

# 構造変化とカオス

久松博之

## 1. はじめに

久松 (2011) では経済データの生成過程 (DGP : Data Generating Process) が確定的 (カオス) なのか確率的 (ランダム) なのかを見分ける問題を取り上げ、カオスとランダムの見分け方について、その方法論をサーベイした。そして、シミュレーションによる予備的な考察を行い、次のような問題点と検討課題を指摘した。

ロジスティック・マップと呼ばれる非線形漸化式

$$X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1}) \quad (1)$$

より系列  $\{X_t\}$  を生成する。  $\{X_t\}$  は確定的な過程である。矢島 (2003) によれば (1) 式を満たす確率変数  $X_t = \sin^2(2^{t-1}\pi U)$ 、ただし、  $U$  は  $[0,1]$  上の一様分布、が存在し、期待値は 0.5、分散は  $1/8$  であることがわかっている。

ここで、(1) 式より生成された  $\{X_t\}$  を次のように変換する。

$$\varepsilon_t = (X_t - 0.5) / \sqrt{1/8} \quad (2)$$

$\{X_t\}$  が確率変数であれば (2) 式は標準化を意味することになるが、(1) 式から生成された  $\{X_t\}$  は「確定的」な過程であるから、  $\{\varepsilon_t\}$  は確率変数ではなく「確定的」な系列である。(2) 式の  $\{\varepsilon_t\}$  を用いて

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3)$$

により系列  $\{y_t\}$  を生成する。  $\alpha = 1$  ,  $y_0 = 0$  である。(3)式で系列  $\{y_t\}$  を生成する場合、系列  $\{X_t\}$  およびそれを変換した系列  $\{\varepsilon_t\}$  は、初期値  $X_1$  に依存してその後の動きが決まる確定的な過程であるから、系列  $\{y_t\}$  も確定的な過程になる。

このとき、  $\{y_t\}$  の相関次元を測定してカオスであると判定されるだろうか。  $\{\varepsilon_t\}$  が確率的に変動する場合のランダム・ウォークは階差系列  $\{\Delta y_t\}$  が定常過程になるが、この場合  $\{\Delta y_t\}$  の相関次元を計算するとカオスと判定されるはずである。もし、  $\{\varepsilon_t\}$  が確率的であれば  $\{y_t\}$  の階差  $\{\Delta y_t\}$  の相関次元は飽和せず、確率的だと判定されカオス性は否定されるはずである。

さて、田中(1997)では、観測期間に構造変化がある時系列について、構造変化の前後で水準がシフトする場合も、これを決定論的变化とみなして低い次元が得られる事例を紹介していて、構造変化点の前と後で区間を切ってそれぞれ相関次元を調べると、カオス性は見いだせなかったと結論づけている。

データ生成過程に明示的にトレンドが含まれ、標本期間  $1 \leq t \leq n$  において、時点  $n_1 = [n\lambda_1]$  でトレンドが屈折しているモデル

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \beta \cdot t + \gamma \cdot dt(t, \lambda_1) + u_t \\ u_t &= \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (4)$$

を考える。ここで、  $\alpha = 1$  ,  $[ ]$  は引数の整数部分で  $\lambda_1$  は  $(0, 1)$  区間の実数であり、  $1 \leq t \leq n_1$  のとき  $dt(t, \lambda_1) = 0$  , それ以外では  $dt(t, \lambda_1) = t - n_1$  である。誤差項  $\{\varepsilon_t\}$  が(2)式により確定的な過程で生成される場合、  $\{y_t\}$  の相関次元は、全区間でも構造変化点の前後で分けたそれぞれの区間でも、飽和してカオスと判定されるはずである。

(4)式は、**joint broken trend** 1個の構造変化を持つ GDP であるが、本稿ではより一般的に、これにさらに **disjoint broken trend** を1個含む DGP を想定して、誤差項  $\{\varepsilon_t\}$  が確率的な場合と確定的な場合について、  $\{y_t\}$  のカオス性の有無がどのように判定されるか観察する。本稿の構成は以下の通りである。

第2節ではカオス性を測る尺度について、相関次元と Grassberger-Proccaccia アルゴリズム (以下, “GP アルゴリズム” と略す) の考え方を説明する. 第3節では, まず田中 (1997) の GP アルゴリズムの Gauss プログラムを為替レート・データへ応用した例をフォローする. 田中 (1997) に掲載されている結果と全く同じ結果が出力されることを確認し, GP アルゴリズムを構造変化のある「確率的」な DGP に適用した結果を整理する. 第4節では「確定的」な DGP に対してこのアルゴリズムを適用した結果を整理し, リターン・マップや相関次元のグラフから, 確定的と確率的の区別がつくか比較検討する. 第5節で問題点と展望を述べる.

## 2. カオス性を測る尺度

カオス性を測る指標として相関次元 (Correlation Dimension) がある. たとえば, レスラー (Rössler) 方程式のように3つの変数の間に連立微分方程式が成り立っているとき, これら3つの変数をそれぞれ軸に取った立方体の中にアトラクター(図形)ができる. 実際に3変数のうち1変数だけ時系列データが与えられ, この系列が確定的か確率的か判断しようとするとき, 背後に3変数間にそのような厳密な連立微分方程式の関係があつてカオスが成り立っているとすれば, この1系列のみからどうやってそのアトラクターの存在を突き止めたらいかがが問題になる.

その場合のアトラクターの存在を示す手立てが「ターケンス (Takens) の埋め込み定理 (embedding theorem)」である.  $\{x_i\}$  の時間遅れの項を組み合わせ  $x_i = (x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L))$  のようにベクトル化し, 埋め込み次元  $m$  と時間の遅れ  $L$  を適切に選択すると, 3変数を使わなくても元のアトラクターと似た形を得ることが出来る. それによってカオスの存在を判断するというもので, アトラクターの有無を調べるには埋め込んだデータに形があるか見ればよいが, 3次元を超えると目で見て判断することはむずかしいので, 定量的に測定できる方法が必要となる. そのためには, 埋め込んだ点が形づくる図形の次元を測定出来ればよい.

