

QUAIDS による消費分析と その支出変化の与える影響について

横山佳充

1 はじめに

本稿では家計の需要分析を行う上で、多品目需要体系のモデルを用い、経済における価格等の経済変化が与える影響に関して分析を行い、これまで我が国においては十分に検証されてこなかったエンゲル関数の非線形性に関して検証を行う。

多品目需要体系のモデルは経済理論に準拠したモデルで、経済理論に整合的なかたちで提供されるという意味で、非常に洗練されたモデルである。多品目需要体系のモデルにおいては各品目は互いに関連し合っており、同時体系のモデルが形成される。しかしながら、このモデルは理論的な美しさと同時に推定するパラメータの多さや推定方法の煩雑さ、実際の推定結果自体が膨大な量になり、モデルとしての実行可能性という点でも複雑である問題点を含む¹。

我が国において多品目需要体系の分析を用いている方向性はおもに2種類ある。ひとつは主に農産物などの個別の品目に関する分析に代表されるように、個別の品目についての需要の分析を行う方向性である。その際には効用関数に関する弱分離性の仮定に基づいて行われ、大費目の支出総額の制約の下、分析対象のより細かな品目の支出について考察するという手法を取る。一方で、個々の品目を対象とするのではなく、家計全体の支出分析において個々の品目を統

¹実際に分析するうえでは、その財や費目を単独で推定するだけではなく、他の財や費目との関係を規定する複数のパラメータを同時に推定する場合がある。

合した大費目を用いることもある。この場合、多品目需要体系のモデルを用いて分析を行うと、各費目自体が複数の財の混合物であることから、消費者理論で示されるような財と財の明確な関係を示すものと異なっている可能性がある。

本来の財の関係を把握するためには多数の財を分析に取り入れシステムを構成する必要があるが、前述した制約のため、仮定を挿入し一部の財についてのみ分析を行うか、または全体を分析するために複合物としての財を用いるという形で対応せざるを得ないというのが現実的である。

従来の分析の方向性から示されるように、対象となる費目を多くしモデルを拡大することは、モデルの推定を困難にし、一方で、限定した分析を行う上でのモデル推定には弱分離性の条件を入れるなどの仮定を導入せざるを得ない。こうした意味では時系列のデータなど制約された条件のもとでは、通常の多品目需要体系のモデルを作成することも多くの困難が生じ、結果として、前述した費目を限定したモデルや、家計の行動モデルであれば10大費目程度しか分析の対象とはなっていない。経済理論に整合的なモデルの場合、エンゲル関数の形状が単純な一次関数の場合でも取り扱いが困難であり、これに加えてエンゲル関数の形状の議論まで含めれば煩雑である印象は否めない。

これらの事情もあり、我が国では多品目モデルによる分析を行う場合、通常汎用的に用いられているモデルでも煩雑さがつきまとい、ましてやより複雑なQUAIDS等のエンゲル関数の形状を複雑に考察する議論は行われてこなかった可能性がある²。しかしながら、データに基づいてエンゲル関数の形状をより詳細に考察することは、単純にその経済主体が所属する所得階層や、言い換えれば可処分所得や支出の多寡により、その財の性質を変える可能性があることを分析することができる。本稿ではそうした問題意識に基づき、これまで我が国では十分に考察されてこなかったQUAIDSを用いて、エンゲル係数の形状や、財や費目の性質について検証する。

本稿の構成は次の通りである。まず、第2節において需要体系モデルQUAIDSについて考察を行い、分析のツールとしての基礎を確認する。第3節において

²現時点で確認できているQUAIDSを用いた政策分析などは北村(2013)と松田(2013)である。北村は家計全体のモデルを、松田は畜産物などの特定の食料需要のモデルを考察している。

データの特性について記述し、第4節において推定結果を示す。第5節においては推定結果に基づき支出変化に応じエンゲル関数等がどのように変化するかを確認し、最後に第6節においてまとめを示す。なお、煩雑な計算部分に関しては付録にて示している。

2 需要体系モデル

本節では需要体系のモデルに関する基礎を確認することで、本稿にて用いる QUAIDS に関して後の分析のための基礎を確認したい。需要モデルでの分析は古典的なところでは両対数モデルなどがあり、パラメータ自体が弾力性の概念と合致しており、計算の上でも取り扱い易いモデルではある。しかしながらこのモデルは総和条件を満たさないなど経済学からの理論的整合性に欠けるという面があった。その後のモデルの発展として、総和性などを満たす線形支出体系モデルなどが Stone(1954) などにより登場した。しかしながら、こうしたモデルは総和条件以外の経済理論との整合性を満たさない点があり、引き続き、同次性や対称性を満たすモデルとして理論と整合的なモデルの開発が模索された。その結果として、これらの性質を満たす同時体系の体系のモデルとして Barten(1964) や Theil(1965) による Rotterdam モデルや、Christensen et al.(1975) のトランスログモデル、Deaton and Muellbauer(1980) による AIDS のモデルが提示されている。

その後は、経済理論的な条件を満たした多くのモデルが登場している³。実際に経済分析に利用する際には操作性の問題もあり、操作性に優れた AIDS が主に使用されることが多い。その際にはエンゲル関数が対数支出の一次関数であることを暗黙の仮定しておいており、対数支出の変化によって財と支出の関係は変化しない。本稿ではこうした捉え方がデータに照らして論理的に整合的と

³その後のモデルの発展の展開は Barnett and Serletis (2008) に示されている。最近ではモデルを構成するための費用関数や間接効用関数は複雑化する傾向がある。最近の関数型の発展は主に3種類のケースがあり、通常のパラメトリックなもの、ノンパラメトリックな方法を用いるものとフーリエ級数を用いる方法がある。

言えるかどうか検証したい。

2.1 QUAIDS

本稿における分析に用いるモデルはQUAIDSを用いる。QUAIDSはBanks et al.(1997)によって提示されたモデルで、通常支出全体に占める第 i 財の支出ウェイト w_i が対数支出額 $\log x$ の一次関数であるEngel関数を $\log x$ の二次関数に拡張することで、階数が2の需要体系を階数3に拡張したモデルである⁴。

QUAIDSは経済理論との整合性を考慮し、AIDSモデル以降拡張されたモデルである。最近の研究においてはAIDSが操作性の観点からも最も良く使用されるモデルである⁵。AIDSはQUAIDSと比較すると入れ子型モデルになっており、推定するパラメータ数も若干少ないモデルではあるが、このAIDSモデルであっても対象となる財あるいは費目の数が増えると推定するパラメータが増加し推定が困難になる。QUAIDSであってもAIDSであっても、パラメータ推定の関係上、必要データ数の数を確保するまたは全体的にモデルをコンパクトに設計することが必要である。しかしながら、AIDSに比較してQUAIDSの推定パラメータ数が多くなり、操作性や結果の解釈が複雑なこともあって、汎用的に用いられているとは言えない⁶。

以下、分析を行うためQUAIDSを示すが、モデルを導出する前に記号について確認しておく。登場する財（費目）の総数は N であって、第 i 財の価格及び数量をそれぞれ、 p_i, q_i とする。これによって、支出総額が $x = \sum_{i=1}^N p_i q_i$ と表記

⁴階数の議論に関してはGorman(1981)参照。

⁵AIDSをより詳細に分類した場合、価格指数を置き換えることで需要方程式を線形化したLAIDSが実質上、AIDSとして用いられている。我が国でもAIDSモデルがよく用いられる需要体系の一つである。これに関しては文献は参照しないが操作性が良い事もあり、需要分析等には頻出する。

⁶最近のQUAIDSの応用例としては、Banks et al.(1997)、Blundell and Robin (1999)、Fousekis and Revell (2003)は英国における分析、Fisher et al.(2001)は米国において、Moro and Sckokai (2000)はイタリア、Abdulai(2002)はスイス、Meenakshi and Ray (1999)やMittal(2010)はインド経済、Gould and Villarreal (2006)は中国の都市部についてMolina and Gil (2005)はペルーに関して、Abdulai and Auber (2004)はタンザニア経済などにおいて分析が行われている。政策分析を行う場合には2段階予算配分が仮定されている。

される．また，財の価格のベクトル表記を $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)'$ ，第 i 財のウエイト表記は $w_i = \frac{p_i q_i}{x}$ とできる．

