

# 経済データのカオス性について

久松 博之

## 1. はじめに

久松(2011)では経済データの生成過程(Data Generating Process, 以下 DGP と略す)が確定的(カオス)なのか確率的(ランダム)なのか見分ける方法についてサーベイし, シミュレーションによる予備的考察を行い, いくつかの問題点と検討課題を指摘した.

このうち, 久松(2012)では, 田中(1997)で指摘されている“観測期間に構造変化がある場合それを誤ってカオスだと判定してしまう問題”について, 田中(1997)の Grassberger-Proccaccia アルゴリズム(以下, “GP アルゴリズム”と略す)の GAUSS プログラムを使って, 観測期間内の2か所でそれぞれ joint broken trend と disjoint broken trend のパターンの屈折トレンドがある DGP を想定し, 誤差項を正規乱数(ランダム)で発生させたとき, 誤差項の分散の大きさによって GP アルゴリズムにおけるカオス性の有無の判定がどう変わるか観察した. また, 同じ DGP で, 誤差項をロジスティック・マップ(カオス)で発生させた場合, GP アルゴリズムではカオス性の有無がどのように判定されるか観察し, これらの結果を比較した.

本稿では, 第2節で非線形漸化式の一つであるロジスティック・マップから生成したデータとホワイト・ノイズ(標準正規乱数)データの標本自己相関関数のグラフを描き, 両者は見分けがつかないことを示す. そして, 矢島(2003)で指摘されている, 見分けがつかないことの理論的な根拠, つまり, 期待値, 分散, 自己共分散がホワイト・ノイズの要件を満たすある確率変数が存在し, それが漸化式(ロジスティック・マップ)を満たすという説明における, 「確率変数が漸化式を満たす」とはどういう意味か考える.

第3節ではまず GP アルゴリズムの基本的な考え方を説明する。そしてロジスティック・マップで生成したデータとホワイト・ノイズ（標準正規乱数）に GP アルゴリズムのプログラムを適用し、リターン・マップと相関次元のグラフから、カオスとランダムとの両者が区別できるかどうかを観察する。また、その際、田中（1997）のプログラムは、若干の変更が必要であることについても触れる。

第4節では、日本の四半期実質 GDP 原系列と季節調整済み系列について GP アルゴリズムを適用し、カオス性の有無がどのように判定されるか観察する。久松（2012）で構造変化がある場合についてシミュレーション分析した際に、実際の日本の実質 GDP 暦年データに GP アルゴリズムを適用したが、観測値数が  $n=28$  と少なくはつきりしたことが言えなかった。ここでは、四半期データを使って観測値数が 100 を超える場合で GP 分析を行う。高度成長期を含むトレンドが支配的な期間と、バブル崩壊やリーマン・ショックなどの激動期を含む期間について、それぞれ GP アルゴリズムを適用し、カオス性の有無がどう判定されるか観察する。

第5節では、比較的大きな数千個規模の数のデータが使える為替レート（円・米ドルレート）と株価（日経 225 終値）の日次データに対して、GP アルゴリズムを適用したときの結果とその解釈について整理する。また、これらの系列の階差系列、および株価についてはパーセント収益率である株価の対数 1 階差に GP アルゴリズムを適用した結果についても観察する。そして、第6節で結論と問題点を整理する。

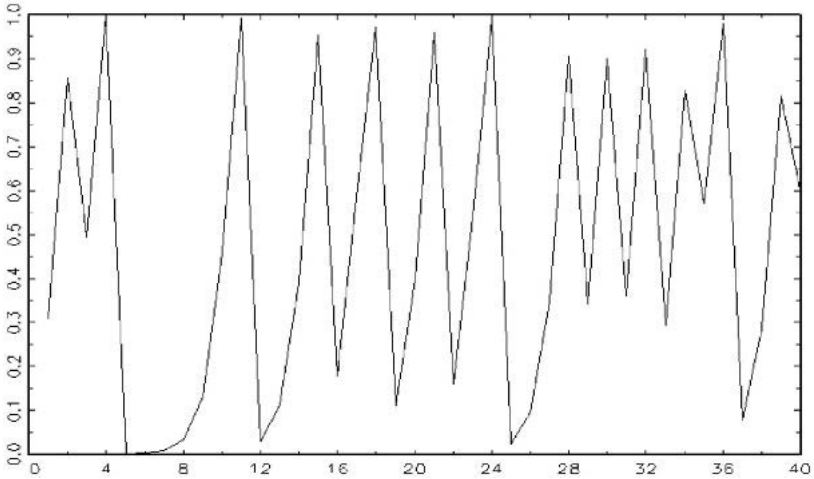
## 2. ロジスティック・マップとホワイト・ノイズ

久松（2011）では、矢島（2003）が示した実験内容について、初期値を変えて実行した結果を以下のように示した。

ロジスティック・マップ（Logistic Map）と呼ばれる非線形漸化式

$$X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1}) \quad (1)$$

より、系列  $\{X_t\}$  を生成してグラフを描くと図 2.1 のようになる。

図 2.1  $\{X_t\}$  のグラフ ( $X_1 = 0.31, n=40$ )

$\{X_t\}$  の標本分散，標本自己共分散，標本自己相関は，それぞれ次のように定義される．

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \quad (2)$$

$$\hat{\gamma}(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=s+1}^n (X_t - \bar{X})(X_{t-s} - \bar{X}) \quad (3)$$

$$\hat{\rho}(s) = \hat{\gamma}(s) / \hat{\gamma}(0) \quad (4)$$

図 2.2・a は  $X_1 = 0.31, n=400$  のときの，ロジスティック・マップから生成した  $\{X_t\}$  の標本自己相関関数のグラフである．横軸目盛は時間の遅れ  $s$  で  $0 \sim 40$  まで取っている．比較のために，図 2.2・b でホワイト・ノイズ（標準正規乱数）の， $n=400$  のときの標本自己相関関数のグラフも示した．

図 2.2・a  $\{X_t\}$  の自己相関関数 ( $X_1 = 0.31$ ,  $n=400$ , 横軸は遅れ  $s$ )

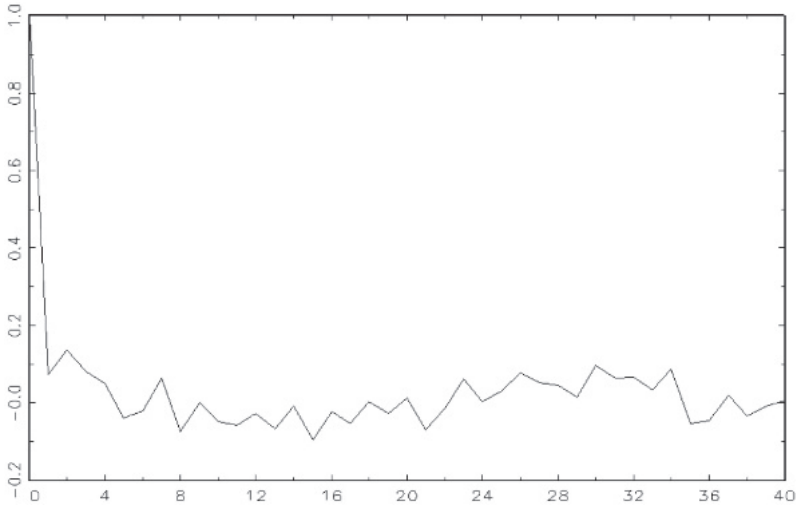


図 2.2・b ホワイト・ノイズ (標準正規乱数) の自己相関関数,  $n=400$

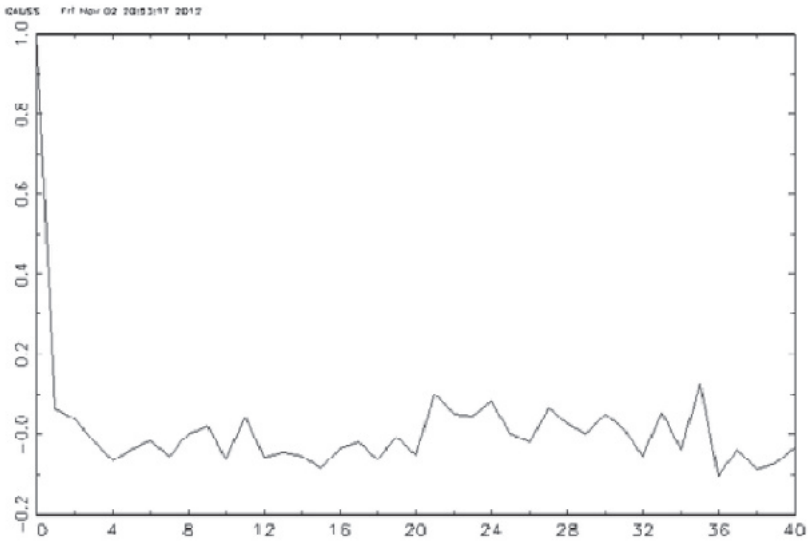


図 2.2・a,b を見てわかるように、矢島 (2003) で指摘されている通り、ロジスティック・マップの標本自己相関関数  $\hat{\rho}(s)$  は、ホワイト・ノイズのそれと同様、すべての  $s$  で 0 に近い値を取ることがわかる。したがって、ロジスティック・マップから生成されたデータとホワイト・ノイズとを、標本自己相関関数では区別できないことになる。<sup>1</sup>

矢島 (2003) によれば、次のような確率変数  $X_t$

$$X_t = \sin^2(2^{t-1} \pi U), \quad U \text{ は } [0,1] \text{ 上の一様分布}, \quad (5)$$