次元を測定する方法の一つが相関次元 (correlation dimension) とよばれる指標で, 比較的データが少なくても測定可能なので広範に利用されて

いる。相関次元を求めるアルゴリズムで具体的によく使われるのは、グラスバーガー-プロカッチア (Grassberger and Procaccia (1983)) のアルゴリズムである。以下、GP アルゴリズムの考え方について、田中 (1997) と宮野 (2002) をもとに説明する。

埋め込んだ空間内のある点を取り、そこを中心とした半径  $r$  の円を描く。この円の中に点がいくつあるか数え、個数  $C$  を測定する。円の半径  $r$  が大きくなれば円内に含まれる点の数は増えるので  $C$  は  $r$  の関数である。 $r$  を大きくしていったとき、個数がどう増えるかを見る。まんべんなく点在していて  $r$  が大きくなれば個数  $C$  は円の面積にほぼ比例して増加すると考えられるので  $C(r) \approx ar^2$  となる。

一方、埋め込んだ平面に点が直線的に分布している場合は、円の中に入った直線の長さにはほぼ比例して増える、つまり、円内に含まれる点の数は円の直径 (したがって半径  $r$ ) にほぼ比例して増えると考えられるので、 $C(r) \approx br$  である。

したがって、実際のデータをプロットし  $C(r)$  を  $r$  の関数として測定して、 $C(r)$  が半径  $r$  のどのような関数か調べればよい。 $C(r)$  が  $r$  の 2 乗に比例すれば 2 次元的に、 $r$  の 1 乗に比例すれば 1 次元的に点が分布していることになる。実際に計算する場合は、 $C(r) \approx ar^d$  の対数を取り

$$\log C(r) \approx d(\log r) + \log a \quad (5)$$

より、 $\log C(r)$  を  $\log r$  に回帰させて傾き  $d$  を推定すれば、プロットした点の次元が得られる。この考えにもとづいて、すべての点を出発点に取って  $C(r)$  を計算しその平均的な挙動を調べる。これを定式化したものが、Grassberger-Proccacia のアルゴリズムである。

$$x_t = (x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L)), \quad (6)$$

$$t = 1, 2, \dots, T, (T = n - (m-1)L)$$

$$C_m(r) = \# \text{ of } \{(x_i, x_j) \mid r > |x_i - x_j|\} / T^2 \quad (7)$$

データが  $n$  個の時系列  $\{x(t)\}, t = 1, 2, \dots, n$  として与えられているとする。最初に埋め込み次元  $m$  を決め、データを  $m$  個ずつまとめてベクトル  $x_t$  の系列を作る。  $L$  はサンプリング間隔 (時間の遅れ) である。

次に系列  $\{x(t)\}, t = 1, 2, \dots, n$  を  $m$  次元空間に埋め込み、埋め込んだ点データの次元を測定する。  $|x_i - x_j|$  は埋め込んだ 2 つの点  $x_i, x_j$  の距離、また、 $\# \text{ of } \{ \}$  は集合  $\{ \}$  の要素の個数である。埋め込んだ点のすべてのペア (ペアの総数は  $T^2$ ) の間の距離を調べ、そのうち距離が  $r$  より小さいペア  $(x_i, x_j)$  の個数を求める。このとき「すべての点」とすると  $i = j$  が含まれるが、無意味なので

$$C_m(r) = \# \text{ of } \{(x_i, x_j) \mid r > |x_i - x_j|, i < j\} / (T(T-1)/2) \quad (8)$$

とすればよい。  $C(r)$  は埋め込み次元にも依存するので  $C_m(r)$  としてある。2 点間の距離は、ユークリッドの距離

$$|x_i - x_j| = \sqrt{\sum_k \{x(i+kL) - x(j+kL)\}^2} \quad (9)$$

でも、最大値ノルム

$$|x_i - x_j| = \max_k |x(i+kL) - x(j+kL)| \quad (10)$$

でもよい。

$C_m(r)$  の対数を取り  $r$  の対数を取って

$$\log C_m(r) \approx d(\log r) + \log \alpha \quad (11)$$

より、相関次元  $d$  を求める。具体的には縦軸に  $\log C_m(r)$  を、横軸に  $\log r$  を取って  $m$  の値ごとのグラフを描く。次に、縦軸に相関次元  $d$  を、横軸に埋め込み次元  $m$  を取ってグラフを描く。このグラフで  $m$  が大きくなるにしたがって相関次元  $d$  が上昇せず一定の値に飽和すれば、アトラクターの存在が示唆される。

### 3. Grassberger-Proccacia アルゴリズムの応用例

Grassberger-Proccacia のアルゴリズム (GP アルゴリズム) の GAUSS プログラムが田中辰雄「第5章：カオス理論の計量分析への応用」、『応用計量経済学 I』, 高木康順・秋山裕・田中辰雄著, 多賀出版, pp.281-362, 1997 の pp.359-362 に載っている。本節では、このプログラムをいくつかの経済時系列データに応用し、それぞれの系列のリターン・マップと相関次元を求めた。