モデルを構成するためには，初めに間接効用関数 $\log V(x, \mathbf{p})$ を

$$\log V(x, \mathbf{p}) = \left(\frac{\beta(\mathbf{p})}{\log x - \log \alpha(\mathbf{p})} + \zeta(\mathbf{p}) \right)^{-1} \quad (1)$$

と設定し，Roy の恒等式を適用することで，目的となる推定用のモデルを得ることができる．ただし， $\alpha(\mathbf{p}), \beta(\mathbf{p}), \zeta(\mathbf{p})$ はそれぞれ，下記のギリシャ文字で示されたパラメータ $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij}^*, \zeta_i$ を含む \mathbf{p} の関数であり，

$$\log \alpha(\mathbf{p}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \log p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}^* \log p_i \log p_j \quad (2)$$

$$\log \beta(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^N p_i^{\beta_i} \quad (3)$$

および

$$\zeta(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \zeta_i \log p_i \quad (4)$$

を表す．

以上より，計算によって得ることができる，需要ウエイトを被説明変数とし価格と支出を説明変数とする経済理論と整合的なモデル体系は

$$w_i = \alpha_i + \beta_i \log \frac{x}{\alpha(\mathbf{p})} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \log p_j + \frac{\zeta_i}{\beta(\mathbf{p})} \left(\log \frac{x}{\alpha(\mathbf{p})} \right)^2 \quad (5)$$

によって表される式であり，パラメータによって置き換えると，

$$w_i = \alpha_i + \beta_i \log \frac{x}{P} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \log p_j + \frac{\zeta_i}{\prod_{j=1}^N p_j^{\beta_j}} \left(\log \frac{x}{P} \right)^2 \quad (6)$$

となる．ただし，

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\gamma_{ij}^* + \gamma_{ji}^*) \quad (7)$$

と置いている．同様に，総合物価指数を用いて $\log P = \log \alpha(\mathbf{p})$ と置き換えている．ここで，QUAIDS の基本モデルである式 (5) において，すべての i について ζ_i であるとする，QUAIDS のモデル体系は AIDS モデル体系に縮減される．

QUAIDS においては AIDS と異なり, Engel 関数との関係でいえば, 対数支出の一次関数ではなく, 二次関数である. これにより QUAIDS は対数支出の増加に伴い, 必需財から奢侈財へ変化することもあれば, 逆の場合も可能な形になっている. また, 同様に対数支出の増加に伴って上級財と下級財の変化も容認できることになる.

こうしたモデル体系の利点は経済理論に整合的な条件を含むことができる点であり, 以下に総和条件, 同次性条件および対称性条件を記述する.

需要体系モデル においては予算制約を含んでいるが, この条件を総和条件とし, $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ を満たさねばならず, その結果として総和条件は,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \zeta_i = 0 \quad (8)$$

となる.

次に, 同次性の条件については

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} = 0 \quad (9)$$

と表される.

最後に, 対称性の条件は,

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad (10)$$

であり, AIDS の条件と比較して QUAIDS ではパラメータ ζ_i に関する制約部分が総和条件に付加された部分の制約が追加されている.

需要分析においては弾力性が重要な概念である. 支出弾力性に関しては,

$$e_i = 1 + \frac{\beta_i}{w_i} + \frac{2\zeta_i}{\prod_{j=1}^N p_j^{\beta_j}} \left(\log \frac{x}{P} \right) \quad (11)$$

であり, 価格弾力性に関しては

$$e_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{w_i} - \frac{\beta_i w_j}{w_i} \cdot \left(\alpha_j + \sum_{k=1}^N \gamma_{jk} \log p_k \right) - \frac{\zeta_i}{w_i \prod_{k=1}^N p_k^{\beta_k}} \cdot \left[2 \left(\alpha_j + \sum_{k=1}^N \gamma_{jk} \log p_k \right) \log \frac{x}{P} + \beta_j \left(\log \frac{x}{P} \right)^2 \right] \quad (12)$$

となる. なお, δ_{ij} は Kronecker delta を示している.

2.2 QUAIDSの変形

本稿におけるような長期の期間を含むデータに対する適用においては、時間の変化による要因を無視できない。したがって、トレンド項を挿入し、求めるモデル体系は

$$w_i = \alpha_{Ci} + \alpha_{Ti}t + \beta_i \log \frac{x}{P} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \log p_j + \frac{\zeta_i}{\prod_{j=1}^N p_j^{\beta_j}} \left(\log \frac{x}{P} \right)^2 \quad (13)$$

という形に修正される。ただし、ここで、 t はトレンドを示す変数である。これにより、各制約条件が変化する。総和条件に関して、

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{Ci} = 1, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_{Ti} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \gamma_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^N \zeta_i = 0 \quad (14)$$

と変更される。時間トレンドの項を入れることで、QUAIDSに関する同次条件、対称条件に変更はないが、弾力性に関しても影響を与える。支出弾力性には変更はないものの、価格弾力性は

$$e_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{w_i} - \frac{\beta_i w_j}{w_i} \left(\alpha_{Cj} + \alpha_{Tj}t + \sum_{k=1}^N \gamma_{jk} \log p_k \right) - \frac{\zeta_i}{w_i \prod_{k=1}^N p_k^{\beta_k}} \cdot \left[2 \left(\alpha_{Cj} + \alpha_{Tj}t + \sum_k \gamma_{jk} \log p_k \right) \log \frac{x}{P} + \beta_j \left(\log \frac{x}{P} \right)^2 \right] \quad (15)$$

となる。

3 データ

データに関しては主に支出のデータと価格に相当する物価のデータが必要とされる。支出のデータとして『家計調査』から得られた勤労者世帯の年次データを用いている。使用した費目に関しては大費目の分類である分類数である $N = 10$ を用いた。個々の費目の識別を行う費目番号 i は表1の通りである。分析にあたっては費目分類が大分類であるので単独の財やサービスと価格との対応関係が明瞭というわけではなく、価格と財の需要の関係がそのカテゴリーの中に属する財の複合物の財に関しての需要と価格の関係を捉えることになっており、抽

表 1: 費目分類

費目番号 i	1	2	3	4	5
費目名	食料	住居	光熱・水道	家具・家事用品	被服及び履物
費目番号 i	6	7	8	9	10
費目名	保健医療	交通・通信	教育	教養娯楽	諸雑費

象的になることは否めない。より具体的に財と財の関係を分析するためには、農作物の分析に代表されるように、より詳細な品目に限定し、財個別に価格と需要の変化を明確にしたほうがその関係が理解しやすい。ただ、その際の分析は多くの場合弱分離性を仮定し、財の一部の状態のみを分析したモデルとなるのは前述のとおりである。

また価格のデータに関しては、『消費者物価指数』のデータを用いた。基準年は2005年であり、データの期間は『家計調査』にあわせて1963年から2011年までの期間である。推定に関しては年次データを用いている。推定において必要なデータは本来各費目の価格データと各費目のウェイトを示すデータであり、必ずしも需要量のデータは必要ない⁷。

使用したデータの時系列的変化と基本的な統計量について確認しておく。対象期間内の w_i に相当する支出割合の変化、価格 p_i の変化を示したものがそれぞれ図1と図2に示されている。同様に支出総額の変化を図3に総合物価指数の変化を図4に示している。それらの基本統計量を示したものを、表2に示している。このデータに関して若干の論評を加えると、データ自体が50年程度の長い期間であり、この期間において少なからずの生活様式の変化がみられる。当然それに関連して価値観の違いや時代の必要性に応じて、若干の趣向の変化があると考えられるが、それに関してはモデルの方でトレンド項を挿入すること

⁷大費目のデータのため、価格データとしては基準時点によって示された物価指数を代用するが、その場合需要量に相当するデータは直接得られないので、各費目における支出額を用い、価格データとの関係を用いることで需要量を示すデータを作成する。具体的には $w_i = \frac{p_i q_i}{x}$ から導出可能である。