が存在し、確率過程  $\{X_t\}$  は漸化式 (1) を満たす。さらに、

$$E(X_t) = \int_0^1 \sin^2(2^{t-1} \pi x) dx = \int_0^1 (1 - \cos(2^t \pi x)) / 2 dx = 1/2$$

$$\text{Var}(X_t) = E(X_t - 1/2)^2 = E\left(\left(-\cos(2^t \pi U) / 2\right)^2\right) = \int_0^1 \left(-\cos(2^t \pi x) / 2\right)^2 dx = 1/8$$

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \int_0^1 \left(-\cos(2^t \pi x) / 2\right) \left(-\cos(2^s \pi x) / 2\right) dx = 0, \quad \forall t \neq s$$

つまり、 $E(X_t) = 1/2$ 、 $\text{Var}(X_t) = 1/8$ 、 $\text{Cov}(X_t, X_s) = 0, \forall t \neq s$  が成り立ち、期待値と分散はそれぞれ時間  $t$  には依存せず一定値を取り、異時点間の自己共分散が 0 なので、 $\{X_t\}$  はホワイト・ノイズとなる。したがって、(5) 式で定義されるホワイト・ノイズの実現値と漸化式 (1) から発生するカオスは識別できない、というものである。

ここで、(5) 式の確率過程  $\{X_t\}$  が、漸化式 (1) を満たすことを示す。

$$X_t = \sin^2(2^{t-1} \pi U) \text{ を展開すると、}$$

---

<sup>1</sup> 矢島 (2003) p.189 の図 29 は、図 28 の(a), (b)どちらのデータの自己相関関数なのか明記されていないが、(a)の初期値が  $X_1 = 0.30$  のときの、遅れ  $s$  を 0~40 まで取った時のグラフである。久松 (2011) を参照。

$$\begin{aligned}
X_t &= \sin^2(2^{t-1} \pi U) = \left\{ \sin 2 \left( \frac{2^{t-1} \pi U}{2} \right) \right\}^2 \\
&= \left\{ 2 \cdot \sin \left( \frac{2^{t-1} \pi U}{2} \right) \cos \left( \frac{2^{t-1} \pi U}{2} \right) \right\}^2 \\
&= \left\{ 2 \cdot \sin(2^{t-2} \pi U) \cos(2^{t-2} \pi U) \right\}^2 \\
&= 4 \sin^2(2^{t-2} \pi U) \cos^2(2^{t-2} \pi U) \\
&= 4 \cdot \sin^2(2^{t-2} \pi U) (1 - \sin^2(2^{t-2} \pi U)) \\
&= 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})
\end{aligned} \tag{6}$$

となり，確率変数  $X_t = \sin^2(2^{t-1} \pi U)$  は， $X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$  を満たす．

このとき，(6) 式の展開で最後の等号が成り立つのはどのような場合かということが問題となる．

$X_t = \sin^2(2^{t-1} \pi U)$  から生成されるデータ  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  は確率変数の実現値の集合である．一方，漸化式  $X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$  から生成されるデータ  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  は確定的な値の集合である．非線形漸化式の場合，初期値  $\{X_1\}$  の値によって第 2 時点以降の値  $X_2, \dots, X_n$  が決まってしまう．

$X_t = \sin^2(2^{t-1} \pi U)$  から生成されるデータは， $\{X_1\}$  が与えられても，第 2 時点以降の値  $X_2, \dots, X_n$  は，その時々で  $U$  の取る値によって何通りも取りうる．「確定的」と「確率的」の違いはその点にある．

そうすると、「(5)式で定義されるホワイト・ノイズの実現値と非線形漸化式(1)から生成されるカオスは識別できない.」,あるいは、「確率変数  $X_t = \sin^2(2^{t-1}\pi U)$  は,  $X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$  を満たす.」とは, どういう意味かということになる.

「確率変数  $X_t = \sin^2(2^{t-1}\pi U)$  が漸化式  $X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$  を満たすという場合, 同じ  $U$  の値を採用していることになる. 各  $t$  で  $U$  を確率的に選ぶのではなく,  $t=0$  で選んだ値を, 以後, 採用し続けると, 漸化式  $X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$  が成立する.

$\sin^2(2^{t-1}\pi U)$  の  $U$  と,  $\sin^2(2^t\pi U)$  の  $U$  が同じで, 前者を  $X_{t-1}$ , 後者を  $X_t$  と書き換える. この書き換え自体を間違いと見なせば, 漸化式は成立しない. 実際,  $t=0$  で選んだ  $U$  を採用し続けるなら, それは確率過程ではない.<sup>2</sup>

### 3. GP アルゴリズムを使ったカオス性の識別

ロジスティック・マップで生成されたデータとホワイト・ノイズ(標準正規乱数)データにそれぞれ GP アルゴリズムを適用し, アウトプットとして出力されるリターン・マップや相関次元のグラフから, カオスとランダムを識別できるかという問題を考える.

#### 3.1 GP アルゴリズムの基本的な考え方

田中(1997)をもとに GP アルゴリズムの基本的な考え方を説明する. その際, 考え方を理解するうえで, 宮野(2002)の説明も参考にした.

複数の変数間に厳密に確定的な関係が成り立っている場合の例として, たとえばレスラー(Rössler)方程式は, 次のような3つの変数の連立微分方程式になっている.

---

<sup>2</sup> この解釈は, 筆者の「確率変数が漸化式を満たすとはどういう意味か.」という質問に対し, 藤本喬雄福岡大学教授(当時)が示唆したものである.

$$\begin{aligned}
 dx/dt &= -y + z \\
 dy/dt &= x + 0.2z \\
 dz/dt &= 0.2 + y(x - c)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

このとき、これら3つの変数をそれぞれ軸に取った立方体の中に図形が現れる。この図形をアトラクター (attractor) と呼ぶ。しかし、実際にたとえば3つの変数のうち  $x$  に関してのみ時系列データが得られ、この系列が確定的か確率的か判断しようとするとき、その背後に(7)式のような関係があつて3変数間にカオス性が成り立っているとすれば、この1系列のみからどうやってアトラクターの存在を突き止めたらいかがが問題になる。

ターケンス (Takens) の埋め込み定理 (embedding theorem) によれば、3つの変数のうちの1つの変数  $\{x_i\}$  の時間的な遅れの項を組み合わせ  $x_i = (x(t), x(t-L), x(t-2L), \dots, x(t-(m-1)L))$  のようにベクトル化して、埋め込み次元  $m$  と時間の遅れ  $L$  を適切に選択すると、3変数がすべてわからなくても、元のアトラクターと似た図形を得ることが出来るという。

ある空間に埋め込みを行った時、プロットした空間内のある点を取り、そこを中心とした半径  $r$  の円を描く。この円の中に点がいくつあるか数え個数  $C$  を測定する。円の半径  $r$  が大きくなれば、円内に含まれる点の数は増えるので  $C$  は  $r$  の関数である。そこで、 $r$  を大きくしていったとき個数がどのように増えるかを知るには、実際のデータをプロットし、 $C(r)$  を  $r$  の関数として測定して、 $C(r)$  が半径  $r$  のどのような関数か調べればよい。

$C(r)$  が  $r$  の2乗に比例すれば2次元的に、 $r$  の1乗に比例すれば1次元的に点が分布していることになる。実際に計算する場合は、 $C(r) \approx \alpha r^d$  の対数を取り

$$\log C(r) \approx d(\log r) + \log \alpha
 \tag{8}$$

より、傾き  $d$  (相関次元) を最小2乗法で推定すれば、プロットした点の次元が得られる。この考えにもとづいて、すべての点を出発点に取って  $C(r)$  を計算し、その平均的な挙動を調べる。埋め込み次元  $m$  を大きくし

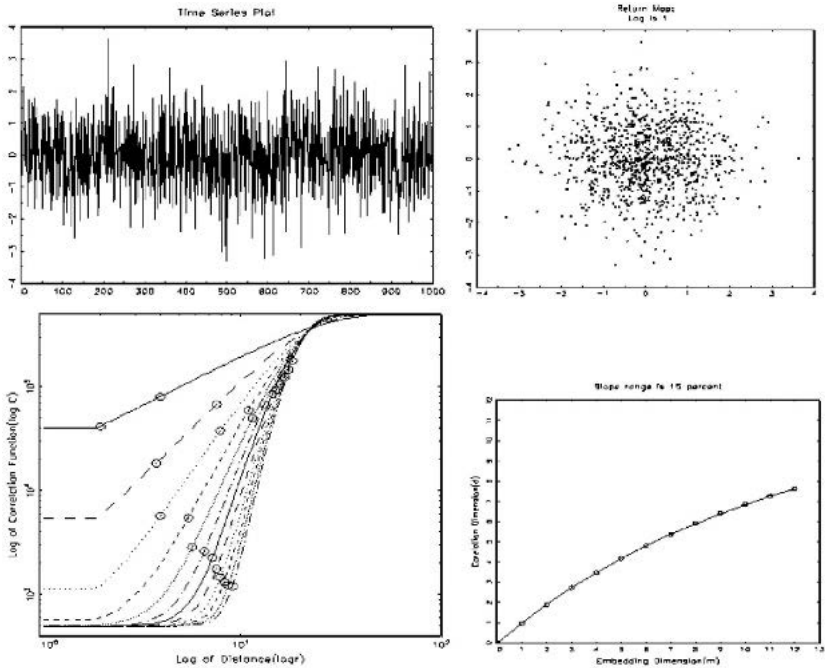


たとき  $d$  の推定値が一定の値で飽和すれば、アトラクターの存在が示唆される。また、 $m$  が大きくなるにしたがって  $d$  の推定値が一定値で飽和せず大きくなるようであれば、カオス性はないと判定される。

