

遷移分布にもとづく AR(1)係数の区間推定

久松博之

1. はじめに

久松(2015)では, P. C. B. Phillips とその共著者たちによって展開されてきた, いわゆる “Local to Moderate Unit Root Theory” について, それまでの単位根の推定と検定に関するいくつかの理論的な研究と関連付けながら, 1階の自己回帰係数の最小2乗推定量の分布の漸近理論を体系的にサーベイした.

Hisamatsu(2016)では, Phillips, Magdalinos and Giraitis(2010)で示された, 標準化された最小2乗推定量の極限分布について, 単位根の場合の非標準的 (nonstandard) な分布から, 根が1より大きい場合の極限分布 (Cauchy 分布) に至るいわゆる遷移分布 (transition distribution) と, 単位根の場合の非標準的 (nonstandard) な分布から根が1より小さい場合の極限分布 (正規分布) に至る遷移分布を, White(1958)および Evans and Savin(1981), Perron(1989), Hisamatsu and Maekawa(1994)と同様の方法で分布関数と密度関数を導出し, 数値積分を使って分布を評価した.

本稿では, Hisamatsu(2016)で導出した, 標準化した最小2乗推定量の遷移分布の分布関数について概説し, これを使って1階の自己回帰係数の区間推定を試みる. そして, 係数の値が1に近い非定常な場合 (mildly explosive な場合) の極限分布である Standard Cauchy 分布や, 1に近い定常な場合 (mildly stationary な場合) の極限分布である正規分布を使って信頼区間を構築するのが妥当な場合と, Hisamatsu(2016)で導出された分布関数 $H(x,c,m)$ を使った方がよい場合とがあることを示す.

なお, Hisamatsu(2016)では日経225株価日次データを使ってバブルのピークまでの期間で係数を推定すると1をわずかに上回ることを確認し, Phillips, Wu and Yu(2011)の Cauchy 分布を使う場合が妥当であるかどうかを検討している. ここでは, 特にバブルのピーク以降について考察する.

2. モデルおよび分析のフレームワーク

1 階の自己回帰過程 (AR(1) : Autoregressive Process of order 1) を考える。

$$X_t = \rho X_{t-1} + u_t, \quad t=1,2,\dots,n, \quad u_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (1)$$

である。 $\rho=1$ のとき系列 $\{X_t\}$ は単位根 (unit root) をもつという。 $\rho < 1$

のとき系列 $\{X_t\}$ は定常過程, そして, $\rho > 1$ のとき系列 $\{X_t\}$ は発散過程になる。最小 2 乗推定量 $\hat{\rho}$ の標準誤差 (分散の推定量の平方根) の逆数を normalizer といい, 記号 $g(n)$ で表すことにすると $\rho=1$, $\rho < 1$, および $\rho > 1$ のとき標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho} - \rho)$ の分布の漸近理論が White(1958) で与えられている。

また, $\rho_n = \exp(c/n) \approx 1 + c/n$ と置いたときの, いわゆる “near integrated case” における分布の漸近理論については, Phillips(1987), Perron(1989) ほかで展開されている。

$\rho_n = 1 + c/k_n$, ただし $k_n = n/m$, で n 個の観測値を k_n 個ずつ m ブロックに分け, $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ のとき ρ がゆるやかに 1 に近づく場合の分布の漸近理論が Phillips, Magdalinos and Giraitis(2010) で展開されている。

単位根のときの nonstandard な分布と Cauchy 分布, および, 単位根のときの nonstandard な分布と正規分布とを橋渡しするための分布を遷移分布 (transition distribution) と呼んでいる。

遷移分布を Wiener 過程の汎関数で求めるために Phillips et al.(2010) ではまず $\rho_{m,n} = 1 + cm/n$ で m を固定し $n \rightarrow \infty$ のときの漸近分布を求め, 次に $m \rightarrow \infty$ のときの漸近分布を求めている。

1階の自己回帰過程を次式のように再定義する.

$$\begin{aligned} X_t &= \rho_{n,m} X_{t-1} + u_t, \quad t=1,2,\dots,n \\ \rho_{n,m} &= 1 + cm/n \end{aligned} \quad (2)$$

Hisamatsu(2016)をもとに, 2.1節で $c < 0$ のときの遷移分布の漸近理論および導出した分布関数について概観し, 2.2節で $c > 0$ のときの遷移分布の漸近理論と導出した分布関数について概観する. そして, 3節で日経225日次データをバブルピーク前とその後の期間に分けて, 遷移分布を使った $\rho_{n,m}$ の信頼区間の推定を試みる.