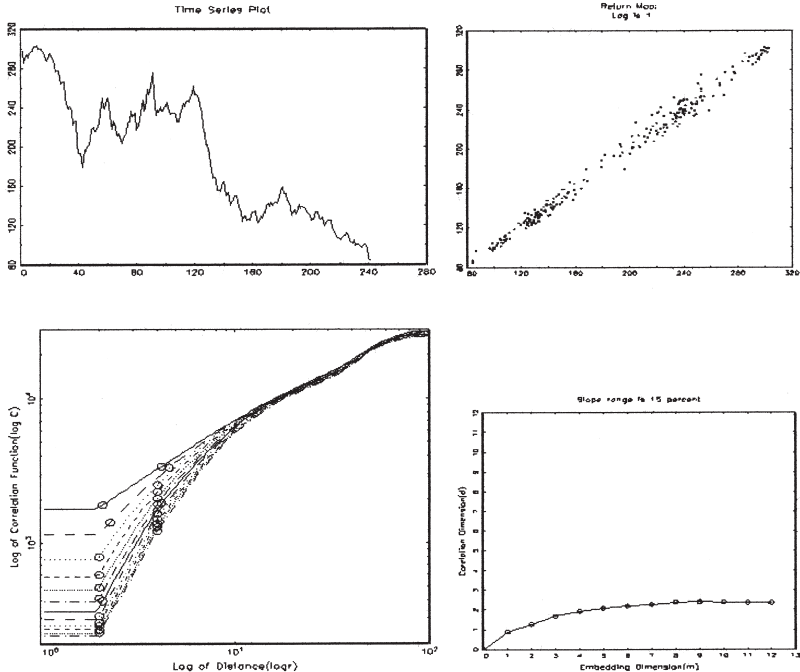
#### (1) 為替レート (円/ドルレート) の例

ここでは、田中 (1997) の実証例を取り上げる。使用するデータは、1975 年から 1995 年までの円/ドルの為替レートの (月初めのスポットレート) のデータで、為替レートの変動の中にカオス性が見出せるか GP アルゴリズムで確かめるといふ問題である。田中 (1997) の付録にある Gauss プログラムを使って、田中 (1997) の図 5-p-1, 図 5-p-2 を再現したのが図 3.1 と図 3.2 である。

以下の4つの図は、左上の図が横軸に時間を取って原系列の動きを示したグラフで、右上の図がそのリターン・マップで縦軸が前の期の値、横軸が今期の値を取ってプロットした図である。左下の図は Grassberger-Proccacia アルゴリズムの計算結果を、縦軸に  $\log C$  を横軸に  $\log r$  を取ってプロットした図で、右下の図は  $m$  本のグラフの傾き、すなわち相関次元

$d$  を  $\log C$  を  $\log r$  に単回帰して推定し、横軸に埋め込み次元  $m$  を、縦軸に相関次元  $d$  を取って、 $m$  の値ごとに  $d$  の推定値をプロットした図である。

図 3.1 為替レートのリターン・マップと相関次元



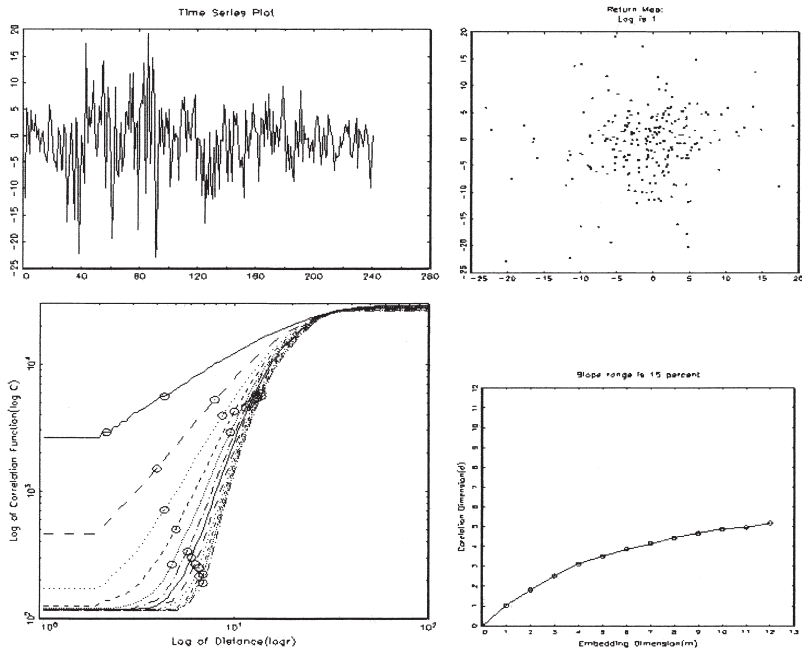
右下の図より、相関次元が飽和していて低い時限のアトラクターがある、つまりカオス性があるように見えている。また、左上の図より、原系列は定常過程ではなさそうということがわかる。右上のリターン・マップの図を見ると、久松 (2011) で描いたランダム・ウォークする系列のリターン・マップと同様な、右上がりの帯状の形に点が分布している。

田中 (1997) では、下降トレンドがあると判断して、AR(2)をあてはめたときの残差について、これら4つの図を描いている。いわゆる「Brock (1986) の残差検定」を行っていることになる。この検定についてはここ

では詳述しない。久松 (2011) を参照。

田中 (1997) によれば、下降トレンドがあるという判断であるが、ランダム・ウォークの一場面を切り取ったグラフに見える。原系列の動きからトレンドを除くのではなく、階差を取れば定常になりそうだ。次の図は、階差系列についての4つの図である。

図 3.2 為替レートの階差のリターン・マップと相関次元



リターン・マップは点が散在し、図形をなしていないので、階差系列はランダムであることを示唆している。また、右下の図から相関次元は一定値に飽和していないこともわかる。ただし、左上の図を見る限り階差系列はランダムではあるがホワイト・ノイズのような行儀のいい系列ではなく、分散が不均一であることもうかがえる。この事例は、ランダム・ウォークがカオスに見えるケースで、階差を取るとカオス性はないことがわかる。



## (2) 複数の構造変化点をもつ DGP

ここでは、久松 (2010) で扱ったトレンドに複数の屈折点があるモデルで誤差項がランダム・ウォークしている DGP(Data Generating Process) を想定する。標本期間  $1 \leq t \leq n$  において、時点  $n_i = [n\lambda_i]$ ,  $i=1,2$  で 2 つの屈折点がある場合を想定する。ここで  $[ \ ]$  は引数の整数部分であり、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  を break fraction と呼んでいる。  $\lambda_1, \lambda_2$  は  $\lambda_1 < \lambda_2$  で  $(0, 1)$  区間の実数である。

$$\begin{aligned} dt(t, \lambda_i) &= 0 & 1 \leq t \leq n_i, \quad i=1,2, \\ &= t - n_i & \text{それ以外,} \\ du(t, \lambda_i) &= 0 & 1 \leq t \leq n_i, \quad i=1,2, \\ &= 1 & \text{それ以外,} \end{aligned} \quad (1.2)$$