### 3.2 ロジスティック・マップとホワイト・ノイズの相関次元

田中 (1997) の GP アルゴリズムの GAUSS プログラムを使って、ロジスティック・マップで生成したデータとホワイト・ノイズ (標準正規乱数) のそれぞれについて、リターン・マップと相関次元を求めた。最初に図 3.1 を使って、ホワイト・ノイズの GP 分析の結果の見方について説明する。

図 3.1 ホワイト・ノイズのリターン・マップと相関次元 :  $n=1000$



GP アルゴリズムにかけると 4 つの図が出力される。左上の図は、横軸に時間を取って系列そのものの変動を示したもので、これより、その系列

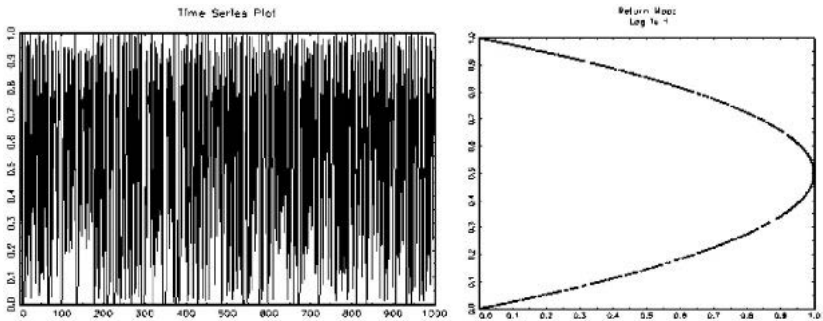
が定常なのか非定常なのか、あるいはトレンドにしたがっているかなど、系列の変動の特徴を観察することができる。この場合、図 3.1 左上図よりホワイト・ノイズの時系列的なデータの動きがわかる。

一方、右上の図はリターン・マップと呼ばれていて、縦軸に系列の前期の値を、横軸に今期の値を取ってプロットしたもので、この図に図形が現れるとその系列はカオスであり、点が散在すればランダムだと判定される。図 3.1 のリターン・マップの場合、点が散在し図形をなしていないので、系列はランダムであると判定される。

左下図は、縦軸に  $\log C(r)$ 、横軸に  $\log r$  を取ったグラフで、埋め込み次元  $m$  ごとのグラフが 1 本ずつ描かれている。このグラフの傾斜が、 $d$  の推定値になる。そして、右下の図は縦軸に相関次元  $d$  の推定値、横軸に埋め込み次元  $m$  を取ったときのグラフである。埋め込み次元  $m$  の値を大きくしていくとき、相関次元  $d$  が一定値で飽和すると、その系列はカオス性があり、飽和しなければカオス性はないと判定される。そうすると、図 3.1 の場合、相関次元は一定値で飽和せず、右上がりの曲線を描いているので、系列はランダムだと判定されることになる。

これに対し、ロジスティック・マップ:  $X_t = 4X_{t-1}(1 - X_{t-1})$ ,  $X_1 = 0.31$ ,  $n=1000$  で生成したデータに、田中 (1997) の GP アルゴリズムのプログラムを適用すると、以下ようになる。

図 3.2・a ロジスティック・マップの相関次元,  $n=1000$



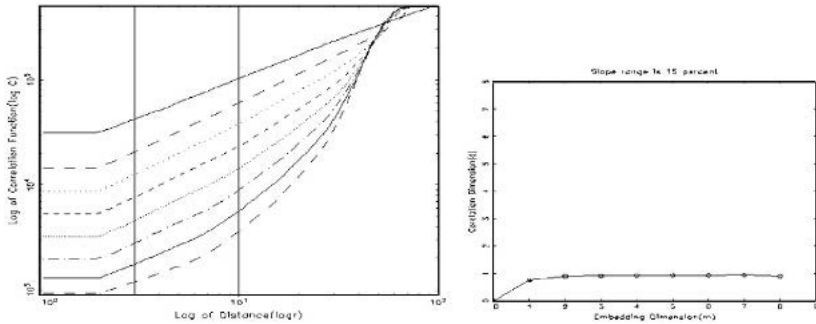


図 3.2・a 左上の図を見ると、時系列的なデータの動き方はその振れ幅も触れ方も、ホワイト・ノイズのデータの動き方とは異なっている。右上図のリターン・マップには2次曲線がはっきり現れ、このデータがロジスティック・マップより生成されたことがわかる。そして、右下図で相関次元の状況を見ると、1のあたりで飽和していることがわかる。なお、 $m$  は8まで取っている。

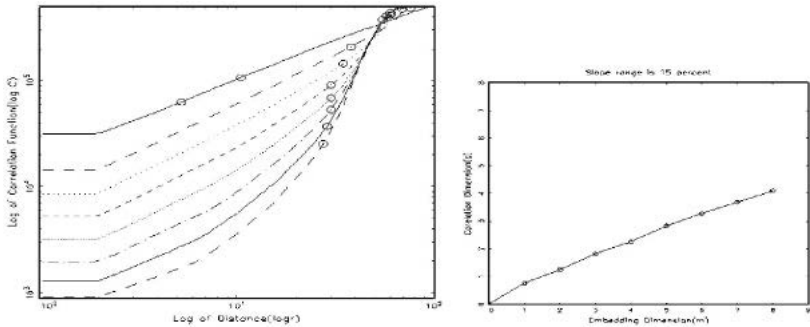
相関次元を計算するには、埋め込み次元  $m$  ごとに  $\log C$  を  $\log r$  に回帰させて、傾きを最小2乗法で推定すればよいが、その際  $\log C$  と  $\log r$  をプロットしたグラフのどの部分の傾きを測るか決める必要がある。

田中 (1997) の GP アルゴリズムの GAUSS プログラムでは、横軸方向の長さ 15% の領域を取り、この領域を動かして傾きが最大になる部分を取る設定になっている。

しかし、田中 (1997) のプログラムを初期の想定のみで実行すると、図 3.2・b に示すように、 $\log C \cdot \log r$  グラフの○と○で囲まれた範囲の傾きを測ることになり、相関次元のグラフは右上がりの曲線になって一定値で飽和しない。ロジスティック・マップはカオスであることが明らかなのに、相関次元が一定値で飽和しないのはおかしい。

$\log C \cdot \log r$  のグラフを見ると、右上の S 字にくねった部分に右側の○がある場合、 $m$  が大きくなるにしたがって傾きが急になっているので、その区間で  $d$  を推定すると相関次元 (の推定値) は大きくなっていく。

図 3.2・b ロジスティック・マップの  $\log C \cdot \log r$  と相関次元,  $n=1000$



田中（1997）の pp.307・308 に、傾きの測定方法として  $\log C \cdot \log r$  グラフのどの部分を取るかということに言及した箇所がある。「経験的には、直線が長くきれいに延びている部分を使うのが妥当と思われる。理屈の面でも、長く伸びている部分を使うということは、多くのデータの情報を使うことになるという点で望ましいだろう。」

そこで、「直線が長くきれいに延びている部分」として便宜的に図 3.2・a 左下図 ( $\log C \cdot \log r$  グラフ) 横軸の 25%分位点と 50%分位点の区間の傾きを測ることにした。図 3.2・a のこの区間の  $\log C$  と  $\log r$  のデータを使って単回帰で相関次元を推定すると、右下のグラフのように相関次元は一定値（1のあたり）で飽和した。左下図を見ても、 $m$  の値にかかわらず、この区間の傾きがほぼ同じ値を取っていることがわかる。

もし、 $\log C \cdot \log r$  グラフで長く伸びた直線部分が横軸の 50%分位点から 75%分位点の区間であれば、その範囲で  $d$  を推定すればよい。

次の図 3.3・a は、 $\log C \cdot \log r$  グラフの横軸の 25%分位点と 50%分位点の区間を取って傾きを測る方法で、エノン・マップ（Hénon Map）で生成したデータに、GP アルゴリズムを適用した結果である。

なお、エノン・マップとは、次の決定論的な方程式のことである。

$$\begin{aligned}
 x_t &= 1 + y_{t-1} - ax_{t-1}^2 \\
 y_t &= bx_{t-1}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

ここで、 $a=1.4$ 、 $b=0.3$ 、初期値は $x_1=1.0$ 、 $y_1=1.0$ と置いた。

図 3.3・a エノン・マップ $\{x_t\}$ のリターン・マップと相関次元,  $n=1000$

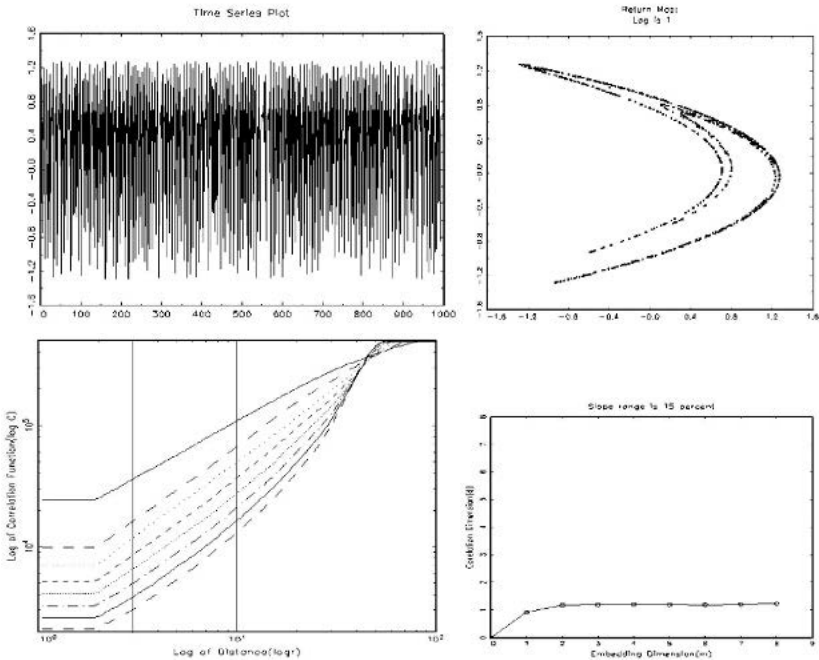


図 3.3・a より、リターン・マップには 2 次曲線が幾重にも重なったような図形が現れる。また、右下の図より、相関次元は 1 を少し上回ったあたりで飽和していることがわかる。

