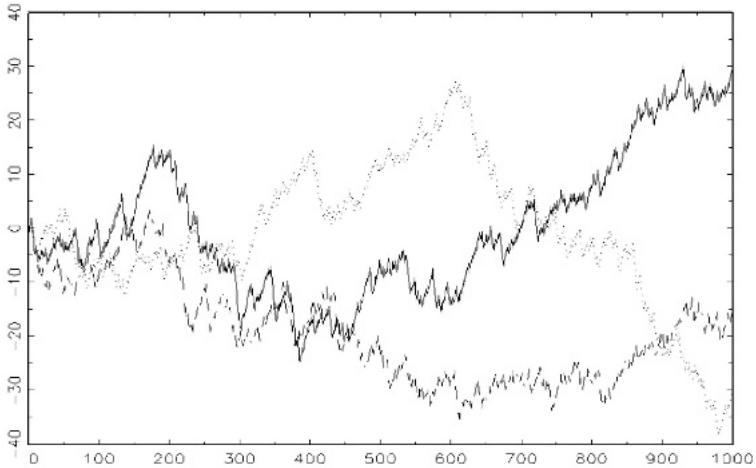
図 4.3 ロジスティック・マップの「引き延ばし」



田中（1997）によれば，リアプノフ指数はカオスが持つ初期値敏感性を指数関数で近似して定量化したものである．初期値敏感性とは，わずかに違う 2 つの初期値 $x(0)$ ， $x'(0)(= x(0) + \varepsilon)$ を取ると，時間 t の経過とともに軌道の差 $x(t) - x'(t)$ が指数関数的 ($\varepsilon \cdot e^{\lambda t}$) に増加していくことをいう．時間とともに軌道は急激に離れていくので，カオスでは方程式がわかっていても遠い先までの将来予測は難しい．

次の図は，初期値敏感性を示すために，初期値を 0.0001 ずつ違えて $X_1 = 0.31$ ， $X_1 = 0.3101$ ， $X_1 = 0.3102$ と設定し， $n=1000$ で(6)式から $\{y_t\}$ を生成し経路をグラフにしたものである．初期値は微小な違いでも，時間が経つにつれてかけ離れていき，それぞれ，実線，破線，点線の通り全く違う経路をたどる．このうち，実線は図 2.3 と同じグラフである．

図 4.4 初期値敏感性：初期値がわずかに違う場合の $\{y_i\}$ の動き



レスラー (Rossler) 方程式では 3 次元空間にアトラクターが埋め込まれる。初期状態として一辺が a の立方体を考えると、「引き延ばし」が起きるとすれば、 x 軸、 y 軸、 z 軸の 3 通りの方向があるので、3 方向への「引き延ばし」の可能性を考えることになる。時間 t だけ経過したあとに変形された立方体の 3 本の各辺の線分の長さを l 、 m 、 n とすると、それを指数関数で近似した式は

$$\begin{aligned} l &= a \cdot \exp(\lambda_1 t) \\ m &= a \cdot \exp(\lambda_2 t) \\ n &= a \cdot \exp(\lambda_3 t) \end{aligned} \quad (30)$$

となる。このとき、 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 を「リアプノフ指数 (Lyapunov exponent)」という。埋め込み空間の次元の数だけ存在するので、レスラー方程式の場合は 3 個存在する。時間の経過とともに立方体内のすべての点は平べったいアトラクターに近づいてゆく。引き延ばされる方向のリアプノフ指数は正であり、圧縮される方向のリアプノフ指数は負である。

初期値敏感性が生じるためには、最大リアプノフ指数 (maximum Lyapunov exponent) が正であれば十分で、一つでもリアプノフ指数が正であれば軌道はどんどん離れていく。したがって、「カオスの判定条件」の一つは、「最大リアプノフ指数が正」ということになる。

宮野 (2002) によれば、リアプノフ指数とは初期条件における無限小の違いが時間の経過とともにどのくらいの速さで増幅されるかを測る量である。\$D\$ 次元の状態空間に置かれた無限小球を考える。初期時刻における無限小球の半径を \$r(0)\$ とすると、時間の経過にしたがってこの小球は複雑に変形し、ある小さな楕円体になるとする。変形の過程である方向に膨らみ別の方向には縮むとすれば、小球が膨らむ方向はダイナミクスの不安定な方向であり、縮む方向は安定な方向と一致する。楕円体の最長主軸の長さを \$r_1(t)\$ で表し、各主軸の長さを大きい順に \$r_2(t), \dots, r_D(t)\$ とする。第 \$i\$ 番目の主軸長を \$r_i(t)\$ で表すと、その軸に平行な方向のリアプノフ指数 \$\lambda_i\$ は

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{r_i(t)}{r_i(0)} \quad (3.1)$$

