

単位根の漸近理論の最近の進展

久松博之

1. はじめに

久松 (2015)では, Peter C. B. Phillips とその共著者たちによって展開されてきた, いわゆる “Local to Moderate Unit Root Theory” について, それまでの単位根の推定と検定に関するいくつかの理論的な研究と関連付けながら, 分布の漸近理論を体系的にサーベイした. Hisamatsu (2016)では, その中で取り上げた Phillip, Magdalinos and Giraitis (2010, 以下 PMG と略す)の 1 階の自己回帰 (AR(1): Autoregressive Process of order 1)の係数が 1 をわずかに上回る mildly explosive な場合と, 1 をわずかに下回る mildly stationary な場合について, 標準化した最小 2 乗推定量の遷移分布 (transition distribution) の分布関数と密度関数を導出し, 数値積分で分布を評価した. そして, 1 階の自己回帰係数が 1 の場合, つまり単位根を持つ場合の非標準的 (nonstandard) な分布から, 根が 1 より大きい場合の極限分布 (Cauchy 分布) に至る, あるいは根が 1 より小さい場合の極限分布 (正規分布) に至る分布の遷移する様子をグラフで示した.

“Local to Moderate Unit Root Theory” のその後には出版された論文に, Phillips(2014), Phillips and Lee (2015, 2016), Bykhovskaya and Phillips (2017a,b), Lieberman and Phillips (2014, 2017a, b), Chen, Phillips and Yu (2017), Tao, Phillips and Yu (2017), Lee (2018)などがある.

一つの方向性としては, たとえば Bykhovskaya and Phillips (2017a,b), Lieberman and Phillips (2014, 2017a,b)で展開されている, AR(1)係数の構造に時変性を想定する, あるいは確率変動要素を含めるといった想定で分布の漸近理論を精緻化する試みである.

もう一つの方向性は, Phillips and Lee (2015, 2016), Chen, Phillips and Yu (2017)で展開されている, 回帰モデルの説明変数が AR(1)モデルにしたがいがい, その根が 1 をわずかに上回る, いわゆる mildly explosive case

を想定するときの AR(1)パラメータの推測に関する分布の漸近理論の展開である。説明変数が AR(1)で mildly explosive な場合、単位根を持つ場合、mildly stationary な場合がありうるが、それらを並べて同時に推定する Mixed Regression Model を誤差項の分散共分散情報を利用して変換して推定する Seemingly Unrelated Regression (SUR)法と最小 2 乗法で推定する場合とで効率性がどのように違うか比較することが可能と思われる。

本稿では、AR(1)係数の構造に時変性を持たせる、あるいは、確率変動要素を含める想定での統計学的推測理論の精緻化について整理する。第 2 節では、"Local to Moderate Unit Root Theory"について概観し、第 3 節では Lieberman and Phillips (2014, 2017a,b)の STUR, LSTUR モデル、および Bykhovskaya and Phillips (2017a,b)の FLUR モデルについて整理する。第 4 節では前節までにサーベイしたことをもとに、今後の研究の可能性について触れ、たとえば Hisamatsu (2016, 2018)と同様な方法で分布の数値評価ができないかについても展望する。最後に第 5 節で総括する。

2. Local to moderate unit root theory について

1 階の自己回帰過程を考える。

$$X_t = \rho X_{t-1} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

ここで、 $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ 、 $X_0 = 0$ とする。 $\rho = 1$ のとき系列 $\{X_t\}$ は単位根 (unit root) をもつという。 $\rho < 1$ のとき系列 $\{X_t\}$ は定常過程、 $\rho > 1$ のとき発散過程になる。それぞれの場合、normalizer を $g(n)$ とするとき、標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho} - \rho)$ の分布の漸近理論は White (1958), Anderson (1959) などで展開されている。

PMG (2010) では n 個の観測値を k 個ずつ m ブロックに分けて $n = mk$ と置いて、

$$\rho_{n,m} = 1 + cm/n \quad (2)$$

と想定し、 m を固定して $n \rightarrow \infty$ のときの漸近分布を求め、次に $m \rightarrow \infty$ のときの、nonstandard な分布と正規分布とを橋渡しするための遷移分布、および nonstandard な分布と Standard Cauchy 分布とを橋渡しするための遷移分布を Wiener 過程の汎関数で求めた。

PMG (2010)によれば、 $c < 0$ のとき $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ で $g(n) = n/\sqrt{m}$ と置いて m を固定して $n \rightarrow \infty$ とすると、遷移分布

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &= \frac{n}{\sqrt{m}} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。さらに、 $m \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow N(0, -2c) \quad (4)$$

となる。また、 $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$ より

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(1-\rho_{n,m})}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{n}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{-2c}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow N(0, 1) \quad (5)$$

である。PMG (2010)ではこの標準化した最小 2 乗推定量の分布の分割数 m に関する漸近展開式

$$F(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{m}} \varphi(x) \frac{1+x^2}{\sqrt{-2c}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad (6)$$

が与えられている。ここで、 $\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数、 $\varphi(x)$ は標準正規分布の密度関数である。

一方、 $c > 0$ のとき、 m を固定して $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) &= \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \\ &= \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} \left(\frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{2cm \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{e^{cm} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} \end{aligned} \quad (7)$$

さらに、 $m \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow \text{Standard Cauchy} \quad (8)$$

となる。ここで、 $J_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} dW(s)$ であり、 W は標準ブラウン運動

(Brownian Motion : 以下 BM と略す)、 $J_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} dW(s)$ は対応する

Ornstein-Uhlenbeck (以降 OU と略す) 過程で、 $\tilde{W}(t) = \sqrt{m}W(t/m)$ は

標準 BM であり $\tilde{J}_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} d\tilde{W}(s)$ は対応する OU 過程である。

Hisamatsu (2016)では, White (1958), Evans and Savin (1981), Perron (1989), Hisamatsu and Maekawa (1994)と同様の方法で, $c < 0$ のとき $g(n) = n/\sqrt{m}$ で標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分布関数と密度関数, および, $c > 0$ のとき $g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm}$ で標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分布関数と密度関数

$$H(x, c, m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} ag[\psi_m(u, -ux)]}{u} du \quad (9)$$

$$h(x, c, m) = \frac{d}{dx} H(x, c, m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \psi_m(u, v)}{\partial v} \right]_{v=-ux} du \quad (10)$$

を Gurland (1948)の反転公式を使って導出し数値積分で分布を評価した.