2.1 $c < 0$ のときの遷移分布

$c < 0$ のときの遷移分布とは, mildly stationary (根が1に近い定常な場合)のときの遷移分布のことであり, $g(n) = n/\sqrt{m}$ で標準化した最小2乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ について, m を固定して $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &= \frac{n}{\sqrt{m}} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} \end{aligned} \quad (3)$$

さらに、 $m \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow N(0, -2c) \quad (4)$$

となる。

この性質の証明は、Phillips et al.(2010)に与えられている。(3)式の矢印右辺が Wiener 過程の汎関数で表された遷移分布である。

$c < 0$ のとき、標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の漸近分布は、

(3)式矢印右辺の Wiener process の汎関数の比で表された確率変数の分布と同等である。

この式の分子と分母

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s), \quad \frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数は

$$\left(\sqrt{m} \int_0^1 J_{cm}(s) dW(s), \quad m \int_0^1 J_{cm}(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数と同値である。

ここで W は標準ブラウン運動であり $J_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} dW(s)$ は対応する

Ornstein-Uhlenbeck 過程である。また $\tilde{W}(t) = \sqrt{m}W(t/m)$ は標準ブラウン

運動であり $\tilde{J}_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} d\tilde{W}(s)$ は対応する Ornstein-Uhlenbeck 過程

である。

(3)式を見ても、矢印右辺の確率変数がどんな形状の分布にしたがうかはわからない。シミュレーションで経験分布を求めておおよその形状を把握することはできるが、後述するように一階の自己回帰係数を最小2乗推定するときはその信頼区間をより正確に推定するにはどうすればよいか考えるとき、(3)式の m に関して厳密(exact)な極限分布の分布関数を導出して、それをもとに区間推定することを考えてみたい。

w を u 、 z を v で置き換えて、同時特性関数を

$$M_{cm}(\sqrt{m}w, mz) = \psi_m(u, v) \quad (5)$$

と表し、虚数単位 i を導入すると特性関数が得られる。

これを反転すると、 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})\frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布である

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s) / \frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds$$

の分布関数

$$H(x, c, m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}ag[\psi_m(u, v)]}{u} du \quad (6)$$

が得られる。

White(1958), Evans and Savin (1981), Perron(1989), Hisamatsu and Maekawa(1994)の手法にもとづいた $H(x, c, m)$ の詳しい数値積分可能な分布関数の導出と分布の具体的な数値評価については Hisamatsu(2016)に譲ることにして、ここでは記号が煩雑になるので(6)式の表現にとどめる。なお、同論文では遷移分布の密度関数についても、同時特性関数を反転し数値積分で評価してグラフ化している。

2.2 $c > 0$: mildly explosive のときの遷移分布

(2) 式において, $c > 0$: mildly explosive のとき, $g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm}$

で標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布は Wiener 過程の

汎関数で次のように表される.

m を固定して $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) \tag{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds}$$

さらに, $m \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow \text{standard Cauchy.} \tag{8}$$

となる. この性質は Phillips et al.(2010)にその証明が与えられている.

$c > 0$ のときの, $g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm}$ で標準化した最小 2 乗推定量

$g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の $n \rightarrow \infty$ のときの漸近分布は, (7) 式矢印右辺の Wiener

process の汎関数の比で表された確率変数

$$\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s) / \frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds$$

の分布と同値である．この式の分子と分母

$$\left(\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s), \frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数は

$$\left(\frac{2cm}{e^{cm}} \int_0^1 J_{cm}(s) dW(s), \frac{4c^2 m^2}{e^{2cm}} \int_0^1 J_{cm}(s)^2 ds \right)$$

の同時積率母関数と同値である．ここで， W は標準ブラウン運動であり，

$J_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} dW(s)$ は対応する Ornstein-Uhlenbeck 過程である．また

$\tilde{W}(t) = \sqrt{m}W(t/m)$ は標準ブラウン運動であり $\tilde{J}_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} d\tilde{W}(s)$ は対応する Ornstein-Uhlenbeck 過程である．

同時積率母関数を Phillips et al.(2010)の表記にしたがって

$$M_{cm}(2cme^{-cm}u, 4c^2 m^2 e^{-2cm}v) = \psi_m(u, v) \quad (9)$$

と表し，虚数単位 i を導入すると同時特性関数が得られる．これを反転すると

$$H(x, c, m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im ag}[\psi_m(u, v)]}{u} du \quad (10)$$

より， $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布

$$\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s) / \frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds$$

の分布関数を得る.