で定義される。

田中 (1997) のレスラー方程式の例に戻ると、たとえば \$l = a \cdot \exp(\lambda_1 t)\$ より

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{l}{a} \quad (3.2)$$

のように、宮野 (2002) と同様に定義できる。リアプノフ指数はその値が順序づけられ

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_D$$

となる。\$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D\}\$ をリアプノフ・スペクトル (Lyapunov spectrum) という。このとき、\$\lambda_1\$ は「最大リアプノフ指数」と呼ばれ、\$\lambda_1 > 0\$ ならばその方向に生じた変動は時間の経過とともに指数関数的に成長する。このことはダイナミクスの不安定性を意味し、予測不可能なカオス過程

の特徴の源泉になる。したがって、ある時系列データが与えられた時、それがカオスかどうかを判断するには、動的な挙動がカオス性を持つ条件、 $\lambda_1 > 0$ 、つまり最大リアプノフ指数が正であるかどうかを調べればよい。

4.3 最大リアプノフ指数の推定法

最大リアプノフ指数をどうやって測定すればよいか。田中 (1997) では、観測されたデータを使ってアトラクター上でたまたま距離の近づいた 2 点がある後どの程度の速度で離れたかを測定する Wolf (1985) の方法が紹介されているが、直感的でわかりやすい半面、最大リアプノフ指数しか求められないこと、ノイズが混入していると推定値が過大になりやすいという欠点が指摘されている。ここでは、宮野 (2002) で紹介されている Sugihara and May (1990) の方法について説明する。

表記を田中 (1997) に合わせて時差を L 、埋め込み次元を m で表すと、確定的な痕跡が残存するような短い時間スケールでカオス過程を眺めると、過去から現在に至るまでの変動と、現在から $\tau \cdot L \Delta t$ 離れた時点における変動との間に、ある程度の因果関係が観測される。 τ 時間ステップ後の予測値を $\hat{x}(t + \tau \cdot L)$ と表すとき、この因果関係は

$$\hat{x}(t + \tau \cdot L) = \hat{F}_\tau[x(t)],$$

$$x(t) = (x(t), x(t-L), \dots, x(t - (m-1)L)) \quad (3.3)$$

によって捉えることができる。 \hat{F}_τ はダイナミクスを近似する関数でカオス過程の場合、非線形関数となる。ここで、記述を簡単にするために $L=1$ とする。このシステムを使って $x(t + \tau)$ を予測する場合、予測値を $\hat{x}(t + \tau)$ とすると、 τ 時間後の予測値と実測値の平均 2 乗平方根誤差を実測値の標準偏差 $\hat{\sigma}$ で基準化した値

$$\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sqrt{\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (x(t_i + \tau) - \hat{x}(t_i + \tau))^2} \quad (3.4)$$

によって予測誤差を表す。ここで、 N_p は予測点の数である。 $\varepsilon(\tau)$ を τ の関数とすると、

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(1) \exp[\lambda \cdot (\tau - 1)] \quad (3.5)$$

が成り立つ。

図 4.3 で見たように、初期時刻において近接した位置にある 2 つの軌道間の距離を表す線分は、時間の経過にしたがって指数関数的に増大する。予測誤差は軌道間距離に対応するので、この式の λ は最大リアプノフ指数 λ_1 に近似的に等しい。この式を変形すれば

$$\log[\varepsilon(\tau) / \varepsilon(1)] = \lambda \cdot (\tau - 1) \quad (3.6)$$

であるから、最大リアプノフ指数が正かどうかを判定するには、左辺 $\log[\varepsilon(\tau) / \varepsilon(1)]$ を計算し、この値を $\tau - 1$ に対してプロットしてその傾きを見るなり、 $\log[\varepsilon(\tau) / \varepsilon(1)]$ を $\tau - 1$ に単回帰して傾きを推定し符号を見ればよい。この方法では少量のデータからでも有意義な情報を引き出せるとされている。

4.4 データ生成過程が確定的か確率的か区別する方法

データ生成過程 (DGP) が確定的か確率的か区別する Brock (1986) の方法は、次の 3 つのステップを踏む。

Step1: 次元 (相関次元) を計算し、それが小さいことを示す。

Step2: 最大リアプノフ指数の値を計算し、それが正であることを示す。

Step3: 残差検定を行う。

以下では、次元 (相関次元) の計算に関する諸問題、残差検定とは何か、カオス性の検証とデータの定常性について説明する。

(1) 次元(相関次元)の計算方法に関する問題点について

Brock (1986) は, Step1 で相関次元を Grassberger-Proccacia アルゴリズムを使って計算しているが, この方法は, 大量のデータを必要とするので, 経済時系列データのように比較的少量のデータに適用することには無理がある. また, このアルゴリズムは, 確定的なカオス過程と確率的な非整数ブラウン運動を識別できないという重大な欠点を持っているので, まともに相関次元を計算しようと思えば, これに代わる手法が必要になる.