さらに, Hisamatsu (2018) では, $c < 0$ のとき漸近的に標準正規分布にしたがうように, $g(n) = n/(\sqrt{m}\sqrt{-2c})$ で標準化した最小 2 乗推定量

$g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分布関数と密度関数を導出し, PMG (2010)の $c < 0$ の

ときの漸近展開式 $F(x)$ の近似の精度を調べている. その結果, n が有限

の場合の $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の経験分布 (累積相対度数分布) と $H(x, c, m)$ と

$F(x)$ を比較してみると, 経験分布への近似の精度は, $H(x, c, m)$ の方が

漸近展開 $F(x)$ よりもよいことが示されている。また、 $H(x, c, m)$ の十分性 (adequacy) についても、シミュレーションを使って調べている。

PMG (2010) では、 $c > 0$ のとき、 $g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm}$ で標準化した

最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の分布(密度関数)の、 n ではなく分割数 m のパワーシリーズの漸近展開式

$$f(r) = \frac{1}{\pi(1+r^2)} + \frac{2r(1-r^2)}{\pi(1+r^2)}(cm-1)e^{-cm} + O(m^2 e^{-2cm}) \quad (11)$$

が与えられている。右辺第 1 項は Standard Cauchy 分布の密度関数そのものである。この式では、 x を r で表している。

Hisamatsu (2018) では、 $c > 0$ のとき $g(n) = \frac{1}{2c} \frac{n}{m} e^{cm}$ で標準化した

最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の密度関数を使って、PMG (2010) の $c > 0$ のときの漸近展開式 $f(r)$ の近似の精度を調べている。

その結果、 n が有限の場合の $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の経験分布(相対度数分布)と $h(x, c, m)$ と $f(r)$ のグラフを重ねてみると、経験分布への近似の精度は $h(x, c, m)$ の方が漸近展開 $f(r)$ よりもよいことが示されている。また、 $c > 0$ のときの、遷移分布の分布関数 $H(x, c, m)$ の十分性 (adequacy) についてもシミュレーションを使って調べている。

3. Local to Moderate Unit Root Theory 後の展開

3.1 Lieberman and Phillips の STUR, LSTUR

Lieberman and Phillips (2017a, 以下 LP と略す)では AR(1)係数を次のように想定し, それぞれ違う呼び方をしている. 表記を統一し LP(2017a) の θ_n を ρ_n で表す.

$$X_t = \rho_n X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

① Local to Unit Root (LUR) : $\rho_n = e^{c/n} \sim 1 + c/n$,

② Mildly Integrated (MI) : $\rho_n = 1 + c/k_n$,

③ Stochastic Unit Root (STUR) : $\rho_n = \exp\{a'u_t / \sqrt{n}\} \sim 1 + a'u_t / \sqrt{n}$,

④ Local Stochastic Unit Root (LSTUR) :

$$\rho_n = \exp\left(c/n + a'u_t / \sqrt{n}\right) \sim 1 + c/n + a'u_t / \sqrt{n}.$$

Lee (2018)では AR(1)モデルで誤差項に条件付き分散不均一性を想定して最小 2 乗推定量, GLS, t-比などの分布の漸近理論を展開しているが, ρ_n は, ① LUR : $\rho_n = e^{c/n} \sim 1 + c/n$ および ② MI : $\rho_n = 1 + c/k_n = 1 + c/n^\delta$

ただし $c > 0$, $\delta \in (0, 1)$, を想定している.

また, 前節でその概要を説明した PMG (2010)の”Local to Moderate Unit Root Theory”は②MI に対応していて, $\rho_n = 1 + c/k_n = 1 + cm/n$ と置いて n を k_n 個ずつ m ブロックに分け m を固定して $n \rightarrow \infty$, 次に $m \rightarrow \infty$ に持っていく漸近理論で, m に関して exact な $n \rightarrow \infty$ のときの標準化した最小 2 乗推定量の極限分布を, PMG (2010)では遷移分布 (transition distribution) と呼んでいる.

③の STUR は 1 に $a'u_t / \sqrt{n}$ を加えることで ρ_n が確率時変パラメータ (stochastic time varying parameter) になっている. STUR は, それ以前に出版された LP (2014)でも扱われている.

LUR は $\rho_n = e^{c/n} \sim 1 + c/n$ で c が定数の Local to Unit Root であるのに対し, STUR では ρ_n の単位根からの乖離は $O_p(n^{-1/2})$ で u_t に依存して確率的に変動する. STUR については, もともと Granger and Swanson(1997) で取り上げられていたが, 推測の漸近理論は示されていないかった.

④の LSTUR では, c/n が含まれて 1 の近傍での揺らぎを $c/n + a'u_t/\sqrt{n}$ で表している. AR(1)係数にこのような混み入った想定をすることの現実妥当性, あるいはメリットは何か. 単純な 1 階の自己回帰モデルでは, 現実のデータの動きを追うことができていないということだろうが, LP (2017a) のように想定すれば実際にフォローできるようになるのか.

LP (2017a) では LSTUR を想定することの意味を次のように説明している. ρ_m の極限を取ると, 連続時間数理ファイナンスの分野で考察されてきたオプション価格の構造モデルに対応する非線形確率定差方程式を満たす, 一つの非線形 diffusion 過程になっている. 確率時変パラメータ (stochastic time varying parameter) ρ_m の c と a は, 確率定差方程式の構造パラメータであり非線形最小 2 乗法(NLLS)で推定するが, その方法は, Tao et al.(2017)が展開した確率定差方程式の構造パラメータを推定する手法とリンクする. LSTUR では, 1 の近傍での揺らぎ部分を, $c/n + a'u_t/\sqrt{n}$ で表していて, これを LP (2017)では HYBRID モデルと呼んで, このように DGP (data generating process)を想定したときのパラメータ推測の漸近理論を展開している. 表記を統一するために LP (2017a)の β_m をここでは ρ_m で表すと, そこでの AR(1)係数の推定に関する漸近理論は,

$$\begin{aligned} X_1 &= \varepsilon_1, \\ X_t &= \rho_m X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (13)$$

$$\rho_m = \exp\left(c/n + a'u_t/\sqrt{n}\right) \sim 1 + c/n + a'u_t/\sqrt{n}$$

という想定モデルで、 n で標準化した最小2乗推定量 $n(\hat{\rho}_m - 1)$ の漸近分布が Wiener 過程の汎関数で与えられている。これが、通常の Random Walk モデルの推測の漸近理論と何がどう違うのかということになる。