Hisamatsu(2016)では遷移分布の分布関数(10)式についてWhite(1958), Evans and Savin(1981), Perron(1989), Hisamatsu and Maekawa(1994)の手法にもとづいて数値積分可能な分布関数および密度関数を導出し数値積分で数値評価しグラフ化している. ここでは, 記号が煩雑になるので(10)式の表現にとどめる. 同論文では任意の c の値に対していくつかの m の値を想定して分布を計算しグラフ化している.

3. 日経225株価日次データを使った $\rho_{n,m}$ の点推定と区間推定

次の図1は日経平均株価(終値)のグラフである. その時々によろぬ出来事が起きていたかということと重ね合わせながら見ることは意味があるが, その時々によろぬ要因がどう影響しあって日経平均株価がこのような変動を起こすに至ったかを解明することは非常にむずかしい.

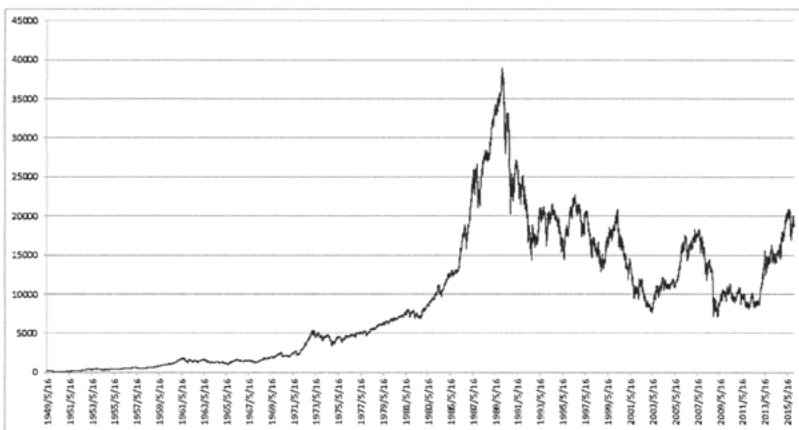


図1: 日経平均株価 (1949/5/17~2015/12/30) <http://billion-trillion.com>

この動きを簡単な確率過程である1階の自己回帰過程で近似することを考える. 直感的には unit root \rightarrow mildly explosive \rightarrow バブルのピーク \rightarrow mildly stationary \rightarrow unit root のような動き方のパターンを取っているように見える. 少なくともバブルのピークの前と後とは異なった動き方をしているように見える. 前者はいかにも非定常な動きで, 後者は通常のランダムウォークに近い動き方をしている.

本稿の目的は, (2)式において $c < 0$ のときの $\rho_{n,m}$ の信頼区間を求めるために Hisamatsu(2016)で求めた分布関数 $H(x, c, m)$ を使った方が, $m \rightarrow \infty$ のときの極限分布である正規分布を使うよりも, より正確な信頼区間が得られることを示すことである.

3.1 バブルピーク以前の期間: 1949/5/16~1989/12/29

図2は, 日経225株価(終値)日次データのバブルピーク以前の期間(1949/5/16~1989/12/29)における株価の動きを示したものである.

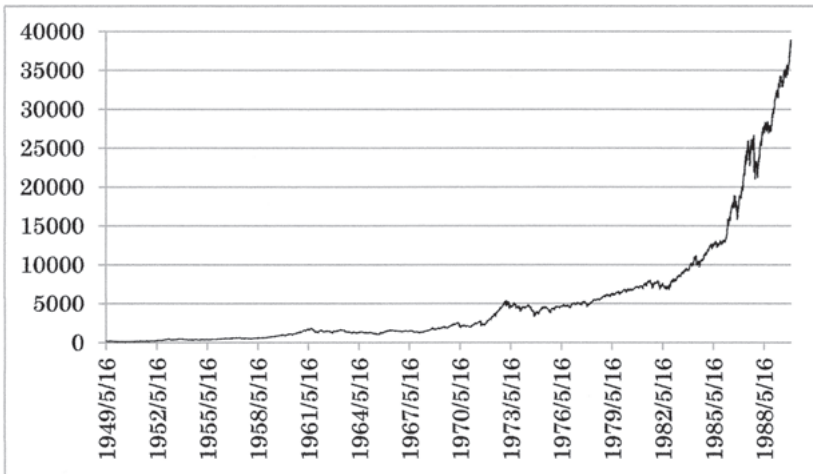


図2: 日経225(終値)日次データ: 1949/5/16~1989/12/29.