ところが、田中 (1997) プログラムをそのまま適用すると、次の図 3.3・b のようになる。相関次元が  $m \geq 4$  で右上がりになっていて、カオスなのに一定値で飽和しないというのはおかしい。

図 3.3・b エノン・マップの logC-logr 図と相関次元, n=1000

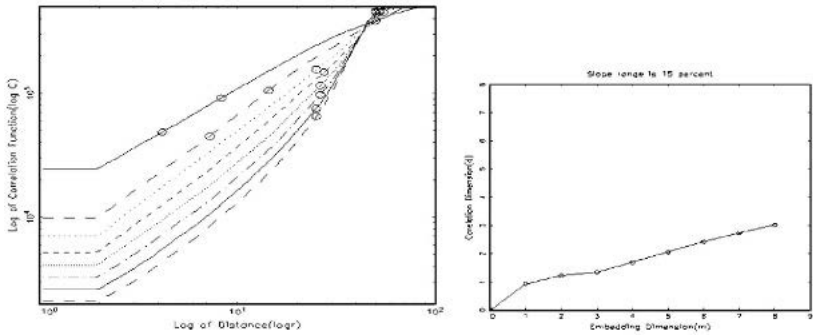
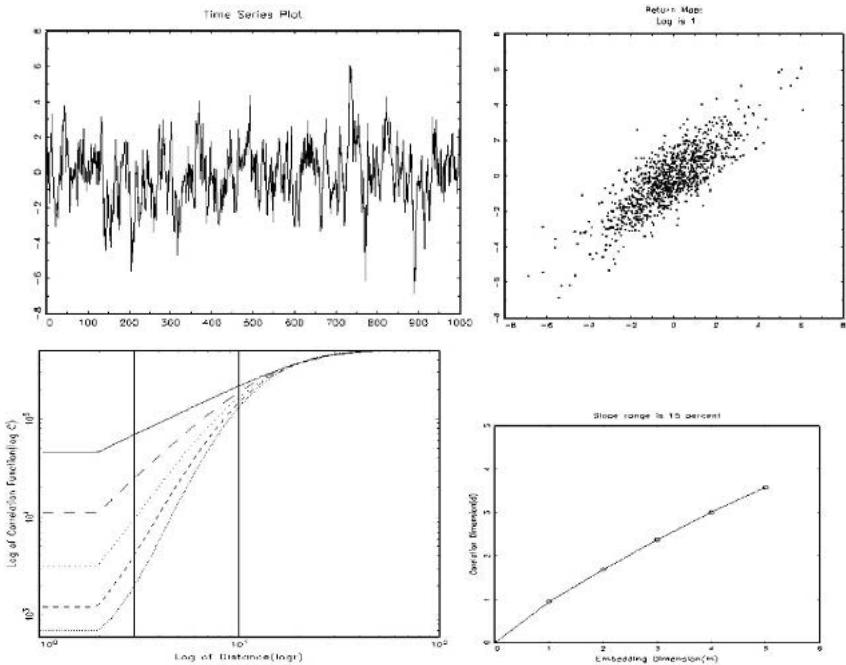


図 3.4・a は, AR(1)過程で自己回帰係数が 0.8 のとき, 誤差項を標準正規乱数で生成したデータの GP アルゴリズムの出力結果である.

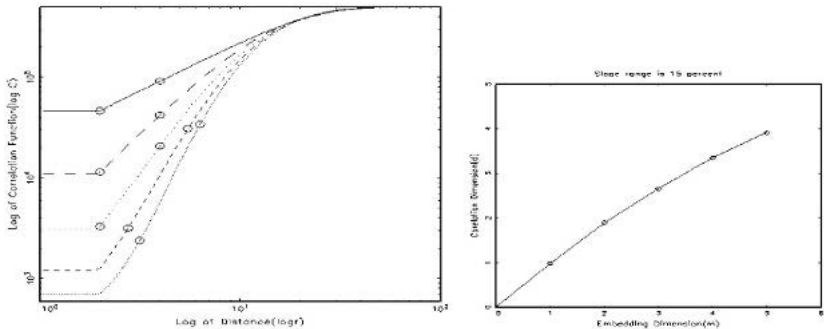
図 3.4・a AR(1)データのリターン・マップと相関次元, n=1000



リターン・マップは点が散在し、 $x_{t-1}$  と  $x_t$  の間に正の系列相関があることがわかる。また、相関次元は一定値で飽和せず右上がりの曲線を描く。したがって、ランダムだと判定される。

図 3.4・b は田中（1997）プログラムを初期設定のまま実行した結果で、相関次元のグラフは右上がりになり、 $\log C \cdot \log r$  の 25%～50% 区間で計測した場合と傾向は変わらない。

図 3.4・b AR(1)過程の  $\log C \cdot \log r$  図と相関次元、 $n=1000$



矢島（2003）で、自己相関関数では区別がつかないとされたロジスティック・マップとホワイト・ノイズは、GP アルゴリズムのリターン・マップと相関次元のグラフで、はっきり区別されることがわかった。

これ以降の分析では、必要があれば  $\log C \cdot \log r$  グラフの 25%分位点と 50%分位点の区間で傾きを測る方法の結果も併せて示すことにする。

#### 4. 四半期実質 GDP の原系列と季節調整済み系列のカオス性について

久松（2012）では、日本の実質 GDP の年次データがカオス性をもつかどうかを調べたが、暦年データで  $n=28$  とデータ数が少ないので、ここでは四半期データを使って観測値数を約 4 倍に増やして同様の分析を行う。

内閣府 SNA サイトの 1998 年度国民経済計算（1990 基準・68SNA）のページから、「平成 2 年基準（68SNA）・1955 年から掲載」の四半期実質 GDP の原系列（季節未調整系列）と季節調整済み系列をダウンロード

し、田中の GP アルゴリズムのプログラムを適用した結果を整理する。

(1) では、昭和 30 年第 II 四半期—平成 11 年第 I 四半期 (n=121) の実質 GDP 四半期データの原系列 (季節未調整系列) について、(2) では同じ期間で季節調整済み系列について、GP アルゴリズムにかけた結果を示し (1) と (2) の結果を比較する。この観測期間には、高度成長期、バブル崩壊、その後の低成長期が含まれる。また、(3) では実質 GDP (四半期: 原系列): 昭和 55 年 I—平成 22 年 I (n=121) について、(4) では同じ期間でその階差系列の GP の結果を示す。この期間には、リーマン・ショックとその翌年までが含まれる。なお、ここで使ったデータをダウンロードした 2012 年 6 月時点では、この期間の季節調整済み系列は公開されていないので、(1) と (2) のような比較はできない。

(1). 実質 GDP (四半期: 原系列): 昭和 30 年 II—平成 11 年 I (n=121)