LP (2017a)では、 $w_t = (u_t, \varepsilon_t)'$ がマルチンゲール差分であれば

$$n(\hat{\rho}_m - 1) \Rightarrow c + \frac{a' \Sigma_u a}{2} + \frac{a' \int_0^1 G_{a,c}^2(r) dB_u(r) + \int_0^1 G_{a,c}(r) dB_\varepsilon(r)}{\int_0^1 G_{a,c}^2(r)^2 dr} \quad (14)$$

ここで、 $X_{t=[nr]} / \sqrt{n} \Rightarrow G_{a,c}$ および $\frac{1}{n^2} \sum_t u_t u_t' X_{t-1}^2 \Rightarrow \Sigma_u \int_0^1 G_{a,c}^2(r) dr$,

となるとしている。 ρ_m の c と a がいずれも0の場合、通常の Random Walk モデルにおける最小2乗推定量の漸近分布に帰着することがわかる。

単位根帰無仮説のもとでの、 $\hat{\rho}_m$ に対応する t -比の漸近分布が

$$t_{\hat{\rho}} = n(\hat{\rho}_m - 1) / \left(\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 / n^{-2} \sum_t X_{t-1}^2 \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \left(\int_0^1 G_{a,c}(r)^2 dr \right)^{1/2} \\ \times \left(c + \frac{a' \Sigma_u a}{2} + \frac{a' \int_0^1 G_{a,c}^2(r) dB_u(r) + \int_0^1 G_{a,c}(r) dB_\varepsilon(r)}{\int_0^1 G_{a,c}^2(r)^2 dr} \right) \quad (15)$$

で与えられている。ここで、 $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ は σ_ε^2 の一致推定量である。この式で a が

0の場合、Local to Unit Root (LUR) : $\rho_n = e^{c/n} \sim 1 + c/n$, の場合の t -比

に帰着する。LSTUR : $\rho_m = \exp(c/n + a'u_t/\sqrt{n}) \sim 1 + c/n + a'u_t/\sqrt{n}$ で

a を 0 にするということは確率的に変動する項を想定しないことになるが、LP (2017a) ではこのことが ρ_n の信頼区間を作成する場合にどう影響するかについて、シミュレーションを使って調べている。

正しいモデルが LSTUR 過程のとき、LUR 過程で 1 からの乖離を定義すると過小定式化したことになるが、このとき $c + (a\sigma_u)^2$ が大きくなるほど ρ_n の信頼区間の幅はより広くなるというのが最も特筆すべき性質だと指摘している。

PMG (2010) では、 $\rho_n = 1 + c/k_n = 1 + cm/n$ で 0 ではない c の値を想定し単位根に極めて近い定常、極めて近い非定常な場合を考えていて、 $c < 0$ および $c > 0$ のときの、それぞれ異なる normalizer $g(n)$ を使って標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の遷移分布を Wiener 過程の汎関数で求めた。このときの ρ_m は 1 ではない。つまり c は未知パラメータではなく $\{X_t\}$ のデータ生成過程で $c < 0$ および $c > 0$ の状況を想定するための定数で、 c に正または負の値を想定して、1 に極めて近いときの推定量の遷移分布がどうなるかを考えた。それに対して LP (2017a) では、標準化した最小 2 乗推定量は $n(\hat{\rho}_m - 1)$ で、真の値は ρ_m ではなく 1 であり、このときの c, a は未知パラメータなので推定の対象となる。 c, a の非線形最小 2 乗推定量(NLLS)の漸近分布が以下のように与えられている。

$$(\hat{c}_n - c) \Rightarrow \left(\int_0^1 G_{a,c}^2(r) dr \right)^{-1} \times \left(\int_0^1 G_{a,c}^2(r) dB_\varepsilon(r) + \Delta_{u\varepsilon}' a \int_0^1 G_{a,c}(r) dr + \lambda_{\varepsilon\varepsilon} \right) \quad (16)$$

$\Sigma_{u\varepsilon} \neq 0$ であるとき

$$(\hat{a}_n - a) \Rightarrow \left(\int_0^1 G_{a,c}^2(r) dr \right)^{-1} \left(\int_0^1 G_{a,c}^2(r) dr \right) \Sigma_u^{-1} \Sigma_{u\varepsilon}. \quad (17)$$

3. 2 Bykhovskaya and Phillips の FLUR, MIFURL, MEFLUR

久松 (2015) で整理したように, "Local to Moderate Unit Root Theory"

では, ρ がゆるやかに 1 に近づく場合を表現するために, $\rho_n = 1 + c/k_n$,

$k_n = n/m$, n 個の観測値を k_n 個ずつ m ブロックに分ける. たとえば

m	k_n	$\rho_n = 1 + c/(n/m)$	α	$\rho_n = 1 + c/n^\alpha$
1	n	$\rho_n = 1 + c/(n/1) = 1 + c/n$	1	$\rho_n = 1 + c/n$
2	$n/2$	$\rho_n = 1 + c/(n/2)$		
10	$n/10$	$\rho_n = 1 + c/(n/10)$		
\sqrt{n}	n/\sqrt{n}	$\rho_n = 1 + c/(n/\sqrt{n}) = 1 + c/\sqrt{n}$	0.5	$\rho_n = 1 + c/\sqrt{n}$
100	$n/100$	$\rho_n = 1 + c/(n/100)$		
n	n/n	$\rho_n = 1 + c/(n/n) = 1 + c$	0	$\rho_n = 1 + c$

と場合分けをすると, $m=2$ のとき $k_n = n/2$ で $\rho_n = 1 + c/(n/2)$ は,

$m=1$ で $k_n = n$, $\rho_n = 1 + c/(n/1) = 1 + c/n$ のときに比べて 1 に近づく

速さが半分, $m=10$ で $k_n = n/10$, $\rho_n = 1 + c/(n/10)$ は 1 に近づく速さ

が 1/10 という想定になる. m の値ごとに $n \rightarrow \infty$ のときの漸近分布が異なり, PMG (2010) ではそれを遷移分布 (transition distribution) と呼んだ.