この期間で $\rho_{n,m}$ を最小 2 乗法で推定すると

$$1949/5/17 \sim 1989/12/29: n=11882, \hat{\rho}_n = 1.000780 = 1 + 0.000780$$

となる。この期間の動きは 1 階の自己回帰過程において根が 1 をわずかに上回る非定常過程で近似できることになる。

Hisamatsu(2016)では、バブルピーク前の期間について、 $c > 0$ の場合つまり根が 1 に近い非定常な場合の遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ の % 点を使って $\rho_{n,m}$ の信頼区間を推定している。

概略以下の通りである。

$$1949/5/17 \sim 1989/12/29, n=11882, \hat{\rho}_n = 1.000780 = 1 + 0.000780$$

なので $cm/n=0.000780$, $cm=9.26796$, $c=1$, $m=9.27 \doteq 9$ となり, $H(x, c, m)$ の 2.5 % 点と 97.5 % 点, $H(0.025)=-11.235$, $H(0.975)=9.689$ を得る。

Standard Cauchy 分布の 2.5%点と 97.5%点は $C(0.025)=-12.706$, $C(0.975)=12.706$ となる。

したがって, $H(x, c, m)$ の % 点を使った $\rho_{n,m}$ の 95% 信頼区間は

$$g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} = \frac{1}{2 \times 1} \frac{11882}{9} \exp\{9\} = \frac{11882}{2 \times 9} 8103.084 = 5348935.735$$

より

$$\begin{aligned}
& (\hat{\rho}_n + H(0.025) \times 1/g(n), \hat{\rho}_n + H(0.975) \times 1/g(n)) \\
&= (1.000780 + (-11.235)/5348935.735, 1.000780 + 9.689/5348935.735) \\
&= (1.0007779, 1.000781811)
\end{aligned}$$

となる.

また, Standard Cauchy 分布の%点を使った $\rho_{n,m}$ の 95% 信頼区間は

$$\begin{aligned}
& (\hat{\rho}_n + C(0.025) \times 1/g(n), \hat{\rho}_n + C(0.975) \times 1/g(n)) \\
&= (1.000780 + (-12.706)/5348935.735, 1.000780 + 12.706/5348935.735) \\
&= (1.000777625, 1.000782375)
\end{aligned}$$

となる.

2つの信頼区間を比べると, ほとんど差がない. なぜなら, 数値積分の結果より $c=1, m=7$ で分布関数 $H(x, c, m)$ はほぼ standard Cauchy 分布に収束していることがわかっていて, $c=1, m=9$ のときは Standard Cauchy 分布にさらに漸近しているので, 2つの信頼区間は差がないことになる.

したがって, m がある程度大きければ Phillips, Wu and Yu(2011)のように Standard Cauchy 分布を使って信頼区間を推定してよいことがわかる.

しかし, m が小さい場合, たとえば $m=1, 2, 3$ のような場合, バブルのピークまでの期間の日経 225 日次データはそのケースには該当しないが,

数値積分結果より最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分布は Standard

Cauchy 分布よりもむしろ nonstandard な分布の方に近いので, 遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ を使った方が, より正確な信頼区間を求めることができると思われる.

m が小さいとき $\rho_{n,m}$ の信頼区間を求める場合, $m \rightarrow \infty$ のときの極限分布である Standard Cauchy 分布ではなく, 遷移分布

$$\frac{2c}{e^{cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s) / \frac{4c^2}{e^{2cm}} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds$$

の分布関数 $H(x, c, m)$ を使った方が望ましいことになる.

3.2 バブルピーク以降の期間: 1990/1/4~2009/12/30

1 階の自己回帰過程において根が 1 に近く定常であるような期間の例として, 日経 225 平均株価日次データ (終値) のバブルピーク以降の期間を取り上げる. ここでは, バブルピーク以降の期間としてリーマンショックあたりまでの期間 (1990/1/4~2009/12/30) を取った.

図 3 にこの期間における日経 225 (終値) 日次データの動きを示したが, 1 階の自己回帰過程において根が 1 の場合の, つまりランダムウォークのときのデータの動き方に似ている.