で趣向の変化などの非経済学的要因に対応している。

期間内の価格のデータ変化は、1990年以降は比較的小康状態にあり大きな変化はないものの、期間が高度成長期などを含むこともあり総合物価指数から判断しても1963年から1990年程度にかけて著しい上昇傾向を示しており、結果的に総合物価指数は5倍程度上昇している。支出に関しては期間内に名目で7倍程度に拡大し、実質的には1995年基準で2倍を若干切る程度に拡大したことが示されている。ただし、これも物価の上昇と同じで、1990年以前は増加傾向をみせるが、その後停滞傾向が継続する。支出の増加割合の変化からは食料に関する支出割合が次第に減少している。最近ではその減少程度は緩やかになっているものの、エンゲル法則からも推測されるように、この傾向は対象期間の経済的厚生の上昇を意味していると考えられる。同様の傾向を示す費目としては被覆及び履物が指摘される。一方でこの期間において逆に割合を上昇させているものとしては交通・通信が指摘できる。また、各費目の価格に相当する物価については、どの物価も大部分総合物価指数と同様の動きをみせるが、 $i = 4$ の家具・家事用品に関しては、特に近年の物価の下落が著しく、その分他の費目と比較して対象期間内に総体的な価格が大きいことが指摘できる。なお、 $i = 8$ の教育に関しては期間中に他の費目と比較し相対的に低い値であるが、これに関しては先ほどの $i = 4$ の家具・家事用品とは逆の事情による。

図 1: 支出割合の変化

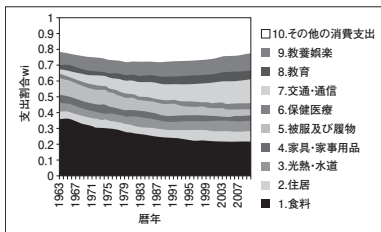


図 2: 価格の変化

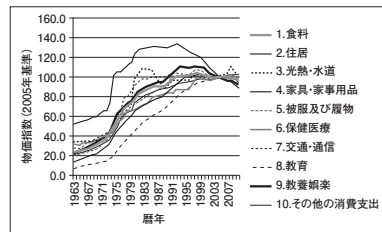


図 3: 支出総額の変化

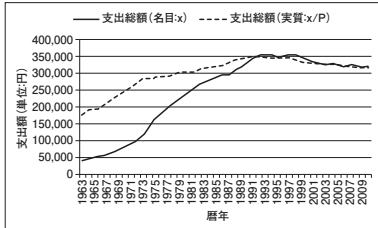


図 4: 総合物価指数の変化

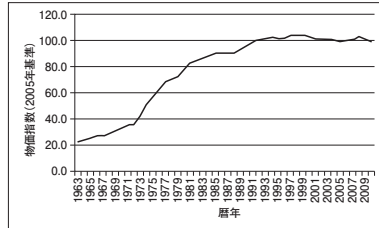


表 2: 基本統計量

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	t
平均	0.3058	0.0533	0.0568	0.0451	0.0780	0.0296	0.0849	0.0385	0.0936	0.2146	24.5
最大値	0.4054	0.0677	0.0748	0.0574	0.1108	0.0447	0.1296	0.0470	0.1100	0.2358	48.0
最小値	0.2504	0.0438	0.0419	0.0337	0.0463	0.0238	0.0325	0.0256	0.0726	0.1700	1.0
標準偏差	0.0494	0.0081	0.0096	0.0069	0.0192	0.0060	0.0283	0.0065	0.0106	0.0173	14.0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x
平均	774,354	151,389	163,468	115,460	191,952	84,569	262,866	111,232	265,899	602,445	245,835
最大値	1,081,188	267,875	265,175	172,296	302,328	159,397	473,278	188,438	419,742	937,899	357,635
最小値	195,784	21,137	24,364	27,332	53,532	11,477	15,751	16,252	35,239	82,106	41,105
標準偏差	292,800	81,699	87,448	45,251	72,874	47,437	160,023	61,052	136,036	291,543	109,984
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	P
平均	75.74	68.44	79.86	105.17	74.44	71.05	80.76	56.78	79.76	71.68	77.37
最大値	104.20	103.40	108.80	133.60	107.40	100.40	104.10	101.40	111.60	101.70	104.10
最小値	22.00	14.60	34.80	52.90	21.80	31.20	27.70	8.29	23.70	22.40	23.10
標準偏差	29.07	31.57	27.97	27.99	30.42	24.03	28.09	33.53	30.25	28.34	28.85

注 1) w_i, p_i, P は割合や指数を示し無名数である。

注 2) x, x_i は総支出額および第 i 費目の (名目) 支出額であり単位は円である。

注 3) t は使用した時間の変数である。

4 推定方法および推定結果

各式の関係としては、 $i = 1, 2, \dots, N$ の各式の誤差項が現時点間で相関しており、異時点間で相関していないと想定し、 $i = 1, 2, \dots, N$ の N 個の誤差項をベクトル表記したものを $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)'$ と仮定して、推定を行う。誤差項は次の分布に従うと仮定される。

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (16)$$

ただし、 Σ は $N \times N$ の行列であり、第 ij 要素 σ_{ij} が、第 i 式と第 j 式の同時点での共分散を示す。モデル体系は全体としては $i = 1, 2, \dots, N$ の式(13)に対応する誤差項 $u_i, i = 1, 2, \dots, N$ を加えた合計 N 本の体系である。

具体的な推定方式としてはSURを用いている。推定に関しては既知のことであるが、総和条件(14)を満たすため直接の推定が可能ではない。推定に関しては任意の方程式を除外して $N - 1$ 本の方程式を用いて推定を行い、残りの方程式の推定に関しては総和条件の式(14)と共に同次性の条件である式(9)や対称性の条件である式(10)の関係から導出することになる⁸。

モデルの制約に応じて計算を行い推定値を求めた。モデル1として制約を加えていない無制約モデル、さらに同次性の条件をいれ同次性モデルとしてモデル2を、さらにモデル3として、モデル2の制約に加えて対称性の条件を入れたモデルを指定した。モデル3の結果について示したものが表6である⁹。結果を見ると、通常の有意水準で有意な値や有意にならない値が混在した状態がみられるが、全体として5%の有意水準で有意な個数を示した集計表が、表3である。

最終的に計算された要約表である表3を見る限りでは、モデル1からモデル3まで ζ_i に関して10個のパラメータの中でモデル1とモデル2に関してはほとんどのパラメータが、またモデル3に関して過半数以上が5%の水準で有意を示し、基本的にエンゲル関数が対数支出の1次関数ではなく、2次関数になってい

⁸導出に関する詳細はBarten(1969)参照。

⁹制約の無いモデルと同次性を課したモデルであるそれぞれモデル1とモデル2の推定結果は、本稿では割愛した。詳細な計算結果は横山(2013)を参照されたい。

表 3: 結果の要約

	α_{Ci}	α_{Ti}	β_i	γ_{ij}	ζ_i
モデル 1 (無制約)	6	5	5	45	10
モデル 2 (同次性)	5	5	7	48	9
モデル 3 (同次性&対称性)	7	8	7	56(29)	6
推定パラメータ数	10	10	10	100(55)	10

注) モデル 3 (同次性&対称性) に関して, γ_{ij} における非主対角要素を 2 重に計算した結果を示している. 括弧内は 2 重に計算していない場合の推定個数を表す.

ると考えられる. なお, Wald テストにて複合帰無仮説 $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0, \dots, \zeta_{10} = 0$ を検定すると, 結果は表 4 のようになる. 表 3 の結果からでもほとんど明らかであるが, 表 $H_0 : \zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0, \dots, \zeta_{10} = 0$ を棄却する臨界値は有意水準 1% で 21.67, 有意水準 0.1% でも 27.88 であり, ζ_i が全体のモデル体系に影響を与えていることが強く推測される.

表 4: Wald テストの結果

	モデル 1	モデル 2	モデル 3
$\chi^2(9)$	655.5	526.4	383.8

需要分析においては通常弾力性の値が重要となるが, 本節の推定結果を用いて支出弾力性及び価格弾力性を計算した結果加えてその標準誤差と t 値を, モデル 3 に関し, それぞれ表 6 と表 7 に示している¹⁰.

¹⁰前注釈と同じく, 制約の無いモデルと同次性を課したモデルであるそれぞれモデル 1 とモデル 2 の弾力性計算結果については, 本稿では割愛した. 詳細な計算結果は同様に横山 (2013) を参照されたい.