ここでは、PMG (2010)の“Local to Moderate Unit Root Theory” の AR(1)パラメータの想定との違いに注意しながら、Bykhovskaya and Phillips (2017a, b, 以下 BP と略す)の FLUR モデルについて整理する。

FLUR とは、Functional Local to Unit Root の頭文字を取ったもので、一階の自己回帰モデル (AR(1)) の係数を ρ_m と置いて

$$X_t = \rho_m X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,n \quad (18)$$

$$\rho_m = \exp(c(t/n)) \approx 1 + c(t/n)/n$$

と想定している。この場合、LUR とは違って ρ_m は定数ではなく、1に近い、いわゆる時変パラメータ (time varying parameter) である。

$$X_t = \left(1 + \frac{c(t/n)}{n}\right) X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1,2,\dots,n, \text{ より,}$$

$$X_1 = \left(1 + \frac{c(1/n)}{n}\right) X_0 + \varepsilon_1,$$

$$X_2 = \left(1 + \frac{c(2/n)}{n}\right) X_1 + \varepsilon_2,$$

⋮

$$X_n = \left(1 + \frac{c(n/n)}{n}\right) X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

となる。

観測されるデータは $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ である。標準化した過程について

$$\frac{X_{\lfloor nr \rfloor}}{\sqrt{n}} \rightarrow F_c(r) := \omega K_c(r) = \omega \int_0^r \exp\left\{ \int_s^r c(a) da \right\} dW(s) \quad (19)$$

となる。ここで、 W は標準ブラウン運動、 $K_c(r)$ は拡散方程式 (diffusion equation) $dK_c(r) = c(r)K_c(r)dr + dW(r)$ を満たす。

PMG (2010) では、 $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$ という想定で $c < 0$ のときと $c > 0$ のとき、それぞれ違う $g(n)$ で標準化した最小 2 乗推定量 $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の極限分布を、 m を固定して $n \rightarrow \infty$ 、次に $m \rightarrow \infty$ という順番で極限を取った。mildly stationary と mildly explosive で $g(n)$ が違うので $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$ の定義が $c > 0$ 、 $c < 0$ でそもそも違うし、 $g(n)$ も c と m の値がその想定だとすればということ分布を計算することになるので、 $\rho_{n,m}$ が mildly stationary、単位根、mildly explosive な想定で統計量が統一的是にはなっていない。

それに対して、BP (2017b) の想定では mildly stationary、単位根、mildly explosive な観測期間が含まれる場合に、推定量や検定量を Wiener 過程の汎関数を使って統一的に捉えることができている。

AR(1)係数が FLUR の想定のもとでの漸近理論”boundary limit theory”をこれになぞらえて考えると $n \rightarrow \infty$ 、 $c(\bullet) \rightarrow \pm\infty$ を続けてあるいは同時に取る漸近理論を考えることができる。“sequential limit”を取るという場合、

まず $n \rightarrow \infty$, 続いて $c(\bullet) \rightarrow -\infty$ とする極限の取り方を, $(-c, n)_{seq} \rightarrow \infty$ と

いう表記で表し, まず $n \rightarrow \infty$, 続いて $c(\bullet) \rightarrow \infty$ とする極限の取り方を

$(c, n)_{seq} \rightarrow \infty$ という表記で表している.

BP (2017b)では, 観測期間についてその中の部分期間を取ってみると, ある部分期間では定常な動きを, ある部分期間では発散的な動きを, それ以外の部分期間では単位根にしたがう動きを観測することがあるが, まず $n \rightarrow \infty$, 続いて $c(\bullet) \rightarrow \pm\infty$ という極限の取り方は, そのように系列の動き方が部分期間ごとに違う場合の分布の漸近理論を提供することになる.

全観測期間を 3 つの部分期間に分けて $0 < r_1 < r_2 < 1$ での ρ_m の値の取り方を次のように想定している.

$$\begin{aligned} \rho_m &= 1 & t \leq \tau_1 = \lfloor nr_1 \rfloor \\ &= 1 + c(t/n)/n & t \in (\tau_1, \tau_2], \tau_2 = \lfloor nr_2 \rfloor \\ &= 1 & t > \tau_2 \end{aligned} \quad (20)$$

部分期間ごとに動き方が違う想定で, 単位根過程にしたがう 2 つの部分期間に挟まれた真ん中の部分期間は, AR(1)係数が $\rho_m = 1 + c(t/n)/n$ で時変パラメータの想定であり $c(\bullet)$ の符号によって 1 に近い定常, 1 に近い非定常な動きの部分期間となる.

$\{X_t\}$ を逐次代入して得られる, いわゆる **partial sum** を期間ごとにまとめることができ, 次式のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
X_t &= \left\{ X_{-1} + \sum_{s=0}^t \varepsilon_s \right\} 1\{t \leq \tau_1\} \\
&+ \left\{ \sum_{j=0}^{t-\tau_1-1} \varepsilon_{t-j} \prod_{l=0}^{j-1} \rho_{t-l,n} + X_{\tau_1} \prod_{l=0}^{t-\tau_1-1} \rho_{t-l,n} \right\} 1\{t \in (\tau_1, \tau_2]\} \\
&+ \left\{ \sum_{s=\tau_2+1}^t \varepsilon_s + X_{\tau_2} \right\} 1\{t > \tau_2\}.
\end{aligned} \tag{2 1}$$

この想定で、 $c(\bullet) \rightarrow \pm\infty$ のときの漸近理論が次のように与えられている。

(1) $c(\bullet) \rightarrow -\infty$ のときの漸近理論

BP (2017b)では、標準化した観測値の系列 $\{X_t\}$ 、AR(1)係数 ρ_m の最小2乗推定量およびそれにもとづくt比の漸近的な性質について、ブラウン運動およびWiener過程の汎関数を用いて、次のような漸近理論を与えている。その際、 $c(t) = c \cdot f(t)$ と置いて、 c は $\pm\infty$ に収束するスカラーで $f(t)$ は1(単位根)からの乖離を規定する一定の符号を持つ積分可能な関数であると想定する。“sequential limit”を取る場合は、まず $n \rightarrow \infty$ 、続いて $c \rightarrow -\infty$ とする極限の取り方でこれを $(-c, n)_{seq} \rightarrow \infty$ と表す。このとき

$$\frac{X_{\lfloor nr \rfloor}}{\sqrt{n}} \rightarrow B^a(r) \times 1\{0 \leq r \leq r_1\} + B^b(r) \times 1\{r_2 \leq r \leq 1\} \tag{2 2}$$

に収束する。ここで、 B^a 、 B^b はそれぞれ部分期間 $[0, r_1]$ および $(r_2, 1]$ に対応する互いに独立なブラウン運動である。

n で標準化した ρ_m の最小 2 乗推定量の漸近分布は、 $(-c, n)_{seq} \rightarrow \infty$ のとき

$$n(\hat{\rho}_{OLS} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_{r_2}^1 B^b(r) dB^b(r) + \lambda - \frac{1}{2} \omega^2 r_2}{\int_0^{r_1} B^a(r)^2 dr + \int_{r_2}^1 B^b(r)^2 dr} \quad (23)$$