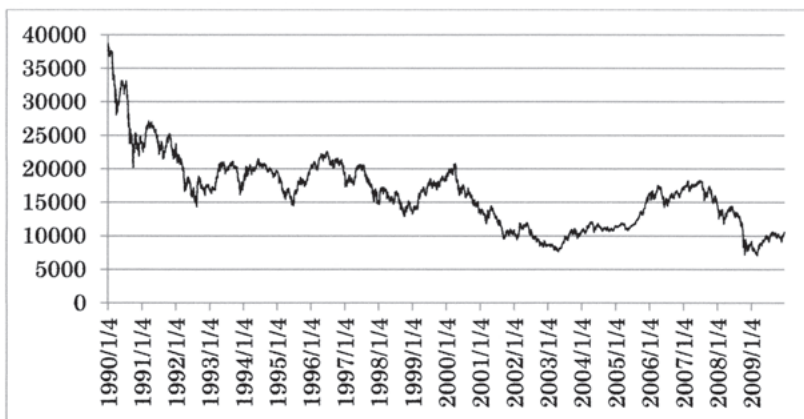


図 3 : 日経 225(終値)日次データ: 1990/1/4~2009/12/30.

この期間で(2)式の $\rho_{n,m}$ を最小2乗法で推定すると

$$1990/1/5 \sim 2009/12/30: n=4921, \hat{\rho}_n = 0.9971426 = 1 - 0.0028574$$

となる. この期間の動きは1階の自己回帰過程において根が1をわずかに下回る定常過程で近似できることになる.

$c < 0$ のときつまり mildly stationary な場合, $g(n) = n/\sqrt{m}$ で標準化した最小2乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ を使って $\rho_{n,m}$ の 95% 信頼区間を推定し, $m \rightarrow \infty$ のときの遷移分布である正規分布 $N(0, -2c)$ を使った場合の, $\rho_{n,m}$ の 95% 信頼区間と比較する.

次の図4は, $c < 0$ のときの, 標準化した最小2乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ のグラフである. $c = -5, m = 1$ および3のときの $H(x, c, m)$ の数値積分結果と $m \rightarrow \infty$ のときの遷移分布の極限である正規分布 $N(0, -2c)$ の分布関数を重ねて描いたものである.

Hisamatsu(2016)では, $c = -5, m = 30$ のときの, $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分布関数の数値積分結果が示されていて, それを見ると $m = 30$ のとき遷移分布の形状は正規分布 $N(0, -2c)$ にかなり近づいていることがわかるが, 本稿において数値積分で評価して描いた図4からは, $m = 3$ ではむしろ $m = 1$ のときの遷移分布の方に形状が近く, 正規分布 $N(0, -2c)$ のとは分布関数の形状にかなりの違いがあることがわかる. したがって, それぞれの分布における 2.5% 点と 97.5% 点の位置も違ってくることになる.

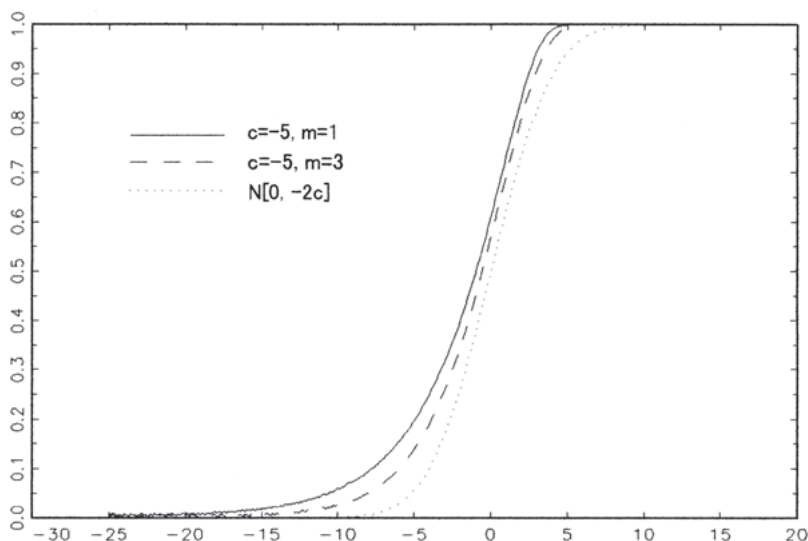


図 4 : $c < 0$ のときの $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の分布関数

図 5 は $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の $c = -5$, $m = 3$ のときの遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ を数値積分で評価したグラフと, $n = 4921$, $c = -5$, $m = 3$ のときの 100000 回のシミュレーションによる経験分布のグラフおよび $m \rightarrow \infty$ のときの遷移分布の極限である正規分布 $N(0, -2c)$ の分布関数を重ねて描いたものである. この図よりシミュレーションによる $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の経験分布は $N(0, -2c)$ ではなく数値積分で評価した遷移分布の分布関数とほぼ重なっていることがわかる.