宮野 (2002) によれば, Grassberger-Proccacia アルゴリズムのようにアトラクターの次元を直接推定するのではなく, 適切な埋め込み次元 (embedding dimension) を求めることによって, 次元の上限値を推定する方法を提示している. 一つは「FNN 法」と呼ばれる偽近接点 (false nearest neighbors : FNN) が消滅する埋め込み次元を探索する方法で, もう一つは, 埋め込み空間で再構成された「近接軌道群の方向の分散にもとづく方法」である. いずれも, Grassberger-Proccacia アルゴリズムほど大量のデータを必要としないこと, また, 決定的な長所は, 確定的なカオス過程と確率的な非整数ブラウン運動をはっきり識別できるとされていることである.

このうち特に, 後者すなわち「近接軌道群の方向の分散にもとづく方法」は, 時系列のカオス性の程度 (degrees of visible determinism) を定量的に評価できるので, アトラクターの次元を直接推定しないにもかかわらず, 有用な情報をもたらす. ここでは, 2つの方法のうち近接軌道群の方向の分散にもとづく方法の具体的なアルゴリズムについて説明する.

Wayland, Bromley, Pickett and Passamante(1993)の「近接軌道群の分散に基づく方法」(以下, 「Wayland らの方法」と略す)では, 埋め込みにおける時差を L としサンプリング時間を Δt とすると, カオスシステムの挙動を $\tau L \Delta t$ の時間スケールで観測したとき時間発展に決定論的な側面が認められるということは, 埋め込みにより再構成された軌道群の近接した部分が, $\tau L \Delta t$ 時間経過後に近接した部分に移されることを意味しており, これを捉えることにより複雑な挙動に残存する決定論的な側面, つまり変化における因果性の程度を定量的に評価することができる.

ある時刻 t_0 におけるベクトル $x(t_0)$ について K 個の最近接ベクトルを見つける。これらのベクトルを $x(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, K$ と表すと, τ 時間経過すると $x(t_i)$ は $x(t_i + \tau L)$ に移される。このとき時間の経過に伴う各軌道の変化は

$$v(t_i) = x(t_i + \tau L) - x(t_i) \quad (37)$$

によって近似される。 $v(t_i)$ の方向の分散を計算すれば, 軌道の方向がどのくらい揃っているか, つまり, 時間とともに変化してきた軌道がどの程度決定論的に見えるかを定量的に評価できる。近接軌道群の方向の分散は次の式で与えられる。

$$E_{trans} = \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K \frac{|v(t_i) - \bar{v}|}{|\bar{v}|}, \quad \text{ただし, } \bar{v} = \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K v(t_i). \quad (38)$$

ここで, E_{trans} は「並進誤差 (translation error)」と呼ばれる。 $x(t_0)$ の選択によって生じる E_{trans} の誤差を抑えるために, 無作為に選択した M 個の $x(t_0)$ について E_{trans} の中央値 (メディアン) を求める操作を Q 回繰り返し, Q 個の中央値の平均値で並進誤差を求める。ホワイト・ノイズ系列の場合, ベクトル $v(t_i)$ は埋め込み次元に関係なく, さまざまな方向に現れる。

ある時系列がカオスならば, τ があまり大きくないとき時間発展に決定論的な側面が残存していて, ベクトル $v(t_i)$ はほぼ同じ方向を向いているはずで, 挙動の自由度を最もよく反映する埋め込み次元で, 並進誤差は最小になると考えられるので, 最適な埋め込み次元が求められることになる。

実際の計算では, すべてのベクトルについて距離を算出し, 大小比較して順位付けする必要がある。宮野 (2002) では, 観測ノイズに汚染された時系列データに残存する決定論性の程度をうまくとらえることができることを, 簡単な例を使って示している。

本稿第2節の(6)式 $\{y_i\}$ は誤差項が確定的な過程で生成されている。この場合, Wayland らの方法でカオスであることが示されるだろうか。

(2) Brock (1986) の残差検定について

田中(1997)では、確率過程を誤ってカオスと判定する危険性について、Brock and Sayers (1988) が指摘したユニット・ルート過程 (ランダム・ウォーク) がカオスに見えるという問題を取り上げている。ただし彼らが行っているユニット・ルート過程とは、AR(1)係数が1に等しい場合ではなく1に近いいわゆる near-integrated case である。AR(1)モデルの誤差項は確率変数を想定しているのに、 $\{y_t\}$ は確率過程であってカオスではないはずなのに、相関次元を縦軸に埋め込み次元を横軸に取ってグラフを描くと、相関次元は飽和してアトラクターがあるように見える。

この問題に対処するために、Brock (1986) は残差テストを提案した。 $y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ を推定して残差を計算すると、 $\{y_t\}$ が確率的な過程ならば残差系列は確率的な過程になるはずで、残差系列の相関次元を求めれば、飽和せず上昇すると考えられる。もし、 $\{y_t\}$ がカオスにしたがって行けば、残差系列はカオスになり、残差系列はアトラクターを持ち相関次元は飽和するはずである。Brock はこれを一般化し、 $\{y_t\}$ がカオスなら線形変換

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\alpha}_1 y_{t-1} - \hat{\alpha}_2 y_{t-2} - \cdots - \hat{\alpha}_p y_{t-p} \quad (3.9)$$

