

# 緩やかに定常な場合の最小二乗推定量の 分布の漸近展開と遷移分布の 近似精度の比較

久松博之

## 1. はじめに

Hisamatsu (2016)では Phillip, Magdalinos and Giraitis (2010, 以下 PMG と略す)の1階の自己回帰 (AR(1): Autoregressive Process of order 1)の係数が1をわずかに上回る緩やかに発散的 (mildly explosive) な場合と, 1をわずかに下回る緩やかに定常 (mildly stationary) な場合について, AR(1)パラメータを推定するための標準化した最小2乗推定量の遷移分布 (transition distribution) の分布関数と密度関数を導出し数値積分で評価した. また, Hisamatsu (2018) では, 数値積分で求めた遷移分布と PMG が導出した分布の漸近展開と, シミュレーションによる経験分布を使って, 緩やかに発散的 (mildly explosive) な場合について近似の精度を比較した. 久松 (2019)では, Peter C. B. Phillips とその共著者たちによって展開されてきたいわゆる “Local to Moderate Unit Root Theory” のその後の展開についてサーベイし, 今後の研究の可能性を展望した.

本稿では緩やかに定常 (mildly stationary) な場合について, 遷移分布と PMG が導出した分布の漸近展開の, シミュレーションによる経験分布への近似の精度を比較する.

第2節では PMG で展開されている Local to moderate unit root theory のうち, 緩やかに定常 (mildly stationary) な場合における, 標準化した最小2乗推定量の漸近理論と彼らが提案した分布の漸近展開について整理する. また, Hisamatsu (2016) で導出して数値積分で評価した遷移分布の分布関数と密度関数について説明し, 第3節では Hisamatsu (2018)

で求めた遷移分布の%点を使ってシミュレーション分析を行い、遷移分布と漸近展開の近似の精度を比較する。そして、第4節で結論を整理する。

## 2. 緩やかに定常な場合の Local to moderate unit root theory

1階の自己回帰過程を考える。

$$X_t = \rho X_{t-1} + u_t, \quad t=1,2,\dots,n \quad (1)$$

ここで、 $u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ ,  $X_0 = 0$  とする。

系列  $\{X_t\}$  は、 $\rho = 1$  のとき単位根 (unit root) をもつという。 $\rho < 1$  のとき定常過程、 $\rho > 1$  のとき発散過程になる。PMG では  $n$  個の観測値を  $k$  個ずつ  $m$  ブロックに分けて  $n = mk$  と置いて

$$\rho_{n,m} = 1 + cm/n = 1 + c/(n/m) = 1 + c/k_n \quad (2)$$

と想定し、 $m$  を固定して  $n \rightarrow \infty$  のときの漸近分布を求め、次に  $m \rightarrow \infty$  のときの、nonstandard な分布と正規分布とを橋渡しするための遷移分布、および nonstandard な分布と Standard Cauchy 分布とを橋渡しするための遷移分布を Wiener 過程の汎関数で求めた。

PMG によれば、 $c < 0$  のとき  $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$  で  $g(n) = n/\sqrt{m}$  と置いて  $m$  を固定して  $n \rightarrow \infty$  とすると、

$$\frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{n}{\sqrt{m}} \left( \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} u_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2} \right) \Rightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} \int_0^m \tilde{J}_c(s) d\tilde{W}(s)}{\frac{1}{m} \int_0^m \tilde{J}_c(s)^2 ds} \quad (3)$$

を得る．矢印右辺のブラウン運動の汎関数で表された確率変数の分布が、遷移分布である．ここで、 $J_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} dW(s)$  であり  $W$  は標準ブラウン運動、 $J_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} dW(s)$  は対応する Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程で、 $\tilde{W}(t) = \sqrt{m}W(t/m)$  は標準 BM であり  $\tilde{J}_c(t) = \int_0^t e^{c(t-s)} d\tilde{W}(s)$  は対応する OU 過程である．さらに、 $m \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{n}{\sqrt{m}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow N(0, -2c) \quad (4)$$

となる．また、 $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$  より

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(1-\rho_{n,m})}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{n}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{-2c}}(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \Rightarrow N(0, 1) \quad (5)$$

である．PMG では、(5) 式矢印左辺の標準化した最小二乗推定量の分布の分割数  $m$  に関する漸近展開

$$F(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{m}} \varphi(x) \frac{1+x^2}{\sqrt{-2c}} + O\left(\frac{1}{m}\right) \quad (6)$$

が与えられている．ここで、 $\Phi(x)$  は標準正規分布の分布関数、 $\varphi(x)$  は標準正規分布の密度関数である．

Hisamatsu (2016) では、White (1958), Evans and Savin (1981), Perron (1989), Hisamatsu and Maekawa (1994) と同様の方法で、 $c < 0$  のとき

$g(n) = n/\sqrt{m}$  で標準化した最小 2 乗推定量  $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$  の分子と分母の同時特性関数  $\psi_m$  を, Gurland (1948) の反転公式を使って反転して分布関数  $H(x, c, m)$  と確率密度関数  $h(x, c, m)$  を導出し数値積分で評価した.

$$H(x, c, m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im ag} [\psi_m(u, -ux)]}{u} du \quad (7)$$

$$h(x, c, m) = \frac{d}{dx} H(x, c, m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \left[ \frac{\partial \psi_m(u, v)}{\partial v} \right]_{v=-ux} du \quad (8)$$

Hisamatsu (2018) では,  $c < 0$  で  $m \rightarrow \infty$  のとき漸近的に標準正規分布にしたがうように,  $g(n) = n/(\sqrt{m}\sqrt{-2c})$  で標準化 (standardized) した最小 2 乗推定量  $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$  の分布関数と密度関数を, (7) および (8) の様式で導出し遷移分布の%点を数表化した.

### 3. シミュレーション分析

ここでは遷移分布の