したがって, $c < 0$ のときに $\rho_{n,m}$ の信頼区間を求める場合は, $m \rightarrow \infty$ のときの遷移分布である正規分布 $N(0, -2c)$ よりも Hisamatsu(2016)で導出し数値積分で評価した遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ を使った方が, より正確な区間推定が得られることになる.

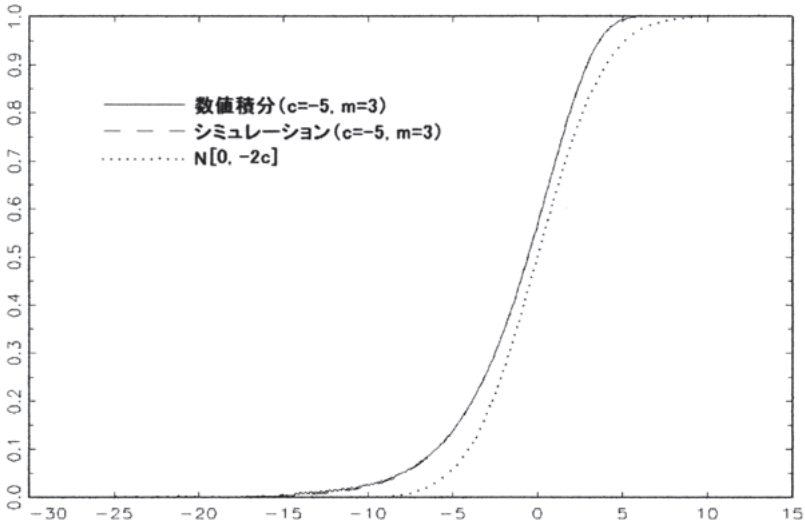


図 5 : $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布, 経験分布 ($n=4921$), 正規分布

実際に, 図 3 で示したバブルのピーク以降リーマンショックまでの期間 (1990/1/4~2009/12/30) における日経 225 日次データ (終値) を使って,

$\rho_{n,m}$ を最小 2 乗法で推定し 95%信頼区間を求めてみる.

$cm=14.06121183$ より $m=2.812 \div 3$ と置いて, $c=-5$, $m=3$ のときの $H(x,c,m)$ と $N(0,-2c)$ の分布関数の値を求めると以下の通りになる.

x	H(x, -5, 3)
-9.9	0.024268637
-9.8	0.027585164 → 比例配分で計算した $H(0.025) = -9.8779620$
4.1	0.97155449
4.2	0.97549810 → 比例配分で計算した $H(0.975) = 4.18736944$

x $N(0, -2c)$ ただし, $c = -5$.

・ 6.2 0.024962142

・ 6.1 0.026866091 → 比例配分で計算した $N(0.025) = -6.1980$

6.1 0.97313391

6.2 0.97503786 → 比例配分で計算した $N(0.975) = 6.1980$

なお, $N(0, -2c)$ は左右対称なので 2.5%点と 97.5%点は±同じ値になる.
 $H(x, c, m)$ の数値積分値から遷移分布の 2.5%点と 97.5%点を比例配分で
 計算すると, それぞれ $H(0.025) = -9.8779620$, $H(0.975) = 4.18736944$,
 また, 正規分布 $N(0, -2c)$ の分布関数より, 2.5%点と 97.5%点はそれぞれ
 $N(0.025) = -6.1980$, $N(0.975) = 6.1980$ となる.

これより, $c < 0$ のとき $H(x, c, m)$ を使った $\rho_{n,m}$ の 95% 信頼区間は

$$g(n) = n/\sqrt{m} = 4921/\sqrt{3} = 2841.1407 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} & (\hat{\rho}_n + H(0.025) \times 1/g(n), \hat{\rho}_n + H(0.975) \times 1/g(n)) \\ & = (0.9971426 + (-9.87796)/2841.14, 0.9971426 + 4.187369/2841.14) \\ & = (0.993666, 0.998616). \end{aligned}$$

となる. また, 正規分布 $N(0, -2c)$ ただし $c = -5$ のときの 95% 信頼区間は

$$\begin{aligned} & (\hat{\rho}_n + N(0.025) \times 1/g(n), \hat{\rho}_n + N(0.975) \times 1/g(n)) \\ & = (0.9971426 + (-6.1980)/2841.14, 0.9971426 + 6.1980/2841.14) \\ & = (0.994961, 0.999324). \end{aligned}$$

となる.

分布の形状は分布関数よりも密度関数を重ねて見た方がわかりやすい.