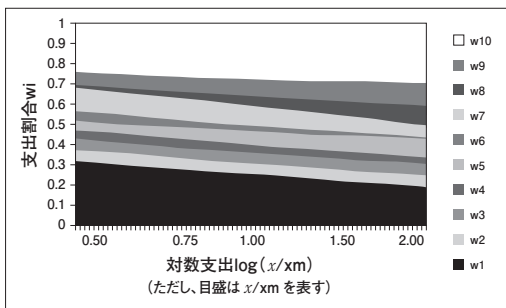
5 支出の変化による影響

本節では前節の対数支出のエンゲル関数に与える影響が2次関数の影響を与えるということが我が国のデータにおいて統計的に強く示唆されることから、数量的に与える影響の程度について考察を加えたい。具体的にはその方策としてシミュレーションを行いそのエンゲル関数の形状を考察することになるが、モデル1から3まで全てに対し行うことは煩雑であるので、経済学的理論と最も整合的とされるモデル3のみを用いて考察を加えることにしたい。

同次性と対称性の制約を課したモデル3に関して、支出の変化による影響をモデル上で計算したものが図5である。図は支出 x を平均的な水準 x_m と比較して、その半分程度である $\frac{x}{x_m} = \frac{1}{2}$ から二倍程度である $\frac{x}{x_m} = 2$ に変化した時のウェイトの変化について表している。ただし、横軸は対数軸で表現されており、横軸の表記について数字はそれぞれ平均に比較した支出水準を比の形で表している。具体的には、 p_i の値を平均である表2に示した値に、 t をデータの平均値である $t = 24.5$ に設定し、その時の $\log(x/P)$ の平均の値 $\log(x_m/P)$ を用いて、 x の範囲 $[x_{\min}, x_{\max}]$ として、 $[\log(x_{\min}/x_m), \log(x_{\max}/x_m)]$ の範囲を $\log(x/x_m)$ の変化に応じて、言い換えると $\log(x/P) - \log(x_m/P)$ の変化に応じて支出割合 w_i の変化を示している。横軸の目盛は前述のとおり、 x/x_m の値を示し、基準時点が1で、0.5が支出規模が半分の状態、2が支出規模2倍の状態を示す。以上の説明のように、図5は支出額が半分程度から2倍程度の変化によって影響を受ける w_i の構成の変化を示している。支出額の増加とともに $i = 1, 7$ の食料と交通・通信の割合の減少が顕著である。また保健医療も区間内で微減を示している。一方で増加の傾向を示すのは $i = 5, 8, 10$ の被覆及び履物、教育そして諸雑費である。ただし、この変化は全体に占める割合の変化であり、必ずしも全体の需要量の変化を代表しているわけではない。なお、支出割合の変化を全体的に眺めてみると、必ずしもすべての費目の支出割合が単純な増加減少をしているわけではないことが確認できる。

同様に、個別の費目についての 変化は、図6から図15のようになる。図は横軸は図5で示したのと同様に支出の増加を対数目盛にて表したものであり、 x の

図 5: 支出変化の影響



範囲 $[x_{\min}, x_{\max}]$ として, $[\log(x_{\min}/x_m), \log(x_{\max}/x_m)]$ の範囲を $\log(x/x_m)$ の変化に応じて支出割合 w_i の変化を示している. 1 の部分が平均と同じ支出額 x_m/x_m の基準であることを表し, 目盛の値は平均支出額と比較して支出が何倍の規模であるかを示している.

図 6 から図 15 の図においては, 実践が全体に占める各費目の支出割合 w_i が支出の増加 $\log(x/x_m)$ に応じての変化を示している. これは 図 5 にある支出割合 w_i のグラフは 10 費目の累積したものであるが, それを個々の費目に関して図示したもので, 言い換えればエンゲル関数の変化を示している. ウェイトの変化の値は左の目盛が対応しており全体の割合を示す. 同様に破線は, 第 i 財に関して, 平均となる基準時点での需要量を $q_{i,m}$ と表すと, 対応する費目の支出額自体の総額を基準時点である平均の総額 $p_i q_{i,m}$ で割った比を示しており, 右側の目盛が対応している. 平均に対応した費目の支出総額を 1 として, それと比較しての比, すなわち, $p_i q_i / p_i q_{i,m}$ を示している. これは需要の比 $q_i / q_{i,m}$ でもある.

図 6 から図 15 の図を用いて判断すると, 大部分の支出に関しては単純に対数支出の増加とともに費目のウェイトが増加または減少の単調な動きを示すが, 一部の費目に関しては単調な動きではないものも散見される. 2 次対数項の統計的有意性に関しては前述のとおりであるが, 実際問題として, 図示した支出変化の区間内においてその 2 次対数項の量的影響が図から確認できるのは, 特徴的な変化を示す w_2 を除けば半数程度であって, 他の半数程度の費目に関しては 2

図 6: w_1 の変化

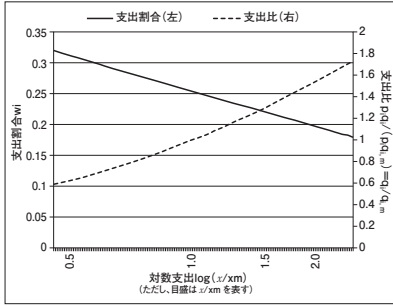


図 7: w_2 の変化

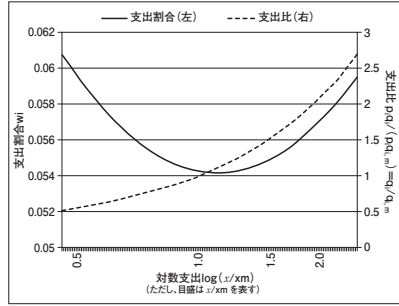


図 8: w_3 の変化

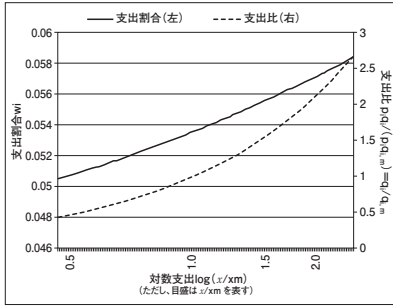


図 9: w_4 の変化

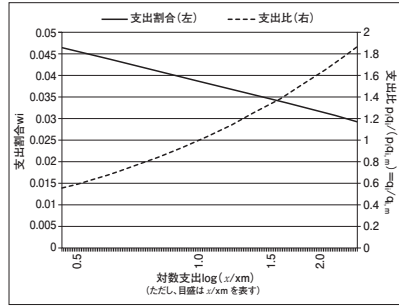


図 10: w_5 の変化

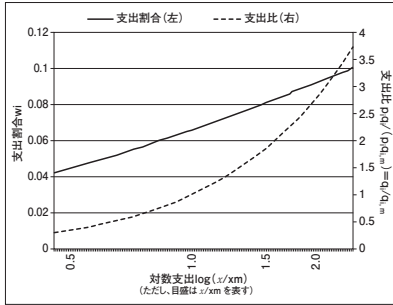


図 11: w_6 の変化

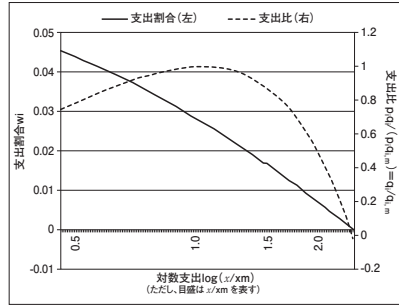


図 12: w_7 の変化

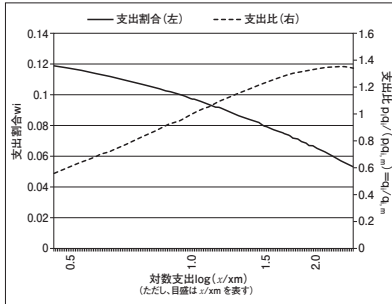


図 13: w_8 の変化

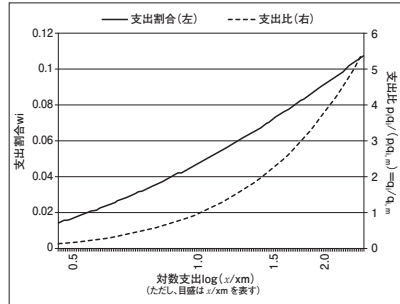


図 14: w_9 の変化

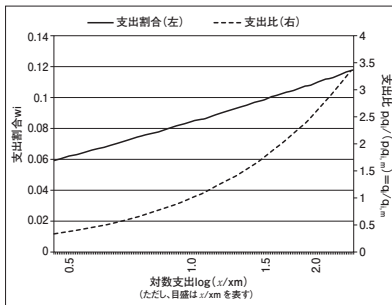
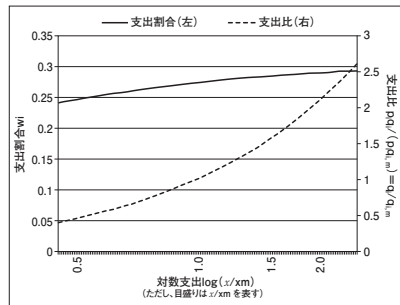