によって作った系列 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ は同じ相関次元、同じ最大リアプノフ数を与えることを証明した。したがって、AR(p)モデルを推定してその残差を取り、残差についてアトラクターが見出せるか調べればよい。アトラクターが見いだせれば元の系列 $\{y_t\}$ はカオスの可能性が高くなる。見いだせなければカオスとは判定できない。残差の相関次元を測定してカオス性が見いだせるかどうかで、 $\{y_t\}$ のカオス性を見ようというアイデアである。

ここで想定している系列 $\{y_t\}$ はえたいのしれない時系列であるが、仮にそれがランダムであったとき、この方法でカオスかランダムか区別できるのだろうか。つまり、 $\{y_t\}$ がカオスなら、残差 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ は同じ相関次元、同じ最大リアプノフ数を与えることを証明したが、 $y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ 、 $\alpha = 1$ と置いて $\{\varepsilon_t\}$ を確率変数 (正規乱数) で発生させて $\{y_t\}$ を生成し、Brock (1986) の方法で残差の相関次元を測定したとき、それが飽和せずもとの系列 $\{y_t\}$ はカオスではないと判定できるのか調べる必要がある。

(3) 相関次元の測定とデータの定常性

田中(1997)では、アトラクターは不規則振動を何度も繰り返すうちに高次元空間の中に浮かび上がってくるものであるとし、データの定常性が満たされていないと、それが原因で低次元の相関次元が得られてしまうことがあるので、相関次元の測定を行う前にデータの定常性を調べておく必要があると指摘している。

ランダム・ウォークにトレンドを回帰させ、その残差にアトラクターがあるかどうかを調べると、全体として上昇して下降するような大きな波が現れ、相関次元がそれを拾うので飽和してアトラクターがあると判断されるという。しかし、データが非定常な場合はトレンドに回帰させるのではなく、定常性が満たされるまで階差を取るのが一般的である。

ランダム・ウォークは、時間を横軸に取ってその動きをプロットすると、回帰分析で残差をプロットして正の系列相関がある場合のグラフによく似た動きをする。また、見かけ上の周期性がありそれを上昇と下降の局面で区切れれば、上昇・下降トレンドのまわりに不規則な変動があるようにも見える。ADF(Augmented Dickey-Fuller)検定ほかで単位根が検出されたら、階差を取り、相関次元が飽和するかどうかを見ればよい。

(6)式で系列 $\{y_t\}$ を生成する場合、系列 $\{X_t\}$ およびそれを変換した系列 $\{\varepsilon_t\}$ は、初期値 $X_1 = 0.31$ に依存してその後の動きが決まる確定的な過程であるから、系列 $\{y_t\}$ も確定的な過程になる。 $\{y_t\}$ の相関次元を測定してカオスであると判定されるだろうか。 $\{\varepsilon_t\}$ が確率的に変動する場合のランダム・ウォークは階差系列 $\{\Delta y_t\}$ が定常過程になるが、この場合は階差を取り $\{\Delta y_t\}$ の相関次元を計算するとカオスと判定されるはずである。もし $\{\varepsilon_t\}$ が確率的であれば、 $\{y_t\}$ の階差 $\{\Delta y_t\}$ の相関次元は飽和せず、確率的だと判定され、カオス性は否定されるはずである。

田中(1997)では、構造変化の前後で水準がシフトする場合も、これを決定論的变化とみなして低い次元が得られ、構造変化点の前と後で区間を切ってそれぞれについて相関次元を調べると、カオス性は見いだせなかったという事例を紹介している。

データ生成過程に明示的にトレンドが含まれ、標本期間 $1 \leq t \leq n$ において、時点 $n_1 = [n\lambda_1]$ でトレンドが屈折しているモデル

$$y_t = \mu + \beta \cdot t + \gamma \cdot dt(t, \lambda_1) + u_t \quad (4.0)$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t$$

を考える．ここで、 $\alpha = 1$ 、 $[]$ は引数の整数部分で λ_1 は $(0, 1)$ 区間の実数であり、 $1 \leq t \leq n_1$ のとき $dt(t, \lambda_1) = 0$ 、それ以外では $dt(t, \lambda_1) = t - n_1$ である．このとき、誤差項 $\{\varepsilon_t\}$ が (5) 式により確定的な過程で生成される場合、 $\{y_t\}$ の相関次元は、全区間でも構造変化点の前後で分けたそれぞれの区間でも、飽和してカオスと判定されるはずである．

以上の諸点について、カオス性の判定手法を使ってそのように判定されるか確かめる必要がある．

5. カオスとランダムは見分けがつくか？

Grassberger-Proccaccia や Wayland らのアルゴリズムを具体的なデータに応用するカオス性の検証は別の機会にゆずることにして、この節ではいくつかの予備的な試行錯誤の結果を整理する．