これらのダミー変数を使って、最初の構造変化点は joint broken trend, 2 番目の構造変化点は local disjoint broken trend になっている

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \gamma_1 dt(t, \lambda_1) + \gamma_2 dt(t, \lambda_2) + \gamma_3 du(t, \lambda_2) + u_t \quad (1.3)$$

を DGP として想定する。誤差項  $u_t$  は  $p$  次の自己回帰過程(AR(p))を想定し

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2 - a_3 L^3 - \dots - a_p L^p) \cdot u_t = \varepsilon_t, \quad (1.4)$$

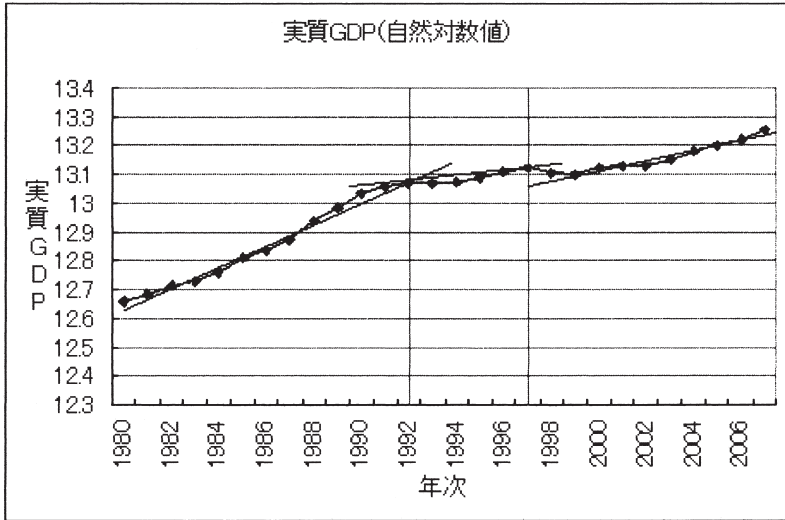
ここで、 $L$  はラグオペレータで、 $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$  である。

この式を使って系列  $\{y_t\}$  を生成し、田中 (1997) の GP アルゴリズムのプログラムを適用して、次の①と②について調べる。

- ① 誤差項の分散が小さくてトレンドが系列  $\{y_t\}$  の全体を支配している場合、GP アルゴリズムではこの系列を「カオス」と判断してしまうのではないか。
- ② 誤差項  $\varepsilon_t$  の分散を極めて小さい設定からしだいに大きくしていくとき、どの程度の誤差分散の大ききで「カオス」という判断を下すことになるのか。

次の図は、久松（2010）で扱った自然対数変換した日本の実質 GDP の  
 暦年データのグラフに、トレンドのパターンをあてはめたものである。

図 3.3 実質 GDP（自然対数値）の動きと構造変化のパターン



トレンドが 1992 年で joint broken していて、1997 年で disjoint broken  
 していると判断し、シミュレーションで系列  $\{y_t\}$  を生成する際に想定する  
 パラメータ値を Excel で推定した。推定結果は次の通りである。ここで、  
 ( ) 内は  $t$ -値。SE は標準誤差。

$$\hat{y}_t = 12.6013 + 0.0364t - 0.0284dt(t, \lambda_1) + 0.0086dt(t, \lambda_2) - 0.0459du(t, \lambda_2)$$

$$(1321.676)(31.966) \quad (-7.378) \quad (2.396) \quad (-2.835)$$

$$R^2 = 0.9925, \quad \bar{R}^2 = 0.9912, \quad SE = 0.0166, \quad DW = 0.7105$$

シミュレーションでは、これらの推定値を真のパラメータ値と想定して  
 DGP (1 3) 式より  $\{y_t\}$  を生成する。

1980年～2007年 ( $n=28$ ) の観測期間において、構造変化点を 1992年 ( $\bar{n}_1=13$ ), 1997年 ( $\bar{n}_2=18$ ) の2時点, したがって, break fraction はそれぞれ  $\bar{\lambda}_1 = n_1/n = 13/28 = 0.46$ ,  $\bar{\lambda}_2 = n_2/n = 18/28 = 0.64$  より,  $n=150$ ,  $\bar{n}_1 = \lambda_1 n = 0.46 \times 150 = 69$ ,  $\bar{n}_2 = \lambda_2 n = 0.64 \times 150 = 96$  を真の構造変化点と設定する.

また, 誤差項  $\{u_t\}$  は,  $(1-0.5L)(1-0.2L)(1-L)u_t = \varepsilon_t$ , これを, 自己回帰型で書き換えた  $u_t = 1.7u_{t-1} - 0.8u_{t-2} + 0.1u_{t-3} + \varepsilon_t$  で生成する.

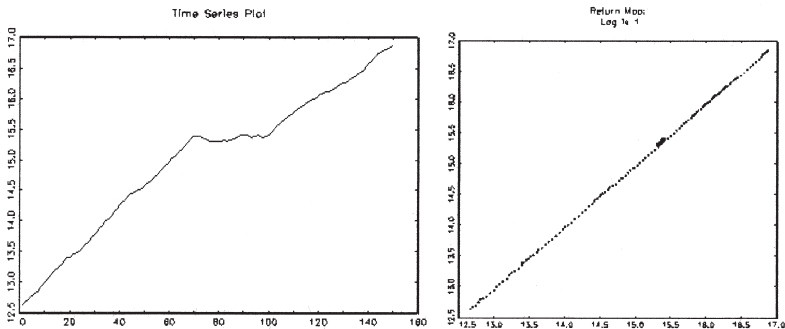
その際, 誤差項  $\varepsilon_t$  を, 平均0, 分散をそれぞれ

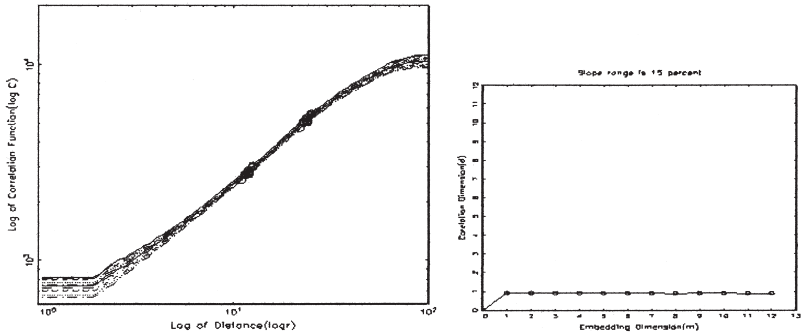
- ① 1/100000, ② 1/10000, ③ 1/1000, ④ 1/100, ⑤ 1/10, ⑥ 1.0

の6つの場合を想定して正規乱数で生成する. なお, ⑥は分散が1.0なので標準正規乱数になる.