図 15: w_{10} の変化



次対数項の影響といっても顕著とは言えず、直線に近いものもある。

一方で破線は同様に $\log \frac{p}{p}$ の増加と共に変化する第 i 費目の支出比を示しており、記号で示すと、 $p_i q_i / p_i q_{i,m}$ である。言い換えると、需要量の比でもある $q_i / q_{i,m}$ を示している。破線に関しては第 2 軸の右側の値を参照する。この値によって需要量の変化を知ることができるが、大部分の費目で増加の様相を示している。通常、財は上級財であることが多いので、財の支出額は総支出額の増加とともに増加することが多い。確かにほとんどの費目の計算において、総支出額の増加とともに個々の費目の支出額は増加を示すが、図に示した範囲内においては w_6 の図のみ $\log \frac{p}{p}$ の増加と共に増加から減少に転じる局面が得られている。これは、支出額の増加に応じて財が上級財から下級財に変化する可能性があることを示している。他には w_7 が区間内では支出額の増加に伴い総支出額が増加傾向にあるが、その勢いが失速している。図の範囲内では確認できないが、さらに支出額が増加するとその支出比、言い換えると需要される財の比は減少に転じる。

これらの変化は総支出額増加による上級財から下級財への変化を示しているが、場合によっては逆の状況を示す財も存在することが考えられる。しかしながら、本稿において検討された 10 費目のケースでは存在しない。また、上級財と下級財の関係ほどではないものの必需品と奢侈品のあいだの変化も起こり得ることが考えられる。範囲内でこれに相当するのは w_2 であって、実践が単調な変化にならない場合には必需品と奢侈品に関する変化があったことが示される。この場合、実践は下に凸であり、この場合には財が必需品的性格から総支出額増加によって奢侈品的性格を持つようになったと言える。

結果を簡単に要約しておく、支出の弾力性に関しては、QUAIDS には対数支出の 2 次形式の影響があるため、単純な AIDS の場合と比較して複雑な影響を示す。QUAIDS の場合、式 (12) で示したように対数支出の線形関数という形になり、この変化で財の性質を議論できる。各第 i 費目の支出弾力性 e_i は $e_i = c_{i0} + c_{i1} \log \frac{p}{p}$ という一次関数で表され、 x が平均である x_m の場合の値を標準時点での支出弾力性の値といえる。それに関して、支出弾力性を示す直線の切片と

傾きのパラメータの値をそれぞれの費目に関して示したものが、表5である。

表 5: 支出弾力性について

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
切片 (c_0)	0.584	-1.595	0.854	0.801	0.497	3.289	2.742	-2.547	0.838	1.891
傾き (c_1)	0.011	0.317	0.029	-0.008	0.128	-0.402	-0.264	0.580	0.071	-0.096
標準 ($x = x_m$)	0.670	0.965	1.086	0.737	1.528	0.049	0.615	2.132	1.413	1.118

注) 標準として示されているのは基準時点での支出弾力性である。

支出が増加した時の支出弾力性の変化をこれまでの表記同様に横軸を対数軸で表したものが図16である。図16は対数支出の増加とともに変化する弾力性の値であるが、これにより範囲内での財の性質が確認できる。費目の多くは図16から、対数支出である $\log \frac{p}{p}$ の増加に伴い、微増もしくは微減となっており、AIDSで推定した場合と同様2次の影響はあっても僅かなものに留まるものもあるが、図16からも判断できるとおり、 $i=8$ の費目のように支出の増加とともに支出弾力性の伸びが著しいものや、逆に $i=6,7$ の費目のように支出の増加とともにその費目の性質がより支出弾力性の大きさを減少させるものもある。特に特徴的なものは $i=6$ であり図16の範囲内においても横軸（支出弾力性0）の部分と交差し、財の性質で言えば、上級財の中で必需品からさらに下級財へ変化することが確認できる。同様に図11においても、財自体の量の変化を示した破線は対数支出の増加とともに減少局面に変化しており、先ほどの財の支出弾力性の変化を裏付けるものになっている。 $i=2$ が総支出の増加とともに必需品から奢侈品になったことも $i=2$ の線が横軸で1の線、すなわち $e_i=1$ の線と区間内で交差することから確認できる。

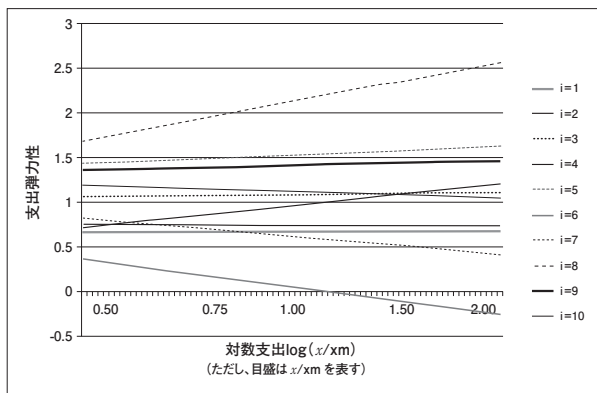
以上シミュレーションによって確認できたことは、我が国において家計の支出を10大費目で検証したところ、ほとんどの費目は、通常の家計が分布していると考えられる平均的な支出金額の半分から2倍程度の範囲において上級財であり、エンゲル関数も統計的には一次関数と異なるが、範囲内においては量的に大きく一次関数と大差ないものが多い。ただし、すべての費目が上級財でエンゲル関数も一次関数の状態であるかといえば例外が存在する。ひとつの例外が

$i = 2$ である住居に関する支出である。住居に関する支出は『家計調査』によるデータの場合、帰属家賃を計上しない形になっている。住宅に関する大費目中には修繕費などの費用も計上されているが、それらの全体に占める割合は5%程度であって、基本的には住宅の費目は家賃等のサービスに対する支出が大部分を占める。したがって、この費目の変動は持ち家率などの要因や家賃特有の時間的に長期の契約関係による影響が起因している可能性があり、通常の価格行動に基づいた変化と捉えることには若干問題があることを付記しておく。同様に例外的な特徴を示す $i = 6$ の保健医療の費目に関しては内容的に一部保健医療関係の耐久財を含むが、その割合は5%にも満たず、全体的には保健医療のサービスや薬などの非耐久消費財が大部分を占める。この大費目に関しては範囲内で低所得圏から支出の増加とともに支出費目は増加し、平均を超えて更なる増加に従い支出自体が減少する。これに関しては裕福な家計になるに伴い、疾病に対する出費が減少する可能性があることを考慮すれば理解できる行動ではあるが、この費目が保健制度の変更に伴い価格が実際の提供サービスと乖離して提供されてきたことを含めると、単純に支出の増加とともに上級財から下級財に変化する可能性があることに関しては割り引いて考える必要がある。しかしながら、こうして支出の変化とともに財の性質が変化することは操作性の良いAIDSでは分析できないことであって、この点QUAIDSを用い財の性質を詳細に分析することは意義があることだといえよう。

6 おわりに

本稿では家計支出のエンゲル関数を、我が国では従来分析されてこなかったQUAIDSを用い分析した。分析に関しては年次の時系列データを用いたが、分析の結果、エンゲル関数は対数支出の2乗にも影響することが確認され、単純に対数支出の一次関数でないことが、統計的に確認された。実際に平均的な家計支出の半分程度から2倍程度の規模の支出では、その2次関数的な影響は量的には限定されるものの、それでも上級財から下級財へと支出の増加とともに財

図 16: 支出弾力性の変化



の性質を変えるものや、必需品から奢侈品へと変化するものも確認された。このことは費目自体が大費目ということもあり、費目内の財の性質を検証しさらに分析する必要はあるが、興味深い事実を提供する。