図 5.1(a) は (6) 式より $X_1 = 0.31$ 、 $n=1000$ で生成したデータ $\{y_t\}$ のグラフと、 $\{y_t\}$ を横軸に、 $\{y_{t-1}\}$ を縦軸に取ったリターン・マップである．誤差項 $\{\varepsilon_t\}$ は確定的な過程から生成されているので、 $\{y_t\}$ は確定的な過程である． $\{y_t\}$ のグラフは図 2.3 と同じものである．また、図 5.1(b) は (6) 式の $\{\varepsilon_t\}$ を $n=1000$ で正規乱数で発生させたときの、 $\{y_t\}$ のグラフとリターン・マップである．プログラムは田中 (1997) の付録を参考にした．

同じ $n=1000$ でも、確定的な過程のリターン・マップの方がかっちりした帯状の図形であるのに対し、誤差項 $\{\varepsilon_t\}$ が正規乱数の場合はやや崩れているが、2通りのグラフとリターン・マップを並べて、どちらがカオスでどちらがランダムか見分けることはむずかしい．Grassberger-Proccaccia や Wayland らのアルゴリズムを使って相関次元を計算すると、相関次元は一定値に収束するのにか否か興味深いところである．

図 5.1(a) $\{y_t\}$ のグラフとリターン・マップ：カオス誤差, $n=1000$

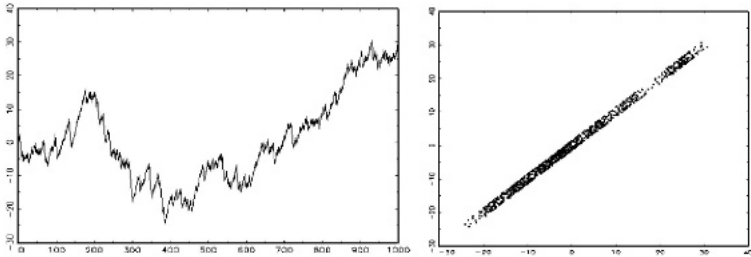
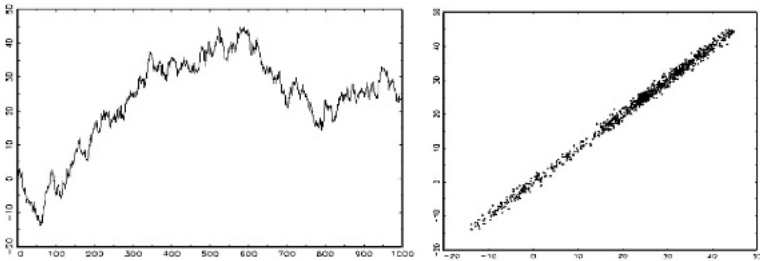


図 5.1(b) $\{y_t\}$ のグラフとリターン・マップ：正規乱数誤差, $n=1000$



ここで、4.4 節 (3) の疑問についてリターン・マップを描いて図形になるか点が散在するかでカオスとランダムを見分けることを試みた結果を示す。図 5.2(a)は(6)式より $X_1 = 0.31$, $n=1000$ で生成したデータ $\{y_t\}$ の階差 $\{\Delta y_t\}$ のグラフと、 $\{\Delta y_t\}$ を横軸に $\{\Delta y_{t-1}\}$ を縦軸に取ったリターン・マップで、図 5.2(b)は (6) 式の誤差項を正規乱数で発生させた $\{y_t\}$ の階差 $\{\Delta y_t\}$ のグラフと、そのリターン・マップである。

階差のグラフは、図 5.2(a)の方が(b)に比べて上下の振幅が大きいのに見えるが、縦軸目盛を見ると前者はおおよそ $(-1.4, 1.4)$ の範囲に収まっている。後者は正規乱数のグラフである。前者はまるで回帰分析の誤差項が負の系列相関を持つ場合の動きのようであり、後者はホワイト・ノイズの動きそのものである。

図 5.2(a) $\{\Delta y_i\}$ のグラフとリターン・マップ：カオス誤差， $n=1000$

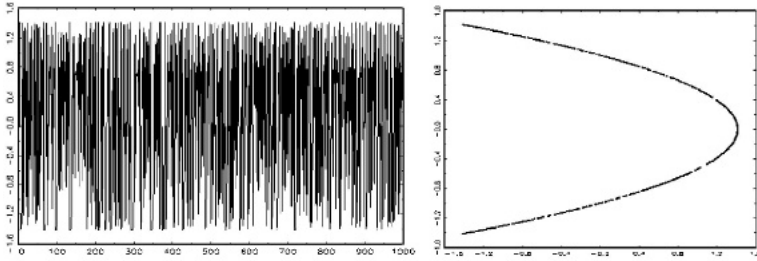
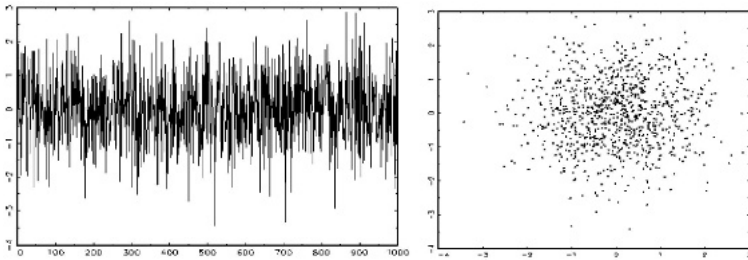