これらのケースについてシミュレーションを行い, このうち, 以下では, 系列全体の変動を屈折トレンドが支配する②  $\varepsilon_t$  の分散=1/10000のケース, 系列全体の変動をランダム・ウォークが支配する⑥  $\varepsilon_t$  の分散=1.0のケース, さらに, ⑥で生成した原系列の階差系列について, 田中(1997)のGPアルゴリズムのプログラムを応用した結果を示す.

図 3.4  $\{y_t\}$  のリターン・マップと相関次元:  $\varepsilon_t$  の分散=1/10000

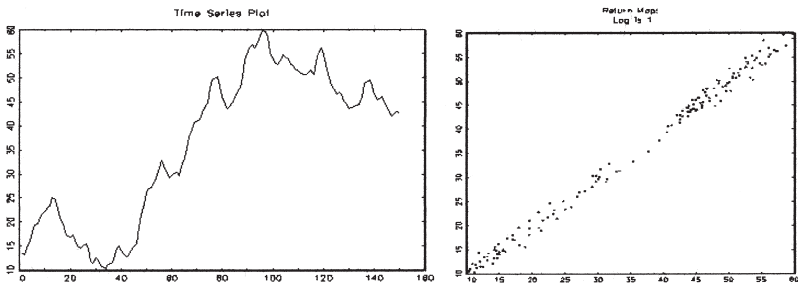




系列  $\{y_t\}$  には確率変数  $\{\varepsilon_t\}$  が含まれるので、 $\{y_t\}$  は確率変数系列になるが、図 3.4 より、その動きは屈折トレンドに支配されていて、リターン・マップは直線になり、相関次元の推定値のグラフは 1 で飽和しているので、 $\{y_t\}$  は確定的な系列つまりカオスと判定されてしまう。

図 3.5 は、 $\{\varepsilon_t\}$  を分散が 1.0 の標準正規乱数で生成する場合の、系列  $\{y_t\}$  のリターン・マップと相関次元のグラフである。誤差項  $\{\varepsilon_t\}$  の分散を 1 とする場合、標準正規乱数を発生させていることになるが、これでは誤差分散が②のケースの 1 万倍と大きく、図 3.5 に見るように系列  $\{y_t\}$  の動きはトレンドではなく誤差項のランダム・ウォークに支配され、②  $\varepsilon_t$  の分散 = 1/10000 のときの屈折トレンドのパターンは全く見て取ることができない。

図 3.5  $\{y_t\}$  のリターン・マップと相関次元：  $\varepsilon_t$  の分散 = 1.0



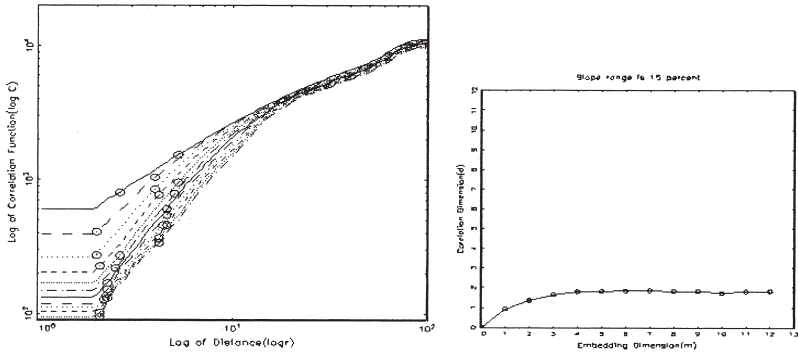
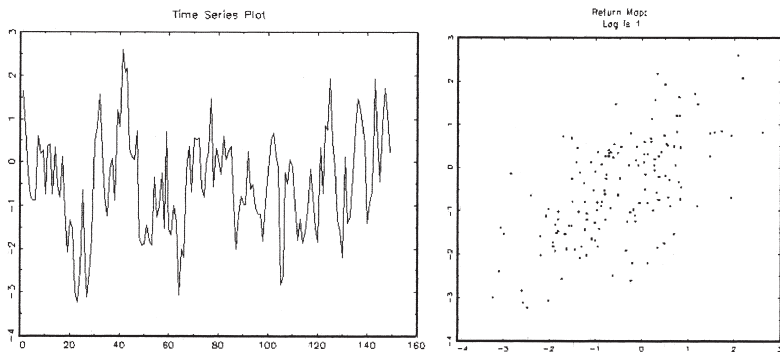
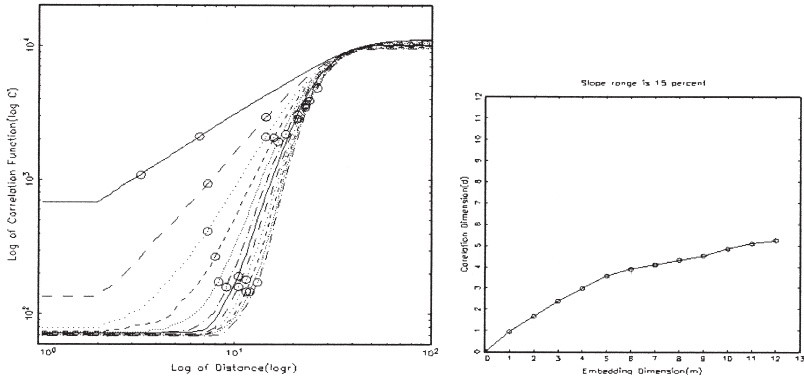