本稿においては分析の主眼を家計支出の増加において各消費費目のウェイトの構成変化や、各費目の支出変化について言及し、シミュレーション分析を行った。もちろんこの分析は価格が変化した時の各費目の構成変化も分析することができる。特に近年のエネルギー価格の高騰などこれが消費支出に与える影響は従来の AIDS による分析以上に詳細な影響を分析することが可能であるであろう。ただし、この点を詳細に検討するには今以上に各財の関係を明確に示すようなモデルを特定化することが必要となり、財と財との区別について詳細に検討し、モデルを拡大するのであればそれに応じて増加する推定パラメータの個数に対応するため、データの蓄積が必要である。

一方で、これらのデータ収集の問題を回避して特定の費目に関して影響を分析するモデルを作りたい場合には、モデルに効用関数の弱分離可能性を仮定し、特定の費目内での分析を可能にする 2 段階予算配分を満たすとして分析を行うか、費目数を統合するなど費目数を減らし、特定の費目の動向のみに着目する方法が考えられる。

いずれの方法であっても QUAIDS を用いて分析を行うことは、本稿において示したように財の性質が支出に応じて変化する可能性があることから、従来の分析以上に複雑な支出効果と価格効果の合成効果が生じると推測される。本稿のように統計的な意味での支出効果の 2 次関数の効果は確認されたものの、その量的効果の大小が実際に 2 次的な効果を期待できるかどうかは係数の大小に依存するが、従来の分析の限界を超えて価格の変化を分析できる可能性がある。分析の上では AIDS に比較し推定するパラメータ数は増加し煩雑であるが、複雑な消費者行動に対応できる可能性があり、今後さらなる応用が期待される。

表 6: 推定結果 (モデル 3)

推定値/ t	αC_1	αC_2	$\alpha \gamma_1$	β_1	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{14}	γ_{15}	γ_{16}	γ_{17}	γ_{18}	γ_{19}	γ_{110}	ζ_1
1	1.06786	-0.10596	0.13640	-0.04698	-0.00096	-0.01285	-0.01638	0.02701	-0.00033	-0.02292	-0.04814	-0.01486	0.00141	0.00199	
2	5.9901	0.00029	-0.14088	0.06325	-0.01473	0.02033	-0.07908	0.03543	0.06848	-0.10950	-0.04573	0.10854	0.00905	0.00005	
3	0.04737	0.00065	-0.00783	-0.00473	0.04317	-0.00554	-0.02132	0.00114	-0.00202	-0.00415	0.00154	0.00287	0.00081	0.00001	
4	0.10620	-0.00004	-0.00772	-0.01285	-0.02033	0.01056	0.01959	-0.00893	0.01008	-0.01591	-0.01771	0.00488	-0.00016	0.00046	
5	0.05144	-0.00064	-0.03323	-0.07908	-0.02132	0.01959	0.03807	0.02537	0.05488	-0.06000	-0.03664	0.07552	-0.00014	0.00016	
6	-0.11262	0.00034	0.06481	0.03543	0.00114	-0.00893	0.02537	-0.00129	-0.06375	0.06105	0.02165	-0.09769	-0.00597	0.00034	
7	-0.47983	0.00307	0.17010	-0.00633	-0.00202	0.00108	0.05488	0.06375	-0.08115	0.12607	0.04235	-0.14561	-0.01352	0.01459	
8	0.50955	-0.00078	-0.16995	-0.02292	-0.10950	-0.00415	-0.06000	0.06105	0.12607	-0.10950	-0.07951	0.21185	0.01459	0.00315	
9	-0.06764	0.00177	-0.01363	-0.04814	0.00154	-0.01771	-0.03664	0.02165	0.04235	-0.07951	0.10630	0.05589	0.00315	0.00315	
10	-0.72133	-0.00263	0.24430	-0.01486	0.00287	0.00488	0.07552	-0.09769	-0.14561	0.21185	0.05589	-0.20139	-0.01380	-0.01380	
標準誤差/ t	αC_1	αC_2	$\alpha \gamma_1$	β_1	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{14}	γ_{15}	γ_{16}	γ_{17}	γ_{18}	γ_{19}	γ_{110}	ζ_1
1	0.06315	0.00029	0.02276	0.01507	0.00475	0.00820	0.01075	0.00803	0.02524	0.02355	0.01189	0.02871	0.01189	0.00199	
2	0.06345	0.00029	0.02125	0.02710	0.00921	0.01128	0.01198	0.00962	0.02482	0.01972	0.01638	0.03454	0.00190	0.00190	
3	0.03894	0.00012	0.01487	0.00475	0.00298	0.00318	0.00566	0.00535	0.01444	0.01410	0.00564	0.01570	0.00129	0.00129	
4	0.04393	0.00018	0.01633	0.00820	0.01128	0.00736	0.00778	0.00640	0.01710	0.01618	0.00936	0.02016	0.00145	0.00145	
5	0.04393	0.00018	0.01516	0.01075	0.00566	0.00778	0.01232	0.00674	0.01892	0.01719	0.01149	0.02460	0.00135	0.00135	
6	0.04127	0.00015	0.01280	0.00803	0.00962	0.00535	0.00674	0.00835	0.01346	0.01229	0.00923	0.01312	0.00105	0.00105	
7	0.06636	0.00029	0.02295	0.02524	0.02482	0.01444	0.01892	0.01346	0.04650	0.03027	0.02527	0.04051	0.00215	0.00215	
8	0.04437	0.00024	0.01425	0.01972	0.01410	0.01618	0.01719	0.01229	0.03027	0.03003	0.02188	0.04260	0.00155	0.00155	
9	0.06748	0.00029	0.02220	0.01189	0.01638	0.00564	0.00936	0.01149	0.00923	0.02527	0.02188	0.02142	0.02988	0.00191	
10	0.10565	0.00039	0.03591	0.02971	0.03454	0.01570	0.02016	0.02460	0.01312	0.04051	0.04260	0.02988	0.07952	0.00312	
t 値/ t	αC_1	αC_2	$\alpha \gamma_1$	β_1	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}	γ_{14}	γ_{15}	γ_{16}	γ_{17}	γ_{18}	γ_{19}	γ_{110}	ζ_1
1	16.909	-7.034	-4.656	8.864	-3.117	-2.021	-1.567	-1.524	3.385	-0.013	-0.973	-4.048	-5.500	0.711	
2	9.440	1.006	-3.117	2.333	-1.601	1.802	-6.602	3.684	2.759	-5.553	-2.791	3.143	4.470	0.711	
3	1.216	5.298	-0.527	-1.601	14.491	-1.739	-3.768	0.212	-0.140	-0.294	0.273	0.183	0.631	0.631	
4	2.341	-0.156	-0.472	-1.567	-1.739	2.046	2.518	-1.395	0.063	-0.984	-1.892	0.242	-0.112	-0.112	
5	1.171	-3.593	-2.192	-1.524	-3.768	2.518	3.089	3.765	2.900	-3.491	-3.190	3.069	3.276	3.276	
6	-2.729	2.325	5.064	3.365	3.684	-0.212	-1.395	-0.135	-0.155	4.969	2.345	-7.446	-6.288	-6.288	
7	-7.231	10.456	7.412	-0.013	2.759	-0.140	0.063	2.900	-4.737	-1.465	1.676	-3.594	-4.561	-4.561	
8	11.483	-3.310	-11.923	-0.973	-5.553	-0.294	-3.491	4.969	4.165	-3.562	-3.634	3.973	9.445	9.445	
9	-1.002	6.199	-0.614	-1.048	-1.892	2.345	-3.190	2.345	1.676	-3.634	4.961	1.871	1.647	1.647	
10	-6.827	-6.078	6.803	-0.500	3.143	0.183	0.242	3.069	-7.446	-3.594	4.973	1.871	-2.533	-4.419	

表 7: 弾力性 (モデル 3)