図 5.2(b) $\{\Delta y_i\}$ のグラフとリターン・マップ：正規乱数誤差， $n=1000$



(6)式で生成した $\{y_i\}$ の階差 $\{\Delta y_i\}$ ，したがって $\{\varepsilon_i\}$ そのもののリターン・マップは，はっきり 2 次曲線が現れた．もとの系列 $\{y_i\}$ のリターン・マップの縦横の長さは 1 であるのに対し，階差 $\{\Delta y_i\}$ のリターン・マップの縦横の長さは，原点から $(1-0.5)/\sqrt{1/8}=1.4142$ になっているが，形は同じである．正規乱数の場合，階差 $\{\Delta y_i\}$ したがって $\{\varepsilon_i\}$ そのもののリターン・マップは点が散らばり図形をなしていない．この場合は，階差を取ってリターン・マップを描くことで，データ生成過程がカオスかランダムか区別がついたことになる．しかし，実際のデータでは 1 階差ではなく適切に実数差分を取らないと定常にならないことが多く，データ自体にもノイズが入りこんでいる可能性があるため，このようなすっきりした形で区別することはむずかしいと思われる．

さて、次に初期値を 1000 通り、 $X_1 = 0.31$ から微小な大きさをずつ増やして、(6)式より 1000 通りの $\{y_i\}$ を発生させ、観測値数 n で標準化した最小 2 乗推定量 $n(\hat{\alpha} - 1)$ で単位根仮説 $H_0: \alpha = 1$, $H_a: \alpha \neq 1$ を検定することを考える. Hisamatsu and Maekawa(1994)より、 $n = 30$ のときの $n(\hat{\alpha} - 1)$ の両側 5% 点は $[-9.529, 1.763]$ で、これらは $n(\hat{\alpha} - 1)$ の確率分布を理論的に導出し数値積分で評価して求めた%点である. 1000 回のうち、検定量の値がこの範囲の外に落ちる割合 (real size) を計算してみた.

確定的な過程の場合、初期値がわずかに違ってもその後のたどる経路はまるで違い、図 4.4 と同様に $\{y_i\}$ の経路を描けば、1000 通りのランダム・ウォークの図が描ける. 図 4.3 のような図形が描けるということは、その範囲を飛び出すこともなければ、クモの巣理論のように一点に集中することもない. なお、1000 通りの初期値をランダムに発生させると partial sum がランダムな初期値に依存することになり、カオスではなくなる.

$X_1 = 0.31$ から 0.000081 ずつ増やして 1000 通りの初期値を作り $\{y_i\}$ を生成したとき、 $n(\hat{\alpha} - 1)$ の real size は nominal size 0.05 に等しくなった.

初期値の増分	real size
0.01	0.005
0.005	0.007
0.001	0.023
0.0003	0.076
0.0001	0.066
0.000081	0.050
0.00001	0.092
0.000001	0.025
0.0000001	0.008
0.00000001	0.015

初期値の取り方によって、nominal size より大きくなる場合と小さくなる場合が出てくる. これと同様に、3000 回の繰り返しで $n(\hat{\alpha} - 1)$ の real

size が 0.05 に等しくなる初期値の増分を求めたら 0.0000254 であった。このとき、 $n(\hat{\alpha} - 1)$ の度数分布 (pdf) と累積度数分布 (cdf) は図 5.3(a) および図 5.4 (実線) のようになる。real size は 0.05 である。