図 4.1 実質 GDP (四半期: 原系列) のリターン・マップと相関次元

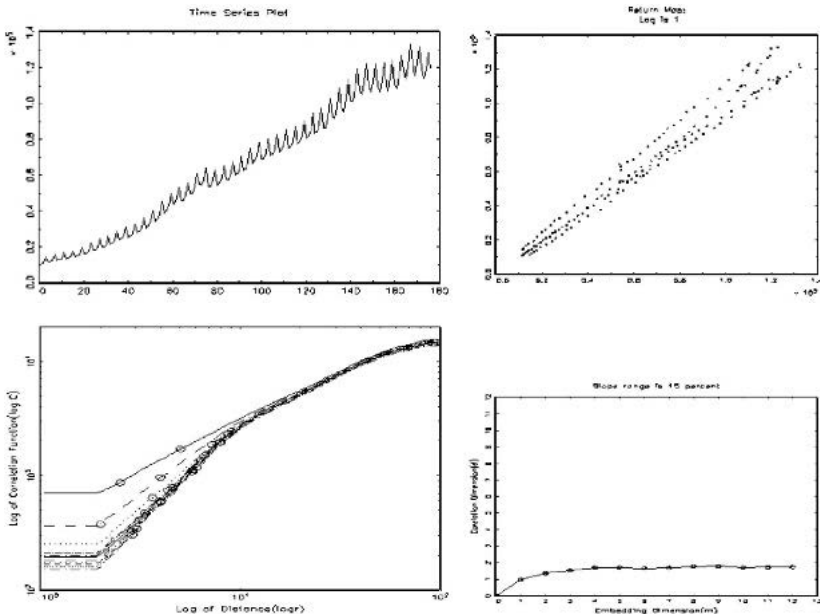


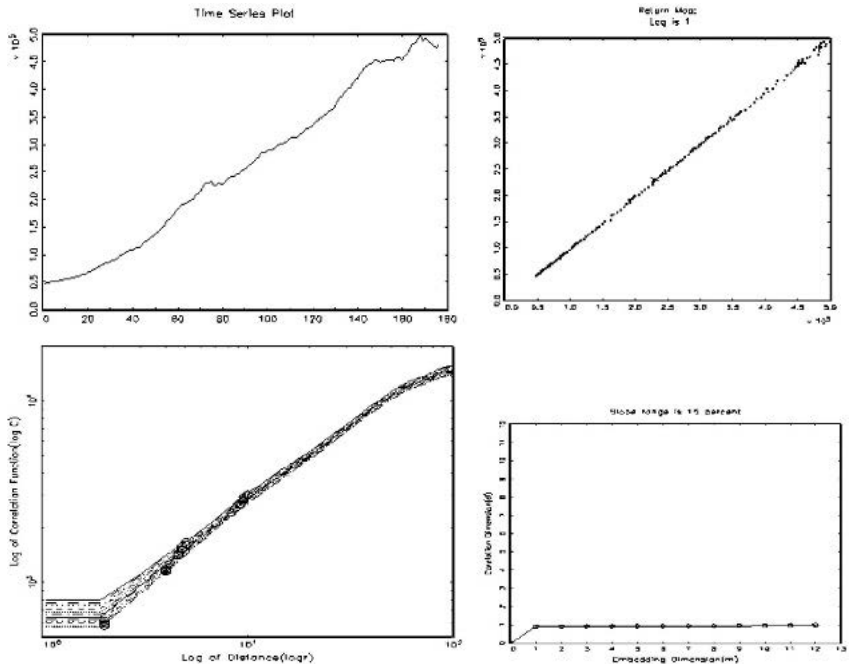


図 4.1 の左上の図は、原系列は観測期間内の 2 箇所屈折するトレンドのまわりに季節変動を加えたような動きをしている。リターン・マップは久松 (2011) で示したランダム・ウォークのそれが右上がりの一定幅の帯状になっていたのに対し、右上がりに広がりをもつ。また、右下相関次元のグラフは  $d=2$  のあたりで飽和している。これらの結果から、GP アルゴリズムでは、GDP 四半期原系列はカオスと判定される。なお、25%~50% 区間で測るやり方でも、相関次元の推定値はほぼ同じ値で飽和する。

(2). 実質 GDP (四半期: 季調値): 昭和 30 年 II - 平成 11 年 I (n=121)

次の図 4.2 は、同じ観測期間、昭和 30 年 II - 平成 11 年 I (n=121) における実質 GDP 四半期季節調整済みデータに、田中の GP アルゴリズムのプログラムを適用した結果である。

図 4.2 実質 GDP (四半期: 季調値) のリターン・マップと相関次元



実質 GDP 四半期原系列は、季節変動はあるが、右上がりのトレンドが支配的で相関次元は  $d=1\sim 2$  の間にある。一方、季節調整済み系列は季節変動が除かれて、ほぼ右上がりのトレンドのみに支配されていて、相関次元は  $d=1$  で飽和し、カオスと判定されることになる。なお、相関次元は 25%~50% 区間で測っても、ほぼ同じ値で飽和する。

(1) と (2) の結果について、ここで扱った四半期実質 GDP のデータは昭和 30 年から平成 11 年までの期間で、高度成長期と 90 年代以降のバブル崩壊後の時期が含まれている。原系列も季節調整済み系列も右上がりのトレンドに支配されていて、GP アルゴリズムで計算された相関次元のグラフは、前者は  $d=2$  で、後者は右上がりのトレンドが支配的な場合に典型的な  $d=1$  で飽和するパターンを取る。

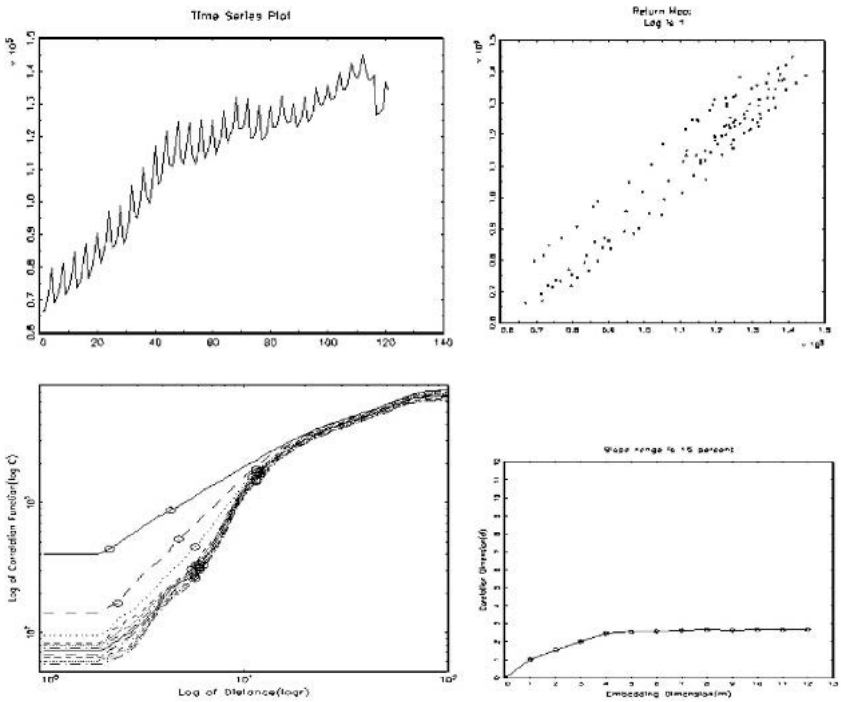
久松 (2012) の暦年データでの分析結果では、データ数が  $n=28$  と極端に少ないので、データ数を増やす意味で、ここでは 100 を超えるデータ数になる四半期時系列を持ってきて GP 分析したが、これらの結果からただちに実質 GDP 四半期系列のデータ生成過程が確定的であるか確率的であるか一意に判定することはできない。その理由は、久松 (2012) で展開した joint broken trend, disjoint broken trend をもつ DGP を想定したシミュレーション分析を参照されたい。

(3). 実質 GDP (四半期: 原系列): 昭和 55 年 I - 平成 22 年 I ( $n=121$ )

ここでは、観測期間を変えて、昭和 55 年 I - 平成 22 年 I ( $n=121$ ) について、GP アルゴリズムを適用した結果を示す。観測期間の約 3 分の 1 が昭和で、約 3 分の 2 が平成であり、バブル崩壊やリーマン・ショックを含んでおり、高度成長期に見られた単純な右肩上がりのトレンドを持つ動きとは、変動パターンが違うことに注意する必要がある。

データは、内閣府 SNA サイト「平成 12 年基準 (93SNA) ・ 1980 年から掲載 , 連鎖方式」よりダウンロードした実質 GDP (四半期: 原系列) である。なお、データをダウンロードした 2012 年 6 月時点で、この系列は原系列のみが利用可能で、季節調整済み系列は公開されていなかった。実質 GDP 原系列の GP 分析の結果を図 4.3・a に示す。

図 4.3・a 実質 GDP（四半期：原系列）のリターン・マップと相関次元



なお、次の図は、25%~50%区間で  $d$  を推定する方法での結果である。

図 4.3・b 実質 GDP（四半期：原系列）の  $\log C \cdot \log r$  図と相関次元

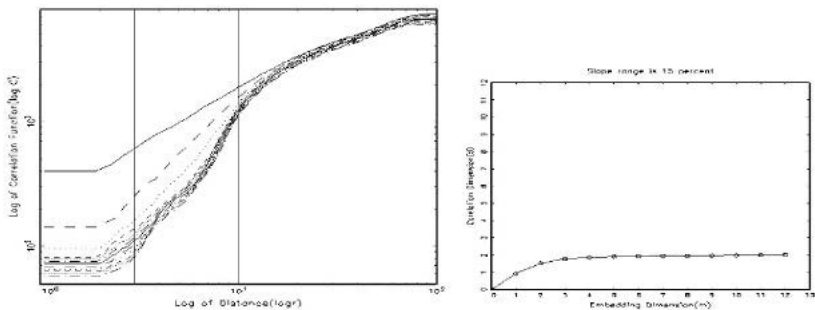
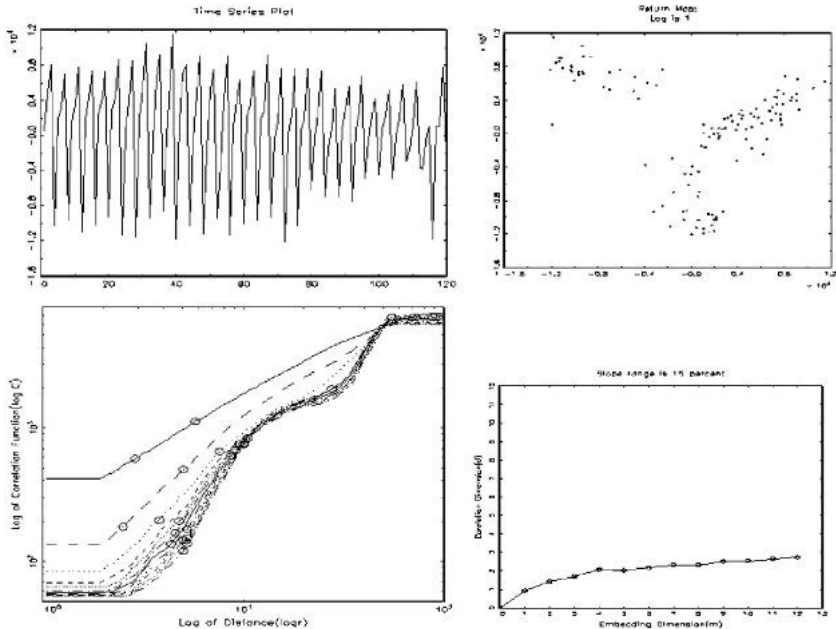


図 4.3・a を見ると、昭和 50 年代後半から平成 22 年までの期間では、高度成長期のような右上がりのトレンドに支配されていない。リーマン・ショックで急下降したあと、回復する途中の局面までが観測期間に含まれている。

図 4.3・a 左上のグラフを見ると、系列の動きは非定常な動き方に見える。久松 (2012) のシミュレーション分析で、屈折トレンドを想定した GDP で誤差分散を比較的大きくした場合の、全体的に激しく上下変動するパターンに近い。これがいわゆる、非定常な動きをする系列がカオスに見えている場合なのかどうか、階差を取って GP アルゴリズムにかけ、ランダムかどうかでそのことを判断したい。