となる。さらに、 $\hat{\rho}_{OLS}$ に対応する t -比の漸近分布は、 $(-c, n)_{seq} \rightarrow \infty$ のとき

$$t_{\hat{\rho}_{OLS}} \xrightarrow{d} \frac{\int_{r_2}^1 B^b(r) dB^b(r) + \lambda - \frac{1}{2} \omega^2 r_2}{\sigma \left(\int_0^{r_1} B^a(r)^2 dr + \int_{r_2}^1 B^b(r)^2 dr \right)^{1/2}} \quad (24)$$

となる。ここで、 $\lambda = \frac{1}{2}(\omega^2 - \sigma^2)$ 、ただし ω^2 はブラウン運動 B^a 、 B^b の分散である。

(20) 式では、単位根過程にしたがう 2 つの部分期間に挟まれた部分期間は $\rho_m = 1 + c(t/n)/n$ という時変パラメータの想定で、 $n(\hat{\rho}_{OLS} - 1)$ および $t_{\hat{\rho}_{OLS}}$ で単位根検定を行うと一致検定 (consistent test) ではなくなるとしている。 $c \rightarrow -\infty$ のとき単位根過程にしたがう 2 つの部分期間に挟まれた真ん中の部分期間では系列は単位根に近い定常な動きをするが、この部分期間の存在が確率 1 で見逃されてしまうことになる。

(2) $c(\bullet) \rightarrow \infty$ のときの漸近理論

BP (2017b) では標準化した観測値の系列 $\{X_t\}$, AR(1) 係数 ρ_m の最小 2 乗推定量とそれにもとづく t -比の漸近的な性質について, 次のような結果を得ている. その際, $c(t) = c \cdot f(t)$ と置いて, c は $\pm\infty$ に収束するスカラーで $f(t)$ は 1 つつまり単位根からの乖離を規定する一定の符号を持つ積分可能な関数であると想定する.

“sequential limit” を取る場合は, まず $n \rightarrow \infty$, 続いて $c \rightarrow \infty$ とする極限の取り方で, これを $(c, n)_{seq} \rightarrow \infty$ と表す. ρ_m が 1 を上回る explosive な場合である.

$(c, n)_{seq} \rightarrow \infty$ のとき,

$$\left\{ \exp\left(-c \int_{r_1}^{r_2} f(a) da\right) \right\} \frac{X_{\lfloor nr \rfloor}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} B^a(r_1) \times 1 \{r_2 \leq r \leq 1\}. \quad (2.5)$$

また, スケール項を掛けた最小 2 乗推定量は

$$\begin{aligned} & \left\{ \exp\left(c \int_{r_1}^{r_2} f(a) da\right) \right\} \times n \left(\hat{\rho}_{OLS} - 1 - \frac{\int_0^1 c f(r) F_c^2(r) dr}{n \int_0^1 F_c^2(r) dr} \right) \\ & \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{r_1(1-r_2)}} C \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる. C は Standard Cauchy 分布である.

標準化した最小 2 乗推定量を 1 からの差で定義すると次式の通り退化する.

$$n(\hat{\rho}_{OLS} - 1) \xrightarrow{d} \frac{1}{2(1-r_2)} \quad (27)$$

なお, $\hat{\rho}_{OLS}$ に対応する $t_{\hat{\rho}_{OLS}}$ は,

$$\left\{ \exp\left(-c \int_{r_1}^{r_2} f(a) da\right) \right\} \times t_{\hat{\rho}_{OLS}} \xrightarrow{d} \frac{\omega \sqrt{r_1}}{2\sigma \sqrt{1-r_2}} |N(0,1)| \quad (28)$$

となる. ここで B^a は分散 ω^2 の独立なブラウン運動, C は Standard Cauchy 分布である. $n \rightarrow \infty$ のときの $X_{[nr]} / \sqrt{n}$ の極限は

$$\begin{aligned} &= B^a(r), \quad r \leq r_1, \\ \frac{X_{[nr]}}{\sqrt{n}} &\rightarrow F_c(r) = J_c(r; r_1), \quad r_1 < r \leq r_2, \\ &= B^b(r) + J_c(r_2; r_1), \quad r_2 < r \leq 1 \end{aligned} \quad (29)$$

で定義される. ここで, B^a, B^b は, $B^a \perp B^b$ である互いに独立なブラウン運動で, 非線形 diffusion 要素 $J_c(r_2; r_1)$ は次式の通りである.

$$\begin{aligned} J_c(r; r_1) &= \int_0^r \exp\left(c \int_s^r f(a) da\right) dB(s) \\ &= \exp\left(c \int_{r_1}^r f(a) da\right) B^a(r_1) + \int_{r_1}^r \exp\left(c \int_s^r f(a) da\right) dB(s). \end{aligned} \quad (30)$$

すべての $r \in [r_1, r_2]$ に対して $f(r) \geq C > 0$ であるとき, ρ_m の最小 2 乗推定量の漸近分布は

$$\left\{ \exp \left(c \int_{r_1}^{r_2} f(a) da \right) \right\} \times n \left(\hat{\rho}_{OLS} - 1 - \frac{1 - \exp \left\{ -2c \int_{r_1}^{r_2} f(a) da \right\}}{2n \left(1 - r_2 + \int_{r_1}^{r_2} \exp \left\{ -2c \int_{r_1}^r f(a) da \right\} dr \right)} \right) \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{3r_1(1-r_2)}} C \quad (31)$$

で与えられる. ここで, C は Standard Cauchy 分布である.

(26) 式と (31) 式を比べてみると, いずれも矢印左辺が

$$\left\{ \exp \left(c \int_{r_1}^{r_2} f(a) da \right) \right\} \times n \left(\hat{\rho}_{OLS} - (1 + \Delta) \right)$$

の形をしているが, 一方は Δ が Wiener 過程の汎関数つまり確率変数であるのに対して, もう一方は Δ が非確率変数であるということ, 矢印右辺を見ると Cauchy 分布の前に掛かっているスケール調整項が $1/\sqrt{3}$ 倍だけ違っている.