図 5.3(a) $n(\hat{\alpha} - 1)$ の度数分布 (pdf), カオス誤差, $n=30$, 3000 回

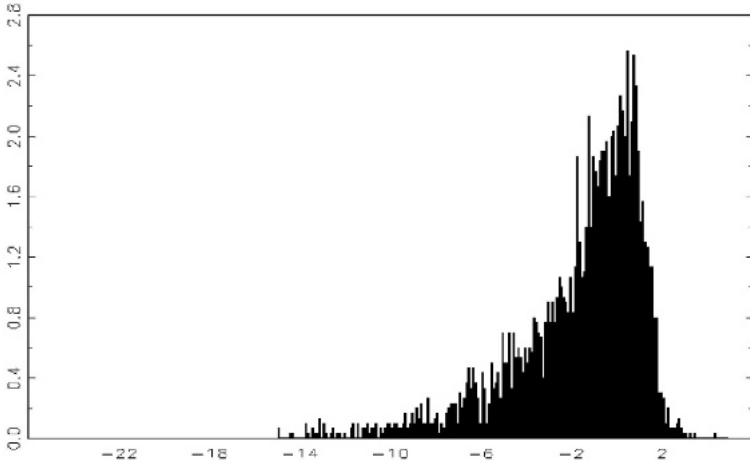


図 5.3 (b) $n(\hat{\alpha} - 1)$ の度数分布 (pdf), 正規乱数誤差, $n=30$, 3000 回

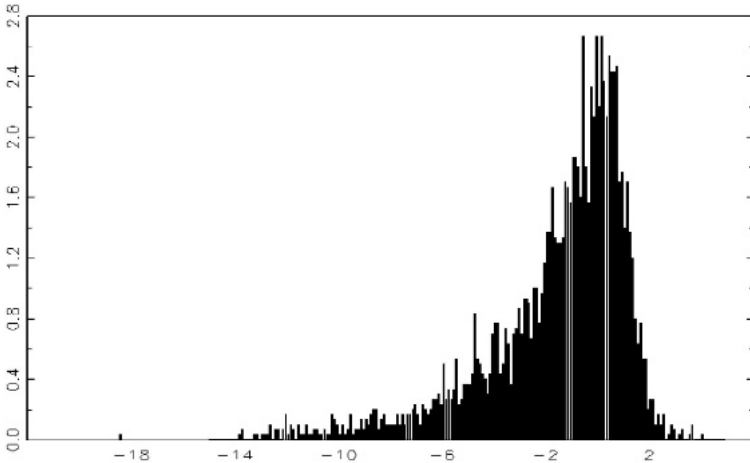
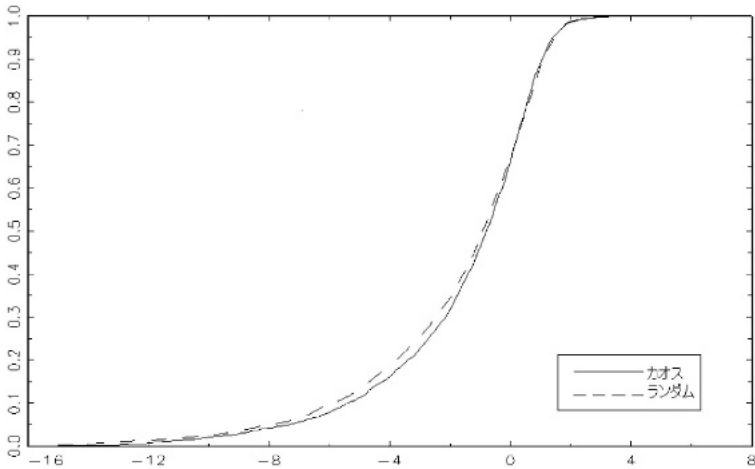


図 5.4 $n(\hat{\alpha} - 1)$ の累積度数分布 (cdf), $n=30, 3000$ 回



一方、3000 回の繰り返しで $\{\varepsilon_t\}$ を正規乱数で発生させ $\{y_t\}$ を生成したときの、 $n(\hat{\alpha} - 1)$ の pdf と cdf はそれぞれ図 5.3(b), 図 5.4 (破線) である。この場合の real size は 0.047666667 であった。2つの pdf, cdf の図を比べると、どちらがカオス誤差のデータでどちらがランダム誤差のデータから計算された統計量の分布なのか見分けがつかない。

6. 経済データの生成過程は確定的か確率的か? : 問題点と展望

本稿では、経済データのデータ生成過程 (DGP) が確定的か確率的かを区別する方法について考察した。第 2 節で自己相関関数のグラフからデータの生成過程が確定的か確率的か区別することは難しいことがわかった。また、第 3 節では、方法論を理解するための基本的な概念を整理し、第 4 節で方法の考え方とそれが持っている問題点について整理した。第 5 節でカオスとランダムは見分けがつかず予備的な考察を行った。

実際のデータを使ったカオス性の実証研究は 80 年代末から盛んになったが、それらの大半は埋め込みを行って相関次元を計算する方法で、Grassberger-Proccacia のアルゴリズムを使っている。経済変数では株価、GNP、マネーサプライなどへの適用例があるが、90 年代までの具体例は

田中（1997）に詳しい。文献[1], [4], [6], [18], [19]も参照。2000年以降では文献[10], [11]などがあるが、本稿ではこれらのサーベイは省略する。

ここで考えなければならないのは、特定の観測期間のデータを使って、データ生成過程がカオスかランダムか検証する場合、たとえば、実質消費支出のマクロデータは埋め込み次元と相関次元のグラフから相関次元が一定値に収束し最大リアプノフ指数も正となったのでカオスだと判断し、実質可処分所得やマネーサプライのマクロデータは相関次元が一定値に収束しなかったのでカオスではないと判断することにどのような意味があるかということである。

計量経済学の基礎で消費関数を使って単回帰モデルを説明するとき、 $C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$ の説明変数 Y_t は固定数扱い、つまりカオスであり、誤差項 u_t は、 Y_t 以外の、 Y_t に比べて C_t にはわずかな影響しか与えない無数の説明要因の寄せ集めであると説明する。無数の微小なものの寄せ集め u_t は中心極限定理より正規分布で近似できると仮定して、 C_t は u_t の関数なので確率変数であると持っていく。 C_t の動きを説明する最も重要な説明変数 Y_t が固定数扱いなら、それ以外の無数の説明要因も固定数扱いにするのが自然ではないか。そうだとすれば C_t もカオスであり、これら諸々のカオス的な変数の間の関係を分析する場合、ある種の仮定を置くことで u_t を正規分布で近似することが可能になり、確率的推測理論を分析道具として利用して、推定や検定、予測などを行うことが出来ると考えるのが一つの自然な解釈ではなかろうか。 u_t があたかも Gaussian のようにふるまう様子は、本稿でも示した通りである。