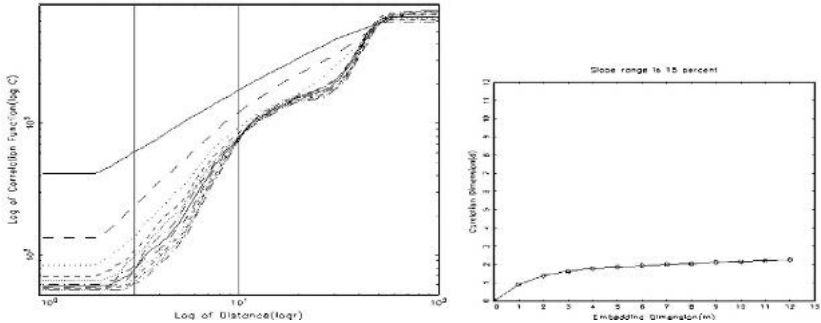
(4) 実質 GDP (四半期: 原系列) の階差: 昭和 55 年 I - 平成 22 年 I  
次の図 4.4・a は、実質 GDP 四半期原系列の階差の GP 分析結果である。

図 4.4・a 実質 GDP (四半期: 原系列) 階差のリターン・マップと相関次元



logC・logr 図の 25%～50%区間で  $d$  を推定すると以下ようになる。

図 4.4・b 実質 GDP（四半期：原系列）の logC・logr 図と相関次元



バブル崩壊を含みリーマン・ショックで急降下したあと回復するところまでが観測期間で、単純な右肩上がりのトレンドにははたがっていない。図 4.3・a 左上図で原系列の動きを見ると、むしろ、ランダム・ウォークのような非定常な動きに見える。その階差系列を GP アルゴリズムにかけると、図 4.4・a に見るように、リターン・マップに図形は現れず相関次元のグラフも緩い右上がりになり、この結果からランダムだと判定することになる。しかし、この場合も久松（2012）の joint broken trend, disjoint broken trend を想定してのシミュレーション分析結果を考慮すると、一意にそのように断定するのは早計である。

## 5. 為替レート（日次データ）と株価（日次データ）のカオス性について

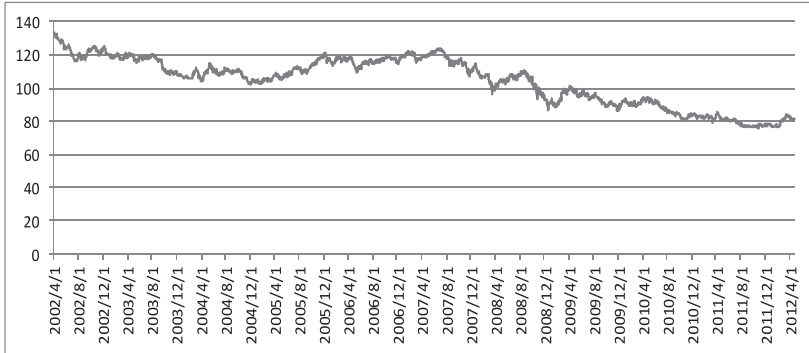
前節では、観測値数  $n$  を大きくするために、日本の実質 GDP のデータを暦年から四半期にかけて GP アルゴリズムを適用した。それでも約 4 倍に増えただけである。以下では、数千個単位でデータが取れる為替レート（円・米ドル）と株価（日経 225）の日次データに対して GP 分析を行う。

### (1) 為替レート（円・米ドルレート）の日次データのカオス性

ここでは、為替レート（円・米ドルレート）の日次データ（2002 年 4

月 1 日～2012 年 4 月 27 日, n=2476) に GP アルゴリズムを適用する.

図 5.1 為替レート (円・米ドル) の動き : 2002.4.1-2012.4.27



出所 : みずほ銀行ホームページ「みずほ銀行 : ヒストリカルデータ」

図 5.2.a 為替レート (円・米ドル) のリターン・マップと相関次元

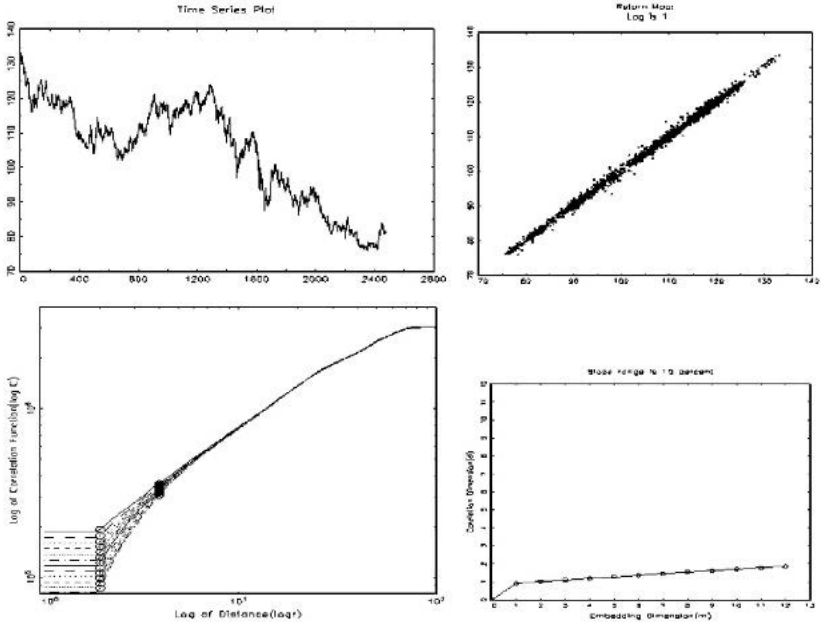


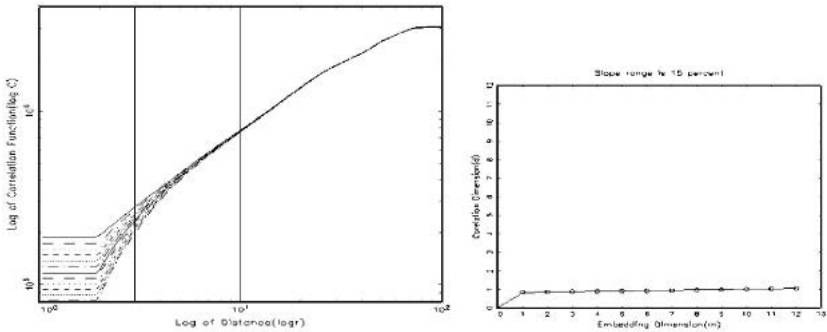
図 5.2-b 為替レート (円・米ドル)  $\log C \cdot \log r$  図と相関次元

図 5.1 と、図 5.2-a 左上のグラフは同じものであるが、前者は右下がりのトレンド周りに定常な上下変動が取り巻いているように見え、後者は 130 円–180 円の区間で激しく上下変動しているように見える。縦横軸の目盛の切り方で印象が違う。ここでは、2012 年 4 月までの 10 年間の為替レートの日次データに GP アルゴリズムを適用したが、系列はランダム・ウォークのような非定常な動きをしていて、リターン・マップは右上がりの帯状を呈する。また、相関次元のグラフは、若干右肩上がりではあるが低い次元にある。次の図 5.3 は、為替レートの階差系列のグラフである。

図 5.3 為替レート (円・米ドル) の階差 : 2002.4.2–2012.4.27

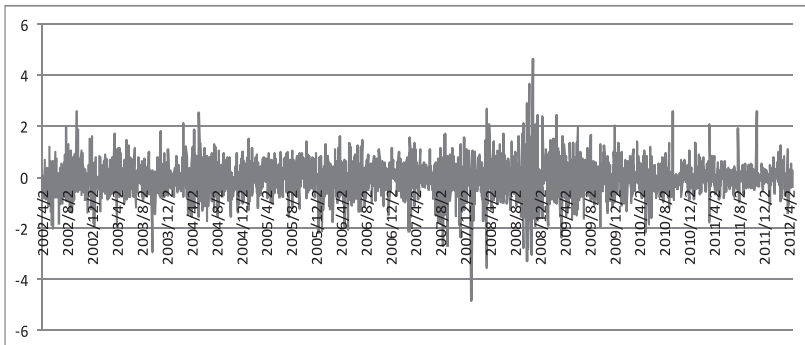
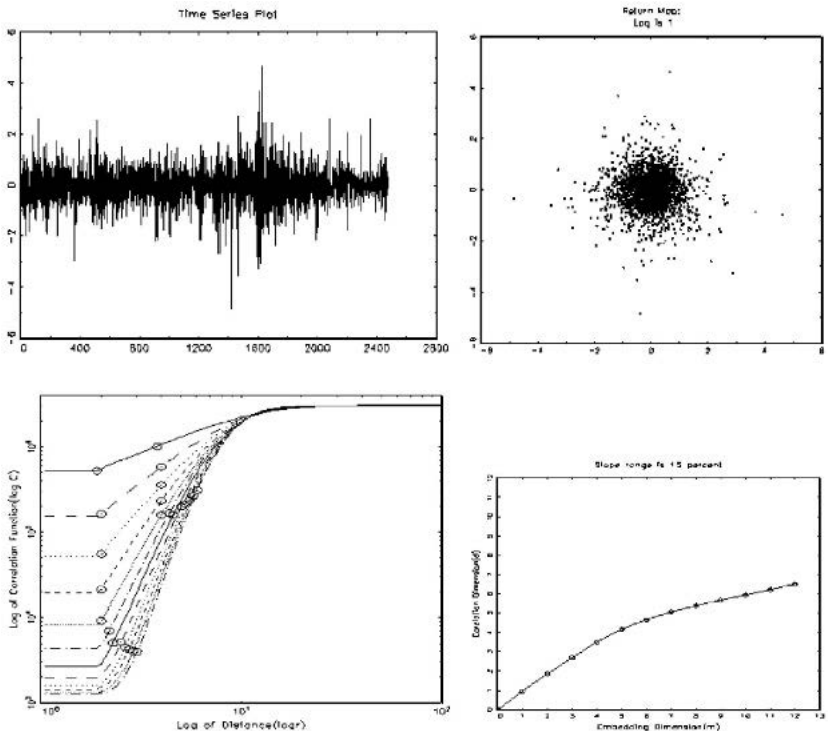