$c < 0$ のとき, $g(n) = n/\sqrt{m}$ で標準化した $\rho_{n,m}$ の最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の密度関数 $h(x, c, m)$ は

$$h(x, c, m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \text{Re al}[\partial \psi_m(u, v) / \partial x] du \quad (11)$$

で与えられる. $h(x, c, m)$ の数値積分可能な式の導出と具体的な数値評価については, 煩雑になるので Hisamatsu(2016)に譲ることにして (11) 式の表現にとどめる.

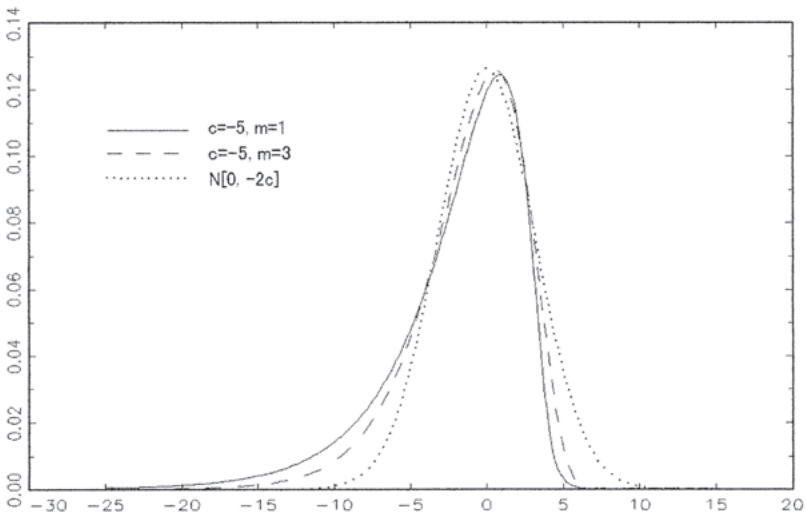


図 6 : $c < 0$ のときの $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の密度関数

図 6 は $c < 0$ のときの $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の密度関数 $h(x, c, m)$ のグラフで、 $c = -5$, $m = 1, 3$ の時の $h(x, c, m)$ の数値積分結果と $N(0, -2c)$ を重ねて描いたものである。

Hisamatsu(2016)では、 $m = 30$ のときの遷移分布の密度関数 $h(x, c, m)$ を数値積分で評価したグラフが示されていて、それを見ると $m = 30$ では遷移分布の形状が $m \rightarrow \infty$ のときの遷移分布の極限である正規分布 $N(0, -2c)$ にかなり近いことがわかるが、今回数値積分で評価して描いた図 6 より、 $m = 3$ のときの遷移分布の密度関数 $h(x, c, m)$ の形状はむしろ $m = 1$ のときのいわゆる nonstandard な分布の方に近く、正規分布 $N(0, -2c)$ とは分布の形状がかなり違っていることがわかる。遷移分布の形状および 2.5%点と 97.5%点の位置の違いは、分布関数 $H(x, c, m)$ よりも密度関数 $h(x, c, m)$ のグラフで見た方がわかりやすい。

したがって、 $c < 0$ のとき $\rho_{n,m}$ の 95%信頼区間を求める場合は、 m の値が小さい場合、 $m \rightarrow \infty$ のときの $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布である正規分布 $N(0, -2c)$ ではなく、 $m < \infty$ のときの遷移分布

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s) / \frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds$$

の分布関数 $H(x, c, m)$ の 2.5%点と 97.5%点を使う方が、より正確な信頼区間が得られることになる。

本節で取り上げたバブルのピーク以降リーマンショックまでの期間 (1990/1/4 ~ 2009/12/30) で日経 225 日次データ (終値) を使って $\rho_{n,m}$ を最小 2 乗法で推定し 95%信頼区間を求める例はこのケースにあたる。

なお、 m がある程度大きければ、 $m \rightarrow \infty$ のときの遷移分布の極限である正規分布 $N(0, -2c)$ の 2.5%点と 97.5%点を使って区間推定すればよい。

4. むすび

平均株価あるいは個別業種の株価のデータに 1 階の自己回帰モデルをあてはめると、推定する期間によっては自己回帰係数 $\rho_{n,m}$ の推定値が 1 をほんのわずかに上回る、あるいはわずかに下回る場合がよく観察される。

Phillips et al.(2010)で展開されている“Local to moderate unit root theory”では、1 階の自己回帰係数が 1 に近い定常過程、1 に近い非定常過程を次のようなモデルで定式化し、

$$X_t = \rho_{n,m} X_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$\rho_{n,m} = 1 + cm/n$$