BP (2017b) では, 全観測期間を 3 つの部分期間に分けて, $0 < r_1 < r_2 < 1$ での ρ_m の値の取り方を

$$\begin{aligned} \rho_m &= 1 & t \leq \tau_1 = \lfloor nr_1 \rfloor \\ &= 1 + c(t/n)/n & t \in (\tau_1, \tau_2], \tau_2 = \lfloor nr_2 \rfloor \\ &= 1 & t > \tau_2 \end{aligned}$$

のように想定し、単位根過程にしたがう 2 つの部分期間に挟まれた真ん中の部分期間は、AR(1)係数が $\rho_m = 1 + c(t/n)/n$ という時変パラメータを想定していて、 $c(\bullet)$ の符号によって 1 に近い定常、1 に近い非定常な動きの期間になる。

次の図 1 は Hisamatsu (2016) で示した日経 225 (終値) 日次データでバブル現象が観察される観測期間のデータであるがその動き方を見ると、unit root \rightarrow mildly explosive \rightarrow バブルのピーク \rightarrow mildly stationary \rightarrow unit root というパターンの動き方をしているように見える。



図 1 : 日経 225 (終値) 日次データ: 1949/5/16~2015/12/30

実際にバブルのピークの前後の期間で AR(1)係数を最小 2 乗推定すると

$$1949/5/17 \sim 1989/12/29: \quad n=11882, \quad \hat{\rho}_n = 1.000780 = 1 + 0.000780,$$

$$1990/1/5 \sim 2015/12/30: \quad n=6392, \quad \hat{\rho}_n = 0.999561 = 1 - 0.000439$$

となる。 $\hat{\rho}_n$ の値はバブルのピーク前では 1 をわずかに上回り、ピーク後は 1 をわずかに下回っている。

これをもとに ρ_m の構造を考えるとすれば、 $0 < r_1 < r_2 < r_3 < 1$ と置いて、 $[0, r_1], (r_1, r_2], (r_2, r_3], (r_3, 1]$ の 4 つの部分期間を考え、それぞれ

$$\begin{aligned} [0, r_1] \cdots \rho_m &= 1, & c &= 0, \\ (r_1, r_2] \cdots \rho_m &= 1 + c \cdot f(t/n)/n, & c &\rightarrow \infty, \\ (r_2, r_3] \cdots \rho_m &= 1 + c \cdot f(t/n)/n, & c &\rightarrow -\infty, \\ (r_3, 1] \cdots \rho_m &= 1, & c &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

と想定するのが現実的であろう。

この場合も、 $\{X_t\}$ を逐次代入していわゆる partial sum を 4 つの期間ごとにまとめた式を導出し、極限を取ったときの収束先をブラウン運動で表して、 ρ_m の最小 2 乗推定量やそれをもとにした $t_{\hat{\rho}_{OLS}}$ 検定量の漸近分布を Wiener 過程の汎関数で導出し、(3.2) 式のような部分期間を想定したとき $n(\hat{\rho}_{OLS} - 1)$ および $t_{\hat{\rho}_{OLS}}$ を検定統計量として単位根検定を行うと、一致検定 (consistent test) になるかどうかを調べてみる必要がある。

BP (2017b) では FURL をさらに改良した想定

$$\begin{aligned} X_t &= \rho_m X_{t-1} + \varepsilon_t, & t &= 1, 2, \dots, n \\ \rho_m &= 1 + c(t/n)/k_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

のときの漸近理論が展開されている。Phillips and Magdalinos (2007) ほかで扱われている Mildly Integrated (MI) モデル: $\rho_n = 1 + c/k_n$, と同じ

ように ρ_m の 1 への収束の速さがゆるやかな想定で, Mildly Integrated / Explosive Functional Local Unit Root (MIFLUR, MEFLUR) と呼んでいる. さらに, MEFLUR については ρ_m についてのもう一つの想定

$$\rho_m = 1 + c(t/k_n)/k_n$$

を考えている. ρ_m の 1 への収束の速さが $O(1/k_n)$ とよりゆるやかな想定である. このとき, $\{X_t\}$ は逐次代入することで, いわゆる partial sum と初期値 X_0 に関する項との和で次式のように表される.

$$\begin{aligned} X_t &= \rho_m X_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= \sum_{j=1}^t \exp\left\{ \frac{1}{k_n} \sum_{l=1}^{t-j} c\left(\frac{t-l+1}{n}\right) \right\} \varepsilon_j + \exp\left\{ \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^t c\left(\frac{j}{n}\right) \right\} X_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\rho_m = 1 + c(t/n)/k_n$ という想定で, $c(r) \geq C > 0$ のときに, 標準化した最小 2 乗推定量の分布は, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{t=1}^n \rho_m}{\left[(\rho_m^2 - 1)(\rho_{ln}^2 - 1) \right]^{1/2}} \\ & \times \left(\hat{\rho}_{OLS} - 1 - \frac{\sum_{t=1}^n c(t/n) \exp\left\{ -(2/k_n) \sum_{j=t}^n c(j/n) \right\}}{k_n \sum_{t=1}^n \exp\left\{ -(2/k_n) \sum_{j=t}^n c(j/n) \right\}} \right) \xrightarrow{d} C \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。ここで、 C は Standard Cauchy 分布である。

また、 $c(\bullet) = c > 0$ のとき、 ρ_m の標準化した最小 2 乗推定量は $n \rightarrow \infty$ で

$$\frac{\rho_n^n}{\rho_n^2 - 1} \times \left(\hat{\rho}_{OLS} - 1 - \frac{c}{k_n} \right)^d \rightarrow C. \quad (36)$$

この結果は、Phillips and Magdalinos (2007) の Mildly Integrated (MI) モデル: $\rho_n = 1 + c/k_n$ の想定での標準化した最小 2 乗推定量の $n \rightarrow \infty$ のときの分布が Standard Cauchy 分布に収束するという結果と符合している。

なお、 $c(r) \leq -C < 0$ のときの次の統計量の漸近分布が与えられている。

$$\frac{X_{\lfloor nr \rfloor}^{fdd}}{\sqrt{k_n}} \rightarrow X_c(r) =_d N\left(0, \frac{\sigma^2}{-2c(r)}\right), r \in (0, 1]. \quad (37)$$

さて、BP (2017a) では FLUR モデル

$$X_t = \rho_m X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

$$\rho_m = \exp(c(t/n)) \approx 1 + c(t/n)/n$$

を想定し、

$$H_0 : c \equiv 0 \quad (\text{単位根つまり } \rho_m = 1)$$

$$H_1 : c \neq 0 \quad (\rho_m = \exp(c(t/n)) \approx 1 + c(t/n)/n)$$

の単位根検定統計量の検定のパフォーマンス (検定のサイズと検出力) を、

シミュレーションを使って調べている。

まず、 $X_n(r) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma}} S_{[nr]}$, $S_t = u_1 + u_2 + \dots + u_t$ を定義する。

$$\frac{X_{[nr]}}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma K_c(r) = \sigma \int_0^r \exp\left\{\int_s^r c(k) dk\right\} dW(s) \quad (38)$$