弾力性/ i	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	e_{i4}	e_{i5}	e_{i6}	e_{i7}	e_{i8}	e_{i9}	e_{i10}
1	0.670	-0.090	0.072	0.021	-0.011	-0.033	0.042	-0.205	0.139	-0.185	-0.419
2	0.965	0.264	1.641	-0.188	0.458	-1.112	-0.021	-0.510	-0.245	-0.702	-0.551
3	1.086	-0.007	-0.197	-0.193	-0.106	-0.372	-0.029	-0.159	0.037	0.042	-0.103
4	0.737	-0.089	0.653	-0.127	-0.585	0.512	-0.246	-0.044	-0.318	-0.461	-0.031
5	1.528	-0.348	-0.944	-0.325	0.270	-0.317	0.181	0.357	-0.474	-0.496	0.570
6	0.049	0.545	0.010	0.000	-0.310	0.519	-0.318	-0.449	0.426	0.583	-1.055
7	0.615	-0.518	-0.265	-0.063	-0.012	0.300	-0.145	-0.542	0.032	0.315	0.282
8	2.132	0.360	-0.340	-0.013	-0.312	-0.694	0.193	-0.078	-0.610	-1.398	0.761
9	1.413	-0.749	-0.476	0.009	-0.238	-0.383	0.158	0.291	-0.762	0.294	0.443
10	1.118	-0.506	-0.118	-0.022	-0.019	0.165	-0.140	0.051	0.182	0.162	-0.874
標準誤差/ i	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	e_{i4}	e_{i5}	e_{i6}	e_{i7}	e_{i8}	e_{i9}	e_{i10}
1	0.303	0.079	0.026	0.026	0.039	0.053	0.057	0.162	0.063	0.071	0.230
2	1.284	0.149	0.195	0.126	0.145	0.180	0.211	0.602	0.146	0.276	0.924
3	0.741	0.204	0.012	0.019	0.022	0.083	0.129	0.381	0.114	0.096	0.512
4	1.024	0.199	0.045	0.066	0.111	0.189	0.230	0.645	0.215	0.262	0.906
5	0.715	0.122	0.013	0.040	0.056	0.162	0.100	0.334	0.107	0.122	0.484
6	1.048	0.073	0.159	0.224	0.252	0.283	0.338	0.783	0.275	0.435	1.016
7	0.718	0.070	0.157	0.165	0.187	0.215	0.198	0.549	0.225	0.312	0.697
8	1.120	0.053	0.092	0.191	0.207	0.249	0.211	0.621	0.465	0.318	0.920
9	0.972	0.164	0.008	0.027	0.055	0.096	0.120	0.376	0.098	0.236	0.516
10	0.327	0.025	0.043	0.049	0.059	0.082	0.064	0.205	0.087	0.109	0.375
t 値/ i	e_i	e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	e_{i4}	e_{i5}	e_{i6}	e_{i7}	e_{i8}	e_{i9}	e_{i10}
1	2.208	-1.136	2.767	0.783	-0.283	-0.623	0.740	-1.265	2.190	-2.606	-1.824
2	0.751	1.776	8.425	-1.494	3.152	-6.185	-0.098	-0.847	-1.683	-2.538	-0.597
3	1.467	-0.035	-16.662	-10.260	-4.777	-4.481	-0.223	-0.417	0.328	0.435	-0.201
4	0.720	-0.447	14.367	-1.936	-5.250	2.709	-1.071	-0.068	-1.483	-1.756	-0.035
5	2.138	-2.862	-74.167	-8.117	4.811	-1.958	1.813	1.067	-4.443	-4.059	1.178
6	0.046	7.486	0.062	0.001	-1.231	1.834	-0.941	-0.573	1.550	1.339	-1.039
7	0.856	-7.364	-1.687	-0.380	-0.066	1.395	-0.732	-0.988	0.143	1.010	0.404
8	1.903	6.863	-3.704	-0.068	-1.510	-2.786	0.913	-0.126	-1.313	-4.393	0.827
9	1.454	-4.553	-61.516	0.343	-4.298	-4.001	1.324	0.772	-7.775	1.247	0.858
10	3.418	-20.015	-2.730	-0.440	-0.328	2.011	-2.193	0.250	2.088	1.489	-2.332

注) e_i は第 i 財の支出弾力性を, e_{ij} は第 i と j の価格弾力性を示す。

A QUAIDSについて

モデルは間接効用関数を

$$\log V(x, \mathbf{p}) = \left(\frac{\beta(\mathbf{p})}{\log x - \log \alpha(\mathbf{p})} + \zeta(\mathbf{p}) \right)^{-1} \quad (17)$$

とすることで得ることができる. ただし, $\alpha(\mathbf{p}), \beta(\mathbf{p})$ は

$$\log \alpha(\mathbf{p}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \gamma_{kl}^* \log p_k \log p_l \quad (18)$$

$$\log \beta(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^N p_i^{\beta_i} \quad (19)$$

計算のためにあらかじめ,

$$\frac{\partial \log \alpha(\mathbf{p})}{\partial \log p_j} = \alpha_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^N \gamma_{jl}^* \log p_l + \sum_{k=1}^N \gamma_{kj}^* \log p_k \right) \quad (20)$$

ここで,

$$\gamma_{kl} = \frac{1}{2} (\gamma_{kl}^* + \gamma_{lk}^*) \quad (21)$$

と置くことにすると,

$$\frac{\partial \log \alpha(\mathbf{p})}{\partial \log p_j} = \alpha_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \gamma_{jk} \log p_k \right) \quad (22)$$

そして, $\frac{\partial \alpha(\mathbf{p})}{\partial p_j}$ を $\alpha'(\mathbf{p})$ と表すと,

$$\frac{\partial \log \alpha(\mathbf{p})}{\partial p_j} = \frac{\alpha'(\mathbf{p})}{\alpha(\mathbf{p})} = \frac{\partial \log \alpha(\mathbf{p})}{\partial \log p_j} \cdot \frac{\partial \log p_j}{\partial p_j} = \frac{\alpha_j}{p_j} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_{jk} \log p_k}{p_j} \right) \quad (23)$$

同じく, $\frac{\partial \beta(\mathbf{p})}{\partial p_j}$ を $\beta'(\mathbf{p})$ と表すと

$$\frac{\partial \beta(\mathbf{p})}{\partial p_j} = \beta'(\mathbf{p}) = \frac{\beta_j}{p_j} \cdot \prod_{k=1}^N p_k^{\beta_k} = \frac{\beta_j}{p_j} \cdot \beta(\mathbf{p}) \quad (24)$$

さらに,

$$\zeta(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N \zeta_k \log p_k \quad (25)$$

とおいているが、このケースも $\frac{\partial \zeta(\mathbf{p})}{\partial p_j}$ を $\zeta'(\mathbf{p})$ と表記して、

$$\frac{\partial \zeta(\mathbf{p})}{\partial p_j} = \zeta'(\mathbf{p}) = \frac{\zeta_j}{p_j} \quad (26)$$

となる。

一方で、ロイの恒等式より、 $q_i = -\frac{\partial V/\partial p_i}{\partial V/\partial x}$ を求めると、

$$q_i = \frac{\beta'(\mathbf{p})}{\beta(\mathbf{p})}(\log(y) - \log \alpha(\mathbf{p}))x + \frac{\alpha'(\mathbf{p})}{\alpha(\mathbf{p})}x + \frac{(\log(x) - \log \alpha(\mathbf{p}))^2}{\beta(\mathbf{p})}\zeta'(\mathbf{p})x \quad (27)$$

よって、

$$\frac{q_i}{x} = \frac{\alpha'(\mathbf{p})}{\alpha(\mathbf{p})} + \frac{\beta'(\mathbf{p})}{\beta(\mathbf{p})} \log \frac{x}{\alpha(\mathbf{p})} + \frac{\zeta'(\mathbf{p})}{\beta(\mathbf{p})} \left(\log \frac{x}{\alpha(\mathbf{p})} \right)^2 \quad (28)$$

$w_i = \frac{p_i q_i}{x}$ の関係及び式 (23) 式 (24) 式 (26) を用いると、求めるモデル体系は次のように整理される。

$$w_i = \alpha_i + \beta_i \log \frac{x}{P} + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \log p_j + \frac{\zeta_i}{\prod_{j=1}^N p_j^{\beta_j}} \left(\log \frac{x}{P} \right)^2 \quad (29)$$

ただし、総合物価指数を $\log P = \log \alpha(\mathbf{p})$ で置き換えている。

このモデルにおいては Engel 関数との関係でいえば、支出の一次関数ではなく、二次関数であることにより、支出の増加に伴い、必需品から贅沢品へ変化することもあれば、逆の場合も可能な形になっている。