実際の経済データを使ってカオス性を検証する試みは別の機会にゆずるが、一つの提案としては、相関次元の計算で Grassberger-Proccaccia アルゴリズムを使わず、Wayland らの近接軌道群の分散にもとづく方法を使うことが考えられる。その場合、ロジスティック・マップなどはつきりカオスだとわかる例でデータを模擬的に生成し、プログラムがまともな結果を計算できるか確かめ、4.4 節の（1）～（3）で議論した点について検討したうえで、具体的な経済データに適用してデータ生成過程が確定的か確率的か検証したい。

謝辞

藤本喬雄教授（福岡大学経済学部）から経済データの生成過程が確定的か確率的か考えるきっかけを与えていただいた。本稿で引用した論文のうち、Brock と Guegan については藤本教授からの示唆による。一方、前川功一教授（広島経済大学）からは、専門の計量ファイナンスの立場から、説明の不備な点や曖昧な点をご指摘いただいた。両氏の助言に感謝するとともに、論文中に誤りがあればそれは筆者自身の責任によるものである。

本号は 2010 年 6 月 12 日に逝去された故堀啓造教授の追悼号である。20 年来の同僚であった同氏のご冥福をお祈りする。

参考文献

- [1] Abhyankar, A. , L.S. Copeland, and W. Wong, Nonlinear Dynamics in Real-Time Equity Market Indices: Evidence from the United Kingdom, *The Economic Journal*, 105, pp.864-880, 1995.
- [2] Beran, J., *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, 1994.
- [3] Brock, W. A., Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version, *Journal of Economic Theory*, 40, pp.168-195, 1986.
- [4] Brock, W. A., and C. H. Hommes, Heterogenous beriefs and routes to chaos in a simple asset pricing model, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, pp.1235-1274, 1998.
- [5] Brock, W. A., and C. L. Sayers, Is there business cycle characterized by deterministic chaos ?, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, pp.71-90, 1988.
- [6] Decoster, G. and D. Mitchell, Nonlinear Monetary Dynamics, *Journal of Business & Economic Statistics*, 9, pp.455-461, 1991.
- [7] Grassberger, P. and I. Procaccia, Measuring the Strangeness of Strange Attractors, 9, pp.189-208, *Physica D*, 1983.
- [8] Guegan, D., Long Memory Behavior for Simulated Chaotic Time Series, IEICE transactions on fundamentals. E84-A, 2001.

- [9] Hisamatsu, H., and K. Maekawa, The distribution of the Durbin-Watson statistic in integrated and near-integrated models, *Journal of Econometrics*, 61, pp.367-382, 1994.
- [10] Shintani, M., and O. Linton, Is there Chaos in the world economy? A nonparametric test using consistent standard errors, *International Economic Review*, 44, pp.331-358, 2003.
- [11] Shintani, M., and O. Linton, Nonparametric neural network estimation of Lyapunov exponents and a direct test for chaos, *Journal of Econometrics*, 120, pp.1-33, 2004.
- [12] Sugihara, G., and R. M. May, Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series, *Nature*, 344, pp.734-741, 1990.
- [13] Wayland, R., D. Bromley, D. Pickett, and A. Passamante, Recognizing determinism in a time series, *Physical Review Letter*, 70, 530-582.1993.
- [14] Wolf, A.J., J. Swift and J. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D*, 16, pp.285-317, 1985.
- [15] 山口昌也, 『カオスとフラクタル—非線形の不思議』, 講談社, 1986.
- [16] 井上啓, 「カオス時系列の長期記憶モデルへのあてはめにおける情報に関する窓関数の効果」, 日本応用数学会論文誌, 17, pp.59-72, 2007.
- [17] 田中辰雄, 「第5章:カオス理論の計量分析への応用」, 『応用計量経済学 I』, 高木康順・秋山裕・田中辰雄著, 多賀出版, pp.281-362, 1997.
- [18] 宮野尚哉, 複雑系科学とその周辺 (第7回) —株価の予測は可能か, 数理学・特集『ハミルトン力学系の展開』, サイエンス社, 1999.
- [19] 宮野尚哉, 非線形時系列解析によるカオス性検定, 数理解析研究所講究録, 1136 巻, pp.28-36, 2000.
- [20] 宮野尚哉, カオスと時系列, 臨時別冊・数理学『時系列解析入門』, 第3章, サイエンス社, 2002.
- [21] 矢島美寛, 長期記憶をもつ時系列モデル, 『経済時系列の統計』, 岩波書店, pp.104-202, 2003.