ここで $K_c(r)$ は、確率定差方程式： $dK_c(r) = c(r)K_c(r)dr + dW(r)$ に

したがう Wiener 過程である。

尤度比検定量を作るために尤度関数を定義する。

$$d_t^c := \frac{1}{\sqrt{n\sigma}} \left(X_t - \exp\{c(t/n)/n\} X_{t-1} \right) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma}} u_t \quad (39)$$

ここで、 d_t^c は異なる時点 t について独立で、 $d_t^c \sim N(0, 1/n)$ を想定すると

正規分布の密度関数 $(1/\sqrt{2\pi/n}) \exp\{-d^2/(2/n)\}$ より尤度関数を定義

できる。尤度比検定では、

$$\exp\left\{-\sum_t (d_t^0)^2 / (2/n)\right\} / \exp\left\{-\sum_t (d_t^c)^2 / (2/n)\right\} \leq \eta \quad (40)$$

のときに、帰無仮説は棄却されることになる。ここで、

$$d_t^0 = \frac{1}{\sqrt{n\sigma}} (X_t - X_{t-1}), \quad d_t^c = \frac{1}{\sqrt{n\sigma}} \left(X_t - \exp\{c(t/n)/n\} X_{t-1} \right)$$

である。

検定統計量 S は

$$S := \frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_t (X_t - X_{t-1})^2 - \sum_t \left(X_t - e^{c(t/n)/n} X_{t-1} \right)^2 \right) \geq \alpha \quad (4.1)$$

となる.

$H_0: c \equiv 0$, $H_1: c \neq 0$ のもとでの検定統計量 S の漸近分布は, $n \rightarrow \infty$ のとき, それぞれの仮説のもとで,

$$H_0: S \rightarrow \int_0^1 c(s) W(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 c^2(s) W^2(s) ds,$$

$$H_1: S \rightarrow \int_0^1 c(s) K_c(s) dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 c^2(s) K_c^2(s) ds$$

で与えられる.

BP (2017a) では, 点最適検定 (point optimal test) の方法論を展開しシミュレーションで検定のサイズや検出力などのパフォーマンスを比較している. シミュレーションで検出力を計算するには, 具体的に対立仮説値を決めないといけないが, $c(\bullet)$ にどんな関数を想定するかで検出力も違ってくる. 実際には正しい対立仮説関数はわからないので, それに代るいわゆる代理対立仮説関数 (proxy alternative function) を想定することになる. その場合の尤度比検定量の検出力をグラフにしているが, これとは別に, 正しい対立仮説関数のもとでの検出力を極大化達成可能検出力 (maximal attainable power) と呼んで, 代理対立仮説関数の下での検出力のグラフとは違う色の線でグラフ化している. そして, いくつかの代理対立仮説関数 $\bar{c}_\lambda(x)$ の想定を変えたときの検出力と極大化達成可能検出力をグラフで比較しているが, 対立仮説の置き方の違いで両者の検出力が近い場合とかけ離れている場合が報告されている.

また、この論文で提案している点最適検定といわゆる Dickey - Fuller 検定で単位根検定をする場合の検出力をシミュレーションで比較している。対立仮説関数の値は負の値を想定し Dickey-Fuller 分布の左裾で片側検定を行っている。そして、これら 2 つの検定の検出力と極大化達成可能検出力の 3 つのグラフを描いていて、ここで提案している尤度比検定と Dickey-Fuller 検定の検出力のグラフはほぼ重なり合っているが、両者のグラフと極大化達成可能検出力のグラフはかなりかけ離れていることが報告されている。

4. 今後の研究の可能性について

Hisamatsu (2016)では、日経 225 株価日次データを使ってバブルのピークまでの期間で 1 階の自己回帰モデルを OLS で推定すると係数推定値が 1 をわずかに上回ることを確認し、自己回帰係数の信頼区間を求める場合 Phillips, Wu and Yu (2011)のように Standard Cauchy 分布の%点を使う方がいいのか、 $c > 0$ のときの $H(x, c, m)$ の%点を使う方がいいのか検討している。また、久松 (2018) はバブルのピーク以降の期間については AR(1)の係数推定値が 1 をわずかに下回ることを確認し、自己回帰係数の信頼期間を求める場合、標準正規分布 $N[0, 1]$ を使う場合と Hisamatsu (2018)で求めた $c < 0$ のときの $H(x, c, m)$ の%点を使う場合とではどちらの方が望ましいかについて考察している。

PMG (2010) および Hisamatsu (2016, 2018)において、 $c > 0$ 、 $c < 0$ で異なる normalizer $g(n)$ を想定したときの標準化した最小 2 乗推定量の漸近理論は、定常、非定常な観測期間のそれぞれについて $\rho_{m,n} = 1 + cm/n$ で $n \rightarrow \infty$ 、 $m \rightarrow \infty$ とするときの漸近理論が与えられている。これに対して BP (2017b)では boundary limit theory と称して一つの観測期間内で 3 つの部分期間があって、それぞれ、単位根、1 に近い定常または非定常、単位根のような動きをする部分期間がある場合の、推定と検定の漸近理論

を与えている.

BP (2017b)のようにAR(1)係数をFLURで表し $c(\bullet)$ を何か特定の関数を想定して, それは $c(t) = c \cdot f(t)$ のような想定でもいいが, Hisamatsu (2016, 2018)のようにGurband (1948)の反転公式を使って具体的に統計量の分布関数および密度関数を導出して数値評価するには, 標準化した最小2乗推定量の分子と分母の同時積率母関数(虚数単位を含めると同時特性関数になる)が書けないといけないが, 書き下せたとしてもかなり複雑になるのと, 特性関数を反転するには極形式(複素関数: $a+bi$)のかたちで表現できて実部と虚部を取り出せないといけないが, それが可能であるかどうかで決ってくる.