図 5.3 より、2008 年から 2009 年にかけてのリーマン・ショックの時期に、原系列の動きに変化が見られるが、この時期、階差系列は激しく上下変動していることがわかる。

図 5.4・a に、為替レート（円・米ドル）階差のリターン・マップと相関次元のグラフを示す。

図 5.4・a 為替レート（円・米ドル）階差のリターン・マップと相関次元

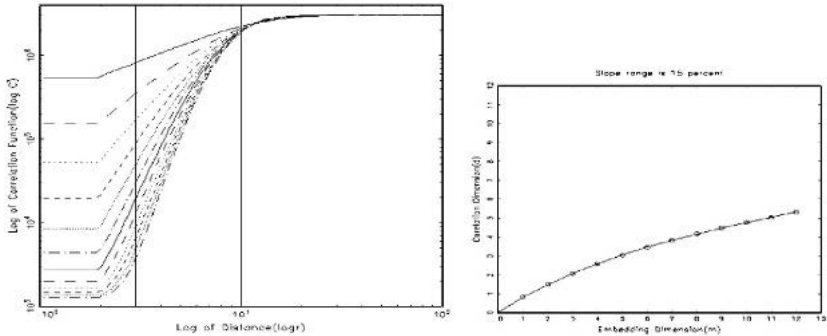


為替レートの階差のリターン・マップは、点が散在している。楕円ではなく円に近い集まり方をしている、今期と前の期はほぼ系列無相関である。また、相関次元の推定値のグラフも一定値で飽和せず右肩上がりになっていて、GP 分析では為替レートの階差系列はランダムであると判定される。



したがって、為替レートの日次データは、ランダム・ウォークのような非定常な動きがカオスに見えているパターンということになる。25%～50%区間で計測した図 5.4・b でも、グラフが右上がりの傾向は同じである。

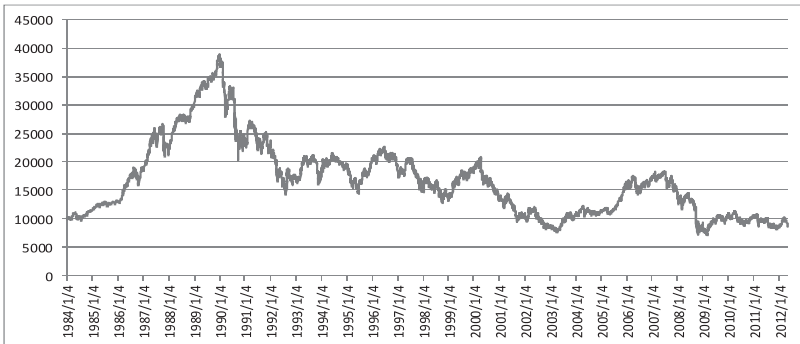
図 5.4・b 為替レート (円・米ドル) の階差の  $\log C \cdot \log r$  図と相関次元



(2) 株価 (日経 225) の日次データのカオス性

図 5.5 は、Yahoo Finance のサイトから NIKKEI 225 の Historical Prices (Daily) をダウンロードし、そのうち close (終値) を取り出して横軸に時間を取ってその動きをグラフに描いたものである。

図 5.5 日経 225 (日次データ) の動き : 1984.1.4~2012.5.18, n=6975



出所 : Yahoo Finance\_NIKKEI 225 Historical Prices (Daily)

このグラフから、80年代後半のバブル全盛期、90年以降のバブル崩壊期、その後のいわゆる「失われた10年」、および2009年のリーマン・ショックの落ち込みあたりまでの株価の動きがわかる。このデータをGPアルゴリズムにかけた結果が次の図5.6である。

図 5.6 日経 225 (日次データ) のリターン・マップと相関次元

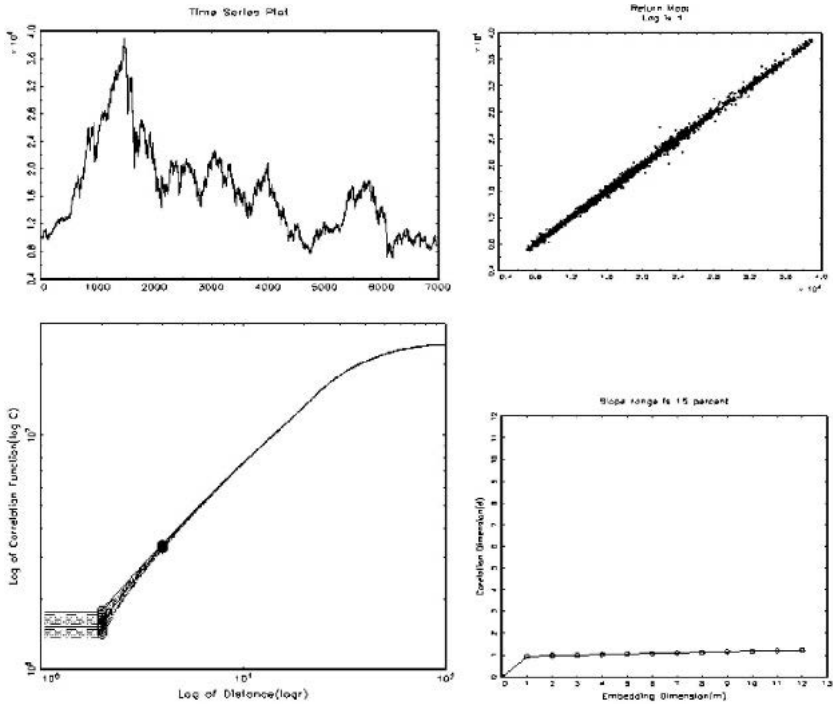


図 5.6 の右下の相関次元の推定値のグラフは、低い次元で飽和している。これだけ見るとカオスであると判定してしまうが、為替レートの日次データと同様に、ランダム・ウォークのような非定常な動きがカオスに見えているケースだと思われる。

そこで、日経 225 (日次データ) の階差を取って、GP にかけた結果を以下に示す。図 5.7 は、階差の変動を示したグラフである。

図 5.7 日経 225 (日次データ) の階差 : 1984.1.5-2012.5.18, n=6974

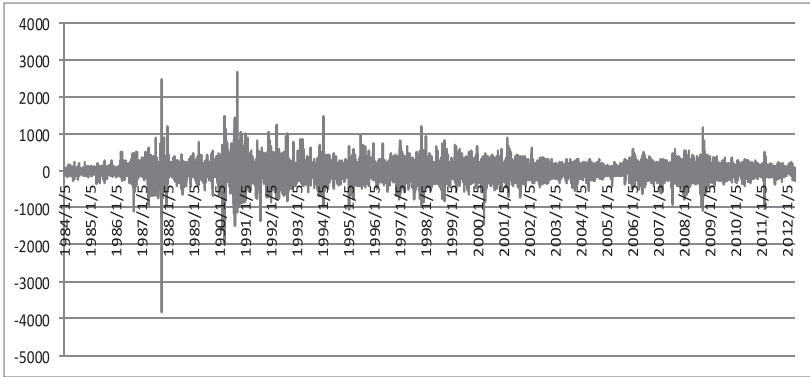


図 5.8 日経 225 (日次データ) の階差のリターン・マップと相関次元

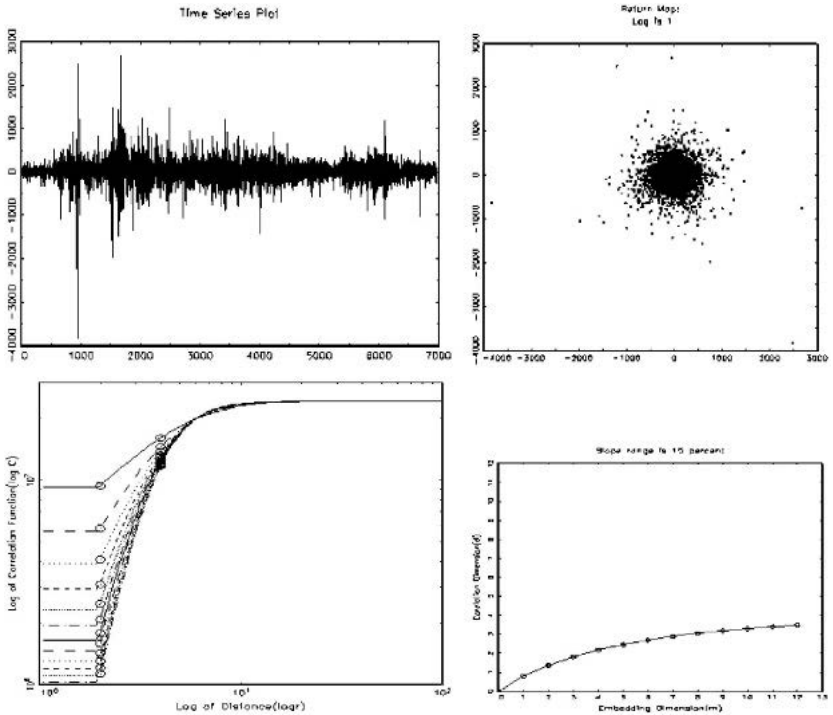


図 5.8 で日経 225 (日次データ) の階差の動きを見ると, いくつかの時点で上下に極端にぶれている. リターン・マップは点が散在し, 楕円状というより円状に点が分布し, 今期と前の期に相関関係がないことがわかる. 相関次元の推定値は一定値に飽和せず, 右上がりのグラフになっているので, 日経 225 の階差系列はランダムと判定される. したがって, 日経 225 (日次データ) は, 非定常な動きがカオスに見えているケースで, 階差を取るとランダムであることがわかる. ところで, 株価の対数 1 階差は

$$\log y_t - \log y_{t-1} = \log \frac{y_t}{y_{t-1}} = \log \left[ 1 + \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \right] \cong \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \quad (10)$$

で与えられ, 変化率であり, これを 100 倍したものはパーセント収益率の意味合いを持つ. 図 5.9 は, 日経 225 平均株価のパーセント収益率をこの式で求めてグラフにしたものである. 単位は%. 図 5.10 に日経 225 パーセント株価収益率の GP アルゴリズム分析の結果を示す.