において $\rho_{n,m}$ が通常の速さよりもゆっくり 1 に近づく場合の、標準化した

最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布 (transition distribution) について Wiener 過程の汎関数を使った漸近理論が与えられている。しかし、Wiener 過程の汎関数を見ても具体的な分布の形状はわからないので、分布の形状を見ることと同時に $m < \infty$ のときの遷移分布を厳密に導出して、その 2.5%点と 97.5%点を使って $\rho_{n,m}$ の信頼区間を求めることを考えた。

Hisamatsu(2016)では、彼らがいわゆる Wiener 過程の汎関数で求めた $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の分子と分母の同時積率母関数を、反転公式を使って反転してその分布関数と密度関数を理論的に導出し、それらを数値積分で評価してグラフ化した。そして、実証分析への応用例として 1 階の自己回帰過程の根が 1 に近い非定常な場合、つまり“mildly explosive”な過程における $\rho_{n,m}$ の 95%信頼区間を、遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ の %点を使って推定している。 $c > 0$ の場合で導出した実証分析への応用として、バブルのピーク以前の期間における日経 225 日次データ (終値)

を使って、1階の自己回帰係数を最小2乗法で推定する場を取り上げ、遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ と $m \rightarrow \infty$ の時の遷移分布の極限である Standard Cauchy 分布の分布関数から%点を取って $\rho_{n,m}$ の95%信頼区間を求めたが、推定結果をみると m がある程度大きい場合に相当し、 $H(x, c, m)$ が Standard Cauchy 分布に近い場合、両者のどちらをもとに信頼区間を推定するかについて有意な差は出ないことが分かった。

$c > 0$ の場合、遷移分布が $m \rightarrow \infty$ のときの極限分布である Standard Cauchy 分布に近い場合は、Phillips, Wu and Yu (2011) のように Standard Cauchy 分布を使って信頼区間を求めればよいことになる。しかし、 m が小さい場合は、 $m < \infty$ のときの遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ を使った方が、より正確な信頼区間が求められると思われる。

本稿ではこの結果をもとに、1階の自己回帰過程の根が1に近い定常な場合、つまり“mildly stationary”な過程における1階の自己回帰係数 $\rho_{n,m}$ の信頼区間を求める場合、 m の値がある程度大きければ、標準化した最小2乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の $m \rightarrow \infty$ のときの極限分布である正規分布 $N(0, -2c)$ を使って信頼区間を求めてよいが、 m の値が小さい場合は、Hisamatsu (2016) で導出して数値積分で評価した $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ を使う方がより正確な信頼区間が得られることを、バブルのピーク以降リーマンショックまでの期間における日経225日次データを使って示した。

この期間における日経225日次データ（終値）の動きは、 $c < 0$ で m の値が小さい場合にあたる。その場合、 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分布は正規分布 $N(0, -2c)$ よりもむしろ、いわゆる nonstandard な分布の方に近く、また、 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ とシミュレーションに

よる $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の経験分布を重ねてみるとほぼぴったり重なり合い、 $N(0, -2c)$ とは分布の形状が違うことが分かった。そのような場合は正規分布より $m < \infty$ のときの遷移分布の%点を使う方がより正確な信頼区間が得られることを示した。

参考文献

- [1] Evans, G.B.A., and N.E. Savin, The Calculation of the Limiting Distribution of the Least Squares Estimator of the Parameter in a Random Walk Model, 9, pp.1114-1118, The Annals of Statistics, 1981.
- [2] Hisamatsu, H., Smooth Transition of Local to Moderate Unit Root Distribution, 2016. Working Paper Series No.207, Institute of Economic Research, Kagawa University.
- [3] Hisamatsu, H., and K. Maekawa, The distribution of the Durbin-Watson statistic in integrated and near-integrated models, 61, pp.367-382, Journal of Econometrics, 1994.
- [4] Perron, P., The Calculation of the Limiting Distribution of the Least-Squares Estimator in a Near-Integrated Model, 5, 241-255, Econometric Theory, 1989.
- [5] Phillips P.C.B., 1987. Towards a unified asymptotic theory for autoregression, Biometrika, 74, 535-547.
- [6] Phillips, P. C. B., T. Magdalinos and L. Giraitis, Smoothing local-to-moderate unit root theory, 158, pp.274-279, Journal of Econometrics, 2010.
- [7] Phillips, P.C.B., Y.Wu and J.Yu, 2011. Explosive Behavior in The 1990s NASDAQ: When did Exuberance Escalate Asset Values ?, International Economic Review, 52, 201-226.
- [8] White, J.S., The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case, 29, pp. 1188-1197, Annals of Mathematical Statistics, 1958.