BP (2017a)をもとに応用問題を考えるとすれば, 本文にも書いたように, $0 < r_1 < r_2 < r_3 < 1$ と置いて $[0, r_1], (r_1, r_2], (r_2, r_3], (r_3, 1]$ の4つの部分期間を考えそれぞれ

$$\begin{aligned} [0, r_1] \cdots \rho_m &= 1, & c &= 0, \\ (r_1, r_2] \cdots \rho_m &= 1 + c \cdot f(t/n)/n, & c &\rightarrow \infty, \\ (r_2, r_3] \cdots \rho_m &= 1 + c \cdot f(t/n)/n, & c &\rightarrow -\infty, \\ (r_3, 1] \cdots \rho_m &= 1, & c &= 0 \end{aligned}$$

と想定して $\{X_t\}$ を逐次代入しいわゆるpartial sumを4つの期間ごとにまとめた式を導出して, 極限を取ったときの収束先をブラウン運動で表し, 標準化した ρ_m の最小2乗推定量とそれをもとづく $t_{\hat{\rho}_{OLS}}$ 検定量の漸近分布をWiener過程の汎関数で導出する. 4つの部分期間を想定したとき, $n(\hat{\rho}_{OLS} - 1)$ および $t_{\hat{\rho}_{OLS}}$ を検定量として単位根検定を行う場合, 一致検定(consistent test)になるのか調べる必要がある. ただしこのような想定

で $(r_1, r_2]$ $(r_2, r_3]$ の区間の間にちょうどバブルのピークが来ることになるかは、対立仮説関数の想定を変えてデータを生成してみないとわからない。

5. まとめ

日経225日次データではバブルピークより前の観測期間と後の観測期間についてAR(1)係数推定値がそれぞれ1をわずかに上回り、1をわずかに下回ることがわかっている。そのことが、実際の株価の動きに対してAR(1)モデルで、単位根に近い mildly explosive, mildly stationary を想定することに説得力を持たせてくれる。

ここ最近のPhillipsの一連の単著・共著論文では、AR(1)係数にlocalパラメータが単純な定数を想定し、ゆるやかに1に近づく設定のlocal alternativeではなく、STUR, LSTUR, FLURのように、AR(1)係数が単位根に近い場合について、時変パラメータの構造を想定する、あるいは確率的な変動要素が含まれるような場合を考え、推定量や単位根検定量の分布の漸近理論を展開している。

LP (2017a)では、LSTUR 過程なのにLUR 過程で1からの乖離を定義すると過小定式化したことになるが、それによって ρ_n の信頼区間幅はより広くなることを指摘している。

BP (2017b)では、長い観測期間を取った時、期間内を部分期間で見ると、ある部分期間では定常な動きを、ある部分期間では発散的な動きを、それ以外の部分期間では単位根にしたがう動きを観測することがあるが、まず $n \rightarrow \infty$, 続いて $c(\bullet) \rightarrow \pm \infty$ という極限の取り方は、そのように系列の動き方が部分期間ごとに違うときの分布の漸近理論を提供している。

参考文献

- [1] Anderson, T.W., 1959, On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations, *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 676-687.

- [2] Bykhovskaya, A., and Peter C. B. Phillips, 2017a, Boundary limit theory for functional local to unity regression, Cowles foundation discussion paper No. 3008.
- [3] Bykhovskaya, A., and Peter C. B. Phillips, 2017b, Point optimal testing with roots that are functionally local to unity, Cowles foundation discussion paper No. 3007.
- [4] Chen, Y., P.C.B. Phillips and J. Yu, 2017, Inference in continuous systems with mildly explosive regressors, *Journal of Econometrics*, 201, 400-416.
- [5] Evans, G.B.A., and N.E. Savin, 1981, The calculation of the limiting distribution of the least squares estimator of the parameter in a random walk model, *The Annals of Statistics*, 9, 1114-1118.
- [6] Granger, C.W. and N.R. Swanson, 1997, An introduction to stochastic unit-root processes, *Journal of Econometrics*, 80, 35-62.
- [7] Gurland, J., 1948, Inversion formulae for the distribution of ratios, *Annals of Mathematical Statistics*, 19, 228-237.
- [8] Hisamatsu, H., 2016, Smooth transition of local to moderate unit root distribution, *The Institute of Economic Research Working Paper Series No.207*.
- [9] Hisamatsu, H., 2018, Calculation of the local to moderate unit root distribution, mimeo.
- [10] Hisamatsu, H., and K. Maekawa, 1994, The distribution of the Durbin-Watson statistic in integrated and near-integrated models, *Journal of Econometrics*, 61, 367-382.
- [11] Lee, J. H., 2018, Limit theory for explosive autoregression under conditional heteroskedasticity, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 196, 30-55.
- [12] Lieberman, O. and P.C.B. Phillips, 2014, Norming rates and limit theory for some time-varying coefficient autoregressions, *Journal of Time Series Analysis*, 35, 592-623.

- [13] Lieberman, O., and P.C.B. Phillips, 2017a, Hybrid stochastic local unit roots, Cowles foundation discussion paper No. 2113.
- [14] Lieberman, O., and P.C.B. Phillips, 2017b, A multivariate stochastic unit root model with an application to derivative pricing, *Journal of Econometrics*, 196, 99–110.
- [15] Perron, P., 1989, The calculation of the limiting distribution of the Least-Squares Estimator in a near-integrated model, *Econometric Theory*, 5, 241-255.
- [16] Phillips, P. C. B., 2014, On confidence intervals for autoregressive roots and predictive regression, *Econometrica*, 82, 1177–1195.
- [17] Phillips, P. C. B., and J. H. Lee, 2015, Limit Theory for VARs with Mixed Roots Near Unity, *Econometric Reviews*, 34(6–10), 1034–1055.
- [18] Phillips, P.C.B., and J. H. Lee, 2016, Robust econometric inference with mixed integrated and mildly explosive regressors, *Journal of Econometrics*, 192, 433–450.
- [19] Phillips, P. C. B., T. Magdalinos, 2007, Limit theory for moderate deviations from a unit root. *Journal of Econometrics*, 136, 115-130.
- [20] Phillips, P. C. B., T. Magdalinos and L. Giraitis, 2010, Smoothing local-to-moderate unit root theory, *Journal of Econometrics*, 158, 274-279.
- [21] Tao, Y., P.C.B. Phillips and J. Yu, 2017, Random coefficient continuous systems: Testing for extreme sample path behaviour, Cowles foundation discussion paper No. 2114.
- [22] White, J.S., 1958, The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case, 29, 1188-1197, *Annals of Mathematical Statistics*.
- [23] 久松博之, 2015, 単位根の漸近理論とその応用, 『研究年報 (香川大学経済学部)』, 54, 43-77.
- [24] 久松博之, 2018, 遷移分布にもとづく AR(1)係数の期間推定, 『香川大学経済論叢』, 90, 3-4, 23-43.