図 3.5 左上の図からわかるように、系列  $\{y_i\}$  はランダム・ウォークそのもので、リターン・マップも右上がりの帯状を呈し、図 3.1 の為替レート原系列の結果（4つの図）とパターンが非常によく似ている。いわゆるランダム・ウォークがカオスと誤って判定されるケースであり、この場合、階差を取ればランダムと判定されると思われる。

図 3.6 を見ると、階差  $\{\Delta y_i\}$  のリターン・マップは点が散在して図形をなしていない。また、相関次元の推定値は特定の値に飽和せず右上がりの曲線になっている。これより、 $\{\Delta y_i\}$  はランダムであり、階差を取ったものがランダムだから、元の系列  $\{y_i\}$  もランダムだと判定される。

図 3.6 階差  $\{\Delta y_i\}$  のリターン・マップと相関次元： $\varepsilon_i$  の分散=1.0





4. カオスとランダムは見分けがつくか？

この節では、前節と同じ DGP を想定し、誤差項  $\{\varepsilon_t\}$  を正規乱数で生成していたものをカオスで生成するように変更して、生成された「確定的」な  $\{y_t\}$  を GP アルゴリズムにかけたとき、どのような結果になるかを観察する。そして、前節の「確率的」な  $\{y_t\}$  を想定したときの結果と比較する。

前節の分析では、誤差項  $\{u_t\}$  を  $(1 - 0.5L)(1 - 0.2L)(1 - L)u_t = \varepsilon_t$ ，すなわち、 $u_t = 1.7u_{t-1} - 0.8u_{t-2} + 0.1u_{t-3} + \varepsilon_t$  で生成した。このとき、 $\{\varepsilon_t\}$  は正規乱数を用いるので、生成された  $\{y_t\}$  は「確率的」なデータになる。

ここでは、ロジスティック・マップと呼ばれる非線形漸化式 (1)

$$X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$$

より、初期値を  $X_1 = 0.31$  で系列  $\{X_t\}$  を生成し、「確定的な」系列  $\{X_t\}$  を (2) 式

$$\varepsilon_t = (X_t - 0.5) / \sqrt{1/8}$$

のように変換した  $\{\varepsilon_t\}$  を用いて、(13) 式

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \gamma_1 dt(t, \lambda_1) + \gamma_2 dt(t, \lambda_2) + \gamma_3 du(t, \lambda_2) + u_t$$

より  $\{y_t\}$  を生成する。

具体的なパラメータ値や構造変化点の設定は前節と同じである。誤差項  $\{u_t\}$  は  $(1-0.5L)(1-0.2L)(1-L)u_t = \varepsilon_t$  で与えられ、これを自己回帰型に書き換えると、 $u_t = 1.7u_{t-1} - 0.8u_{t-2} + 0.1u_{t-3} + \varepsilon_t$  となるが、ここでは、 $\{\varepsilon_t\}$  の前に重み  $\phi$  を付けた

$$u_t = 1.7u_{t-1} - 0.8u_{t-2} + 0.1u_{t-3} + \phi\varepsilon_t$$

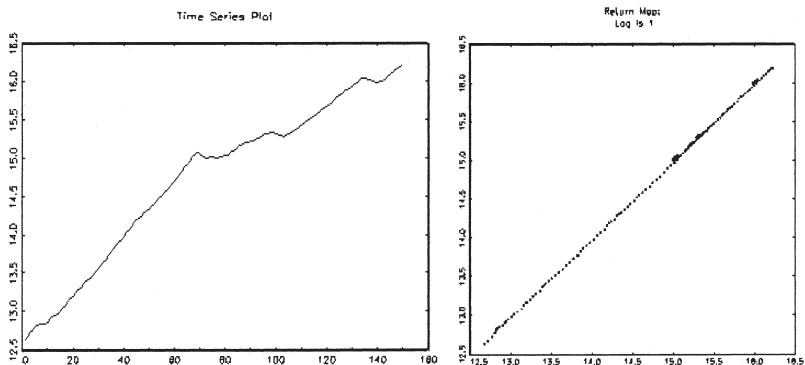
を想定する。  $\phi$  を①  $\phi = \frac{1}{\sqrt{100000}}$  , ②  $\phi = \frac{1}{\sqrt{10000}}$  , ③  $\phi = \frac{1}{\sqrt{1000}}$  ,

④  $\phi = \frac{1}{\sqrt{100}}$  , ⑤  $\phi = \frac{1}{\sqrt{10}}$  , ⑥  $\phi = 1$  の6つの場合を想定してデータを