B 弾力性について

B.1 支出弾力性

QUAIDS の式 (5) を $\log x$ で偏微分すると

$$\frac{\partial w_i}{\partial \log x} = \beta_i + \frac{2\zeta_i}{\beta(\mathbf{p})} \log \frac{x}{\alpha(\mathbf{p})} \quad (30)$$

したがって、支出弾力性である $e_i = \frac{\partial \log q_i}{\partial \log x}$ を計算するためには、 $w_i = \frac{p_i q_i}{x}$ の関係を用いると、

$$e_i = \frac{1}{w_i} \cdot \frac{\partial \log w_i}{\partial \log x} + 1 \quad (31)$$

以上より、式 (30) を式 (31) 代入して式 (11) を得ることができる。

B.2 価格弾力性

価格弾力性に関して、QUAIDSの基本式である式(5)を $\log p_j$ で偏微分すると

$$\frac{\partial w_i}{\partial \log p_j} = \gamma_{ij} - \beta_i \frac{\partial \alpha(\mathbf{p})}{\partial p_j} - \frac{\zeta_i \beta_j}{\beta(\mathbf{p})} \left[\left(\log \frac{x}{\alpha(\mathbf{p})} \right)^2 - \frac{2\zeta_i}{\beta(\mathbf{p})} \log \frac{x}{\alpha(\mathbf{p})} \right] \frac{\partial \alpha(\mathbf{p})}{\partial p_j} \quad (32)$$

一方で、 $w_i = \frac{p_i q_i}{x}$ の関係を用いて、価格弾力性に関しては、 $e_{ij} = \frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_j}$ より、

$$e_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{1}{w_i} \cdot \frac{\partial \log w_i}{\partial \log p_j} \quad (33)$$

式(32)を式(33)代入してに入れて整理することで、式(12)が得られる。

B.3 変数リスト

表 8: 変数リスト

変数名	記号
第 i 財の価格	p_i
第 i 財の数量	q_i
支出総額	x
財の価格のベクトル表記	$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)'$
財の数量のベクトル表記	$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)'$
財の支出額	$x = \sum_{i=1}^N p_i q_i$
財の総数	N
効用水準	\bar{u}
Marshall 型需要関数	$q_i = d_i(x, \mathbf{p})$
Hicks 型需要関数	$q_i = h_i(\mathbf{p}, \bar{u})$
直接効用関数	$U(\mathbf{q})$
間接効用関数	$V(x, \mathbf{p})$
費用関数	$C(\bar{u}, \mathbf{p})$
第 i 財のウエイト表記	$w_i = \frac{p_i q_i}{x}$
第 i 財と第 j 財の非補償価格弾力性	$e_{ij} = \frac{\partial \log q_i}{\partial \log p_i}$
第 i 財と第 j 財の補償価格弾力性	$e_{ij}^* = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial \log p_i} = e_{ij} + w_j e_i$
第 i 財の支出弾力性	$e_i = \frac{\partial \log q_i}{\partial \log x}$
予算制約	$\sum_{i=1}^N p_i q_i = \sum_{i=1}^N p_i d_i(\mathbf{p}, x) = x$
ウエイトによる予算制約	$\sum_{i=1}^N \frac{p_i q_i}{x} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{x} = \sum_{i=1}^N w_i = 1$
Shephard の補題	$\frac{\partial C(\bar{u}, \mathbf{p})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, \bar{u}) = q_i \quad w_i = \frac{\partial \log C(\bar{u}, \mathbf{p})}{\partial \log p_i}$
Roy の恒等式	$q_i = \frac{\partial x}{\partial p_i} = \frac{\partial x}{\partial p_i} = d_i(x, \mathbf{p}) = \frac{\partial V / \partial p_i}{\partial V / \partial x} \quad w_i = - \frac{\partial \log V / \partial \log p_i}{\partial \log V / \partial \log x}$
Slutsky 方程式	$\frac{\partial d(\mathbf{p}, x)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} - \frac{\partial d(\mathbf{p}, x)}{\partial x} \cdot q_j$
Slutsky 代替行列の ij 要素	$s_{ij} \equiv \frac{\partial c(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial c(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j \partial p_i}$

参考文献

- [1] 北村行伸 (2013) 「消費税の再検討: 日本における消費税改革の行方」, Global COE Hi-Stat Discussion Paper Series, Vol. 274, 一橋大学.
- [2] 松田敏信 (2013) 「食肉の家計需要に対する少子高齢化等の影響」, 『畜産の情報』 2013年3月号, pp.62-pp.73, 農畜産業振興機構.
- [3] 横山佳充 (2013) 「多品目需要体系モデルにおいて支出変化がエンゲル関数に与える影響」, Kagawa University Working Paper Series, Vol. 179, 香川大学.
- [4] Abdulai, A. (2002) “Household Demand for Food in Switzerland. A Quadratic Almost Ideal Demand System”, *Swiss Journal of Economic Statistics*, Vol.138, pp.1-18.
- [5] Abdulai, A. and D. Aubert (2004) “A Cross-section Analysis of Household Demand for Food and Nutrients in Tanzania”, *Agricultural Economics*, Vol.3, pp.67-79.
- [6] Banks, J., R. W. Blundell and A. Lewbel (1997) “Quadratic Engel Curves and Consumer Demand”, *Review of Economics and Statistics*, Vol.79, pp.527-539.
- [7] Barnett, W. A. and A. Serletis (2008) “Consumer Preference and Demand System”, *Journal of Econometrics*, Vol.147, pp.210-224.
- [8] Barten, A. P. (1964), “Consumer Demand Functions under Conditions of Almost Additive Preferences”, *Econometrica*, Vol. 1-2, pp1-38.
- [9] Barten, A. P. (1969) “Maximum Likelihood Estimation of a Complete System of Demand Equations”, *European Economic Review*, Vol.1, pp.7-73.

- [10] Bludell, R. W. and J. M. Robin (1999) "Estimation in Large and Disaggregated Demand Systems : An Estimator for Conditionally Linear Systems", *Journal of Applied Econometrics* , Vol.14, pp.209-232.
- [11] Christensen, L. R., D. W. Jorgenson and L. J. Lau (1975) "Transcendental Logarithmic Utility Function", *American Economic Review*, Vol.65 , No.3 , pp.367-383.
- [12] Deaton, A. S. and J. Muellbauer (1980) "An Almost Demand System", *American Economic Review*, Vol.70, No.3, pp.312-326.
- [13] Fisher, D. , A. R. Fleissig and A. Serletis (2001) "An Empirical Comparison of Flexible Demand System Functional Forms", *Journal of Applied Econometrics* , Vol.16, pp.59-80.
- [14] Fousekis, P. , and B. J. Revell (2003) "Quadratic Differential Demand Systems and the Retail Demand for Pork in Great Britain", *Journal of Agricultural Economics* , Vol.54, pp.417-430.
- [15] Gould, W. and H. J. Villarreal (2006) "An Assessment of the Current Structure of Food Demand in Urban China", *Agricultural Economics* , Vol.34, pp.1-16.
- [16] Gorman, W. M. (1981) "Some Engel Curves", in A. S. Deaton (ed.), *Essays in the Theory and Measurement of Consumer Behaviour*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.7-29.
- [17] Meenakshi, J.V. and R. Ray (1999) "Regional Differences in India 's Food Expenditure Pattern: A Completed Demand Systems Approach", *Journal of International Development* , Vol.11, pp.47-74.
- [18] Mittal, S. (2010) "Application of the Quaid's Model to the Food Sector in India", *Journal of Quantitative Economics*, Vol.8, pp.42-54.

- [19] Molina, J. S. and A. I. Gil (2005) "The Demand Behavior of Consumers in Peru: A Demographic Analysis using the QUAIDS", *Journal of Developing Areas*, Vol.39, pp.191-206.
- [20] Moro, D. and P. Sckokai (2000) "Heterogenous Preferences in Household Food Consumption in Italy", *European Review of Agricultural Economics*, Vol.27, pp.305-323.
- [21] Stone, J. R. N. (1954) "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: To the Pattern of British Demand", *Economic Journal*, Vol.64, pp.511-527.
- [22] Theil, H. (1965) "The Information Approach to Demand Analysis", *Econometrica*, Vol.33, pp.67-87.