図 5.9 日経 225 パーセント株価収益率 : 1984.1.5~2012.5.18, n=6974

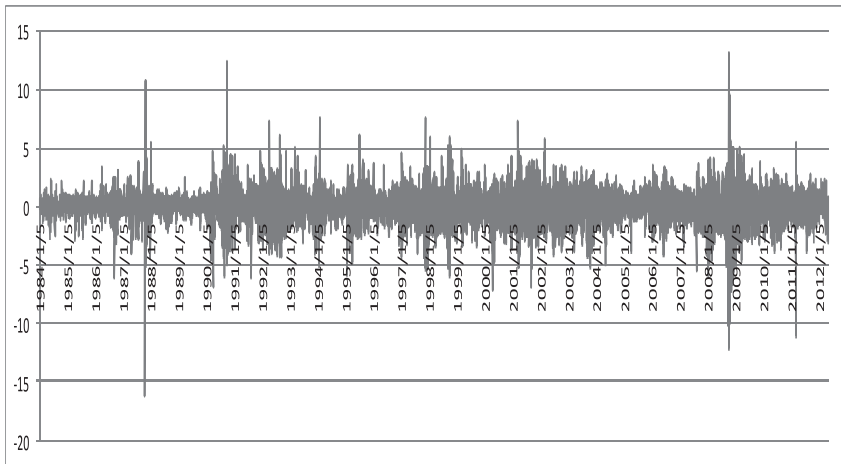


図 5.10 日経 225 パーセント株価収益率のリターン・マップと相関次元

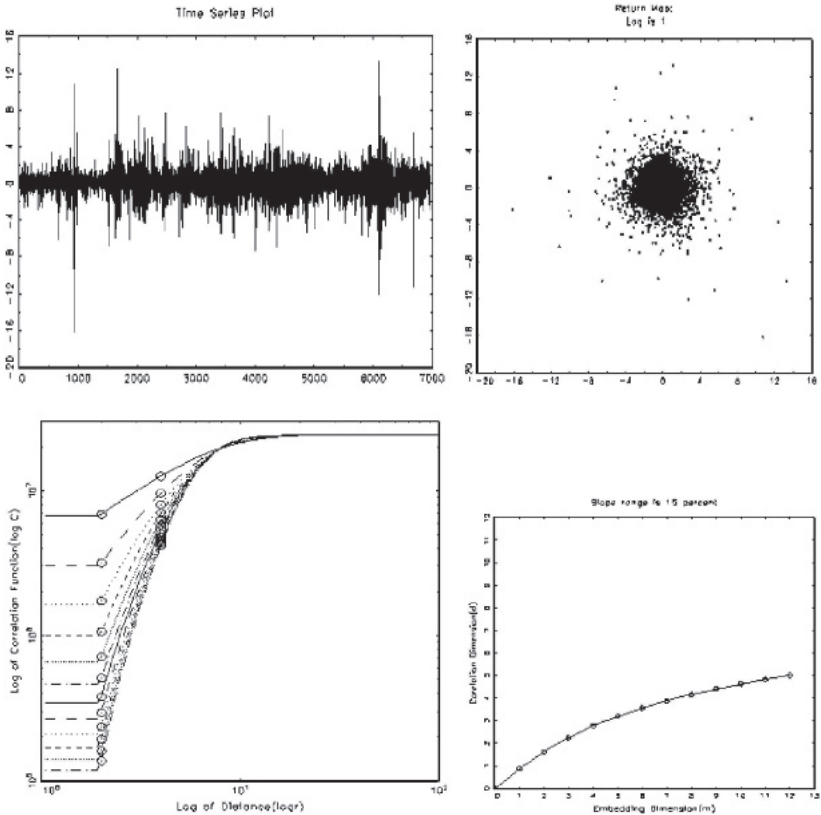


図 5.10 より、リターン・マップには図形が現れず点が散在していて、相関次元の推定値のグラフも右上がりの曲線になり、一定値で飽和しないことがわかる。したがって、日経 225 パーセント株価収益率はランダムであると判定される。25%~50%区間で  $d$  を推定してもほぼ同じ値になる。

## 6. おわりに

標本自己相関関数では、ロジスティック・マップ (カオス) とホワイト・ノイズ (ランダム) は区別できないこと、その理論的な裏付けとしてホワ

イト・ノイズの性質を持ったある確率変数がロジスティック・マップの式を満たすことがわかっている。本稿ではこの現象をシミュレーションで確かめ、確率変数が漸化式を満たすとはどういう意味かを考えた。

また、カオスを測る方法としてよく使われてきた GP アルゴリズムを使って、ロジスティック・マップ（カオス）とホワイト・ノイズ（ランダム）の区別がつか調べてみた。

その結果、リターン・マップを描くと、前者は 2 次曲線が現れ後者は点が散在し、両者を区別できることがわかった。また、相関次元のグラフを見ると、前者は 1 をわずかに上回ったあたりの一定値で飽和し、後者は右肩上がりの曲線になるので、両者を区別することができた。

実質 GDP や株価、為替レートなどの日本経済のデータに GP アルゴリズムを適用した結果を示した。実質 GDP は、暦年系列ではなく観測値数  $n$  が 100 を超える四半期系列の原系列と季節調整済み系列について、それぞれ GP アルゴリズムを適用しカオス性の有無がどう判定されるか示した。

高度成長期を含む昭和 30 年第 II 四半期—平成 11 年第 I 四半期 ( $n=121$ ) では、右肩上がりの屈折トレンドにしたがっていて、GP アルゴリズムの出力結果を見ると原系列も季節調整済み系列も低い相関次元で飽和していて、カオス性があると判定される。また、バブル崩壊やリーマン・ショックなどの激変期を含む昭和 55 年第 I 四半期—平成 22 年第 I 四半期 ( $n=121$ ) では、非定常な変動がカオスに見えているケースで、階差を取るとランダムだと判定されるが、久松 (2012) のシミュレーション分析で指摘した通り、観測期間内で複数の構造変化があり屈折トレンドにしたがっている場合や、屈折トレンドを想定しても誤差項の分散が大きく非定常な変動を示す場合には、GP アルゴリズムの結果からカオスかランダムかを一意に判定することは困難である。

観測値数が数千単位でデータが得られる、為替レート（円・米ドル）の日次データ ( $n=2476$ ) と株価（日経 225 終値）の日次データ ( $n=6975$ ) について GP アルゴリズムを適用した結果を示した。いずれも相関次元は一定値で飽和しカオス性があると判定されるが、これらの階差を取ると、リターン・マップは点が散在し相関次元のグラフも右肩上がりであること

から、ランダム・ウォークのような非定常な変動がカオスに見えているパターンであり、もとの系列はランダムであると判定される。

ロジスティック・マップ以外の非線形漸化式でデータが生成される場合、結果がどのように変わるかについては、今後の検討課題としたい。

#### 謝辞

確率変数が非線形漸化式を満たすとはどういう意味か、その解釈について、藤本喬雄福岡大学経済学部教授（当時）から示唆をいただいた。藤本教授に感謝したい。なお、本稿において誤りがあれば、それは一切私自身の責任である。

本号は 2012 年 1 月 11 日に逝去された故細川滋教授の追悼号である。2011 年 9 月末の任期まで副学長理事を務められ、アドミッション・センター会議でも 1 年半ご一緒した。同氏のご冥福をお祈りする。

#### 参考文献

- [1] Grassberger, P. and I. Procaccia, Measuring the Strangeness of Strange Attractors, 9, pp.189-208, *Physica D*, 1983.
- [2] 田中辰雄, 「第 5 章: カオス理論の計量分析への応用」, 『応用計量経済学 I』, 高木康順・秋山裕・田中辰雄著, 多賀出版, pp.281-362, 1997.
- [3] 久松博之, 「漸化式とランダム・ウォーク」, 『香川大学経済論叢』, 83 巻, 第 4 号, 2011 年 3 月, pp.93-127.
- [4] 久松博之, 「構造変化とカオス」, 『香川大学経済論叢』, 85 巻, 第 1・2 合併号, 2012 年 9 月, pp.25-45.
- [5] 宮野尚哉, カオスと時系列, 臨時別冊・数理科学『時系列解析入門』, 第 3 章, サイエンス社, 2002.
- [6] 矢島美寛, 長期記憶をもつ時系列モデル, 『経済時系列の統計』, 岩波書店, pp.104-202, 2003.
- [7] みずほ銀行ホームページ「みずほ銀行: ヒストリカルデータ」  
<http://www.mizuhobank.co.jp/corporate/bizinfo/information/market/historical.html>