生成し、GPアルゴリズムにかける。

$\{\varepsilon_t\}$  は確率変数ではなく、「確定的」な系列である。したがって、生成された  $\{y_t\}$  も「確定的」な系列になる。

図 4.1  $\{y_t\}$  のリターン・マップと相関次元のグラフ :  $\phi = \frac{1}{\sqrt{10000}}$



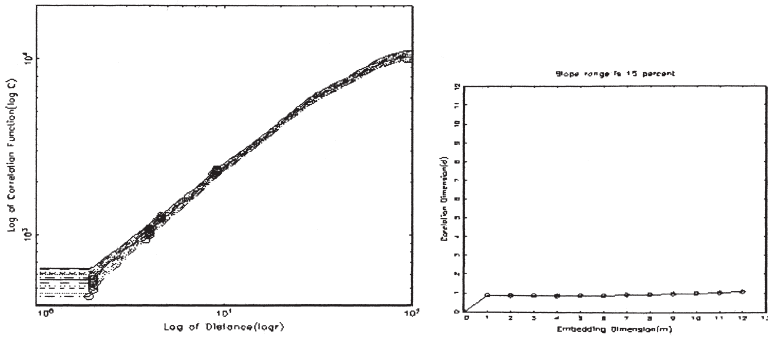


図 4.1 を前節の図 3.4 と比べると、両者はほとんど見分けがつかないことがわかる。次の図は、⑥ $\phi=1$  の場合の出力結果である。

図 4.2  $\{y_t\}$  のリターン・マップと相関次元のグラフ： $\phi=1$

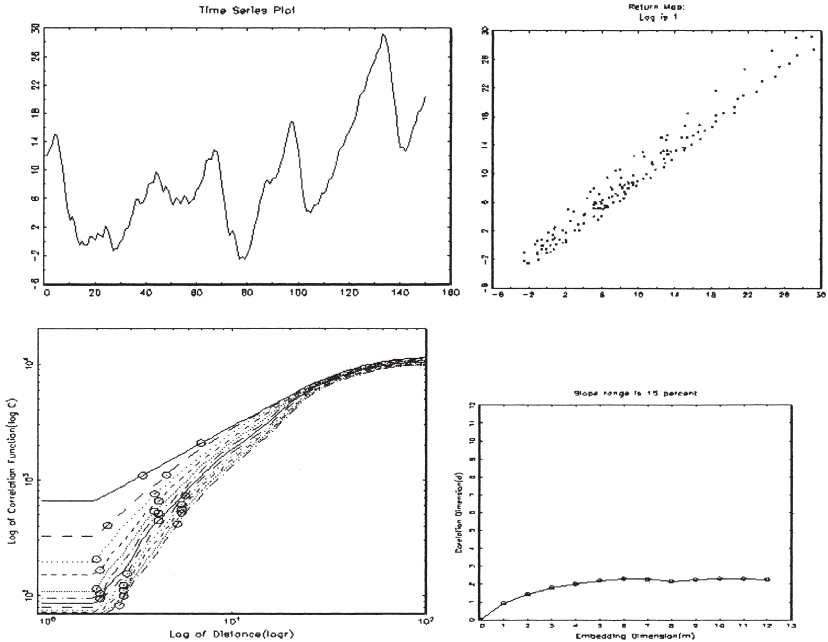
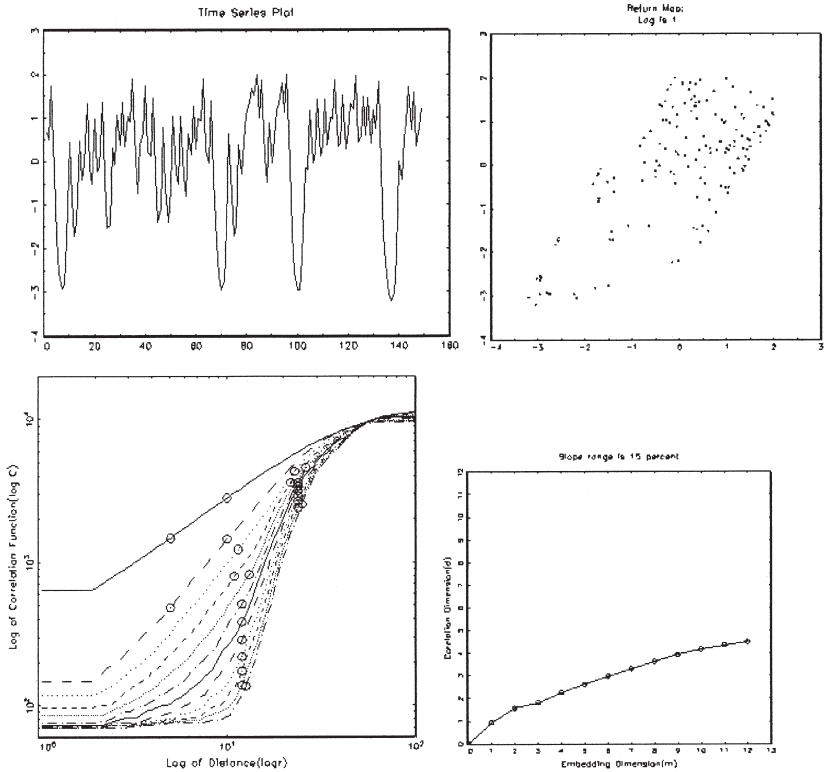




図 4.2 を図 3.5 と比べると、2つの図はいずれも  $\{y_t\}$  の動きに2か所で屈折している joint broken trend と disjoint broken trend は観察されず、誤差項  $\{u_t\}$  の激しい上下変動に支配された動きになっている。リターン・マップと相関次元のグラフを見て、図 4.2 が「確定的」な過程で、図 3.5 が「確率的」な過程であることは判別できない。

図 4.3 は、⑥  $\phi=1$  のときの階差  $\{\Delta y_t\}$  のリターン・マップと相関次元のグラフである。図 3.6 と比べると系列そのものの動きやリターン・マップには違いがみられるが、相関次元のグラフは区別がつかない。

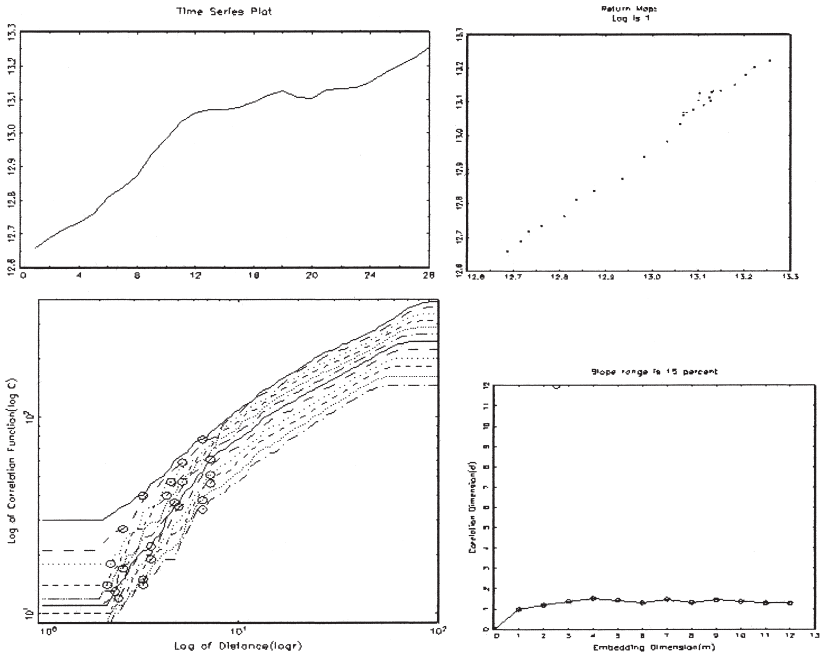
図 4.3 階差  $\{\Delta y_t\}$  のリターン・マップと相関次元のグラフ： $\phi=1$



最後に、図 3.3 で示した 1980 年～2007 年の日本の実質 GDP（自然対数値）について、田中の GP アルゴリズムのプログラムを応用した結果を示す。なお、先に示した図 3.4 は、この動きを joint broken trend と disjoint broken trend が支配し、それプラス、微小な上下変動をする誤差項があるモデルで近似したものである。また、誤差項をカオスで生成してこの動きを近似したものが図 4.1 になる。

次の図 4.4 は、実質 GDP（自然対数値）の GP 出力結果である。

図 4.4 実質 GDP（自然対数値）のリターン・マップと相関次元



左上の図で系列の動きを見ると、前節で取り上げた「確率的」なモデルのうち、誤差項の分散が 1 のときのような激しい上下変動ではなく、トレンドが支配しているパターン図 3.4 に近いことがわかる。また、この節で取り上げた「確定的」なモデルのなかでは、図 4.1 に近いことがわかる。

リターン・マップはほぼ直線であるが、点がつながって見えないのは観測値数  $n$  が少ないからである。右下の図より相関次元は 1 より少し高い位置で飽和している。

前節の「確率的」モデルでも、この節の「確定的」モデルでも、シミュレーションの設定は  $n=150$  であるのに対し、ここで使った実際の日本の GDP データは  $n=28$  と少なすぎる。個数が 30 にも満たない暦年データからははっきりしたことは言えない。四半期原系列および季節調整済み系列のデータが入手可能であれば、たとえば 1980 年～2007 年なら  $n=112$  になるので、もう少しはっきりした結果が得られると思われる。

ここで、「はっきりした」という意味は、図 4.4 では左下の  $\log C\text{-}\log r$  の図で  $m$  個の線が幅広に分布しているのにたいし、図 3.4 や図 4.1 ではほぼ 1 本に束ねたような形状になっているが、実際のデータでも  $n$  が大きければこれら 2 つの図に近い形状になるのではないかということである。

いずれにしても、以上の考察を踏まえると、図 4.4 からただちに実際の実質 GDP はカオスであると判断するのは早計である。

## 5. 問題点と展望

本稿では田中 (1997) の Grassberger-Procaccia アルゴリズムの Gauss プログラムを使って、観測期間内の 2 か所でそれぞれ joint broken trend と disjoint broken trend のパターンの屈折トレンドがある DGP を想定し、誤差項を正規乱数で発生させたとき、誤差項の分散の大きさによって GP アルゴリズムではカオス性の有無の判定がどう変わるか観察した。また、同じ DGP で誤差項をカオスで発生させた場合、GP アルゴリズムではカオス性の有無がどのように判定されるか観察し、結果を比較した。

実際の日本の実質 GDP 暦年データについて、田中の GP アルゴリズムのプログラムを適用した結果を示した。相関次元は低い次元で飽和した。しかし、暦年データで観測値数が少ないことと、同じ DGP を想定し誤差項をカオスとランダムでそれぞれ発生させた場合のシミュレーションによる比較分析の結果から、実際の日本の実質 GDP の GP アルゴリズムの出力結果より、カオス性の有無を一意に判定することはむずかしい。

暦年データではなく四半期データを使ってデータ数  $n$  を増やした場合、GP アルゴリズムでどう判定されるか見てみたい。また、本稿での分析ではカオス過程の一例としてロジスティック・マップを使った。Guégan (2001) で取り上げているような、ヘノン・マップや一般化テント・マップなど、ロジスティック・マップ以外の非線形漸化式を想定しても、本稿と同様な分析結果が得られるかどうかについては、今後の課題としたい。

### 謝辞

カオスとランダムは見分けがつかないことを例証することは学問的に意味があるという、藤本喬雄福岡大学経済学部教授（当時）からの助言が本稿の分析の動機づけになった。また、参考文献のうち Brock と Guégan について情報をいただいた。藤本教授に感謝したい。なお、本稿において誤りがあれば、それは一切私自身の責任である。

本号は中村邦彦教授の定年退職記念号である。22 年間、同僚として特に PC 関連ではお世話になった。何か困ったことがあればその都度相談したが、些細な質問にも快く答えていただいた。ここに記して謝意を表したい。

### 参考文献

- [1] Brock, W. A., Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version, *Journal of Economic Theory*, 40, pp.168-195, 1986.
- [2] Grassberger, P. and I. Procaccia, Measuring the Strangeness of Strange Attractors, 9, pp.189-208, *Physica D*, 1983.
- [3] Guégan, D., Long Memory Behavior for Simulated Chaotic Time Series, IEICE transactions on fundamentals. E84-A, 2001.
- [4] 田中辰雄, 「第 5 章: カオス理論の計量分析への応用」, 『応用計量経済学 I』, 高木康順・秋山裕・田中辰雄著, 多賀出版, pp.281-362, 1997.
- [5] 久松博之, 「複数の構造変化点の不偏推定について」, 『香川大学経済学部研究年報 (2009)』, 49 巻, 第 4 号, pp.49-72, 2010 年 3 月.
- [6] 久松博之, 「漸化式とランダム・ウォーク」, 『香川大学経済論叢』, 83 巻, 第 4 号, pp.93-127, 2011 年 3 月.

- [7] 宮野尚哉, カオスと時系列, 臨時別冊・数理科学『時系列解析入門』, 第3章, サイエンス社, 2002.
- [8] 矢島美寛, 長期記憶をもつ時系列モデル, 『経済時系列の統計』, 岩波書店, pp.104-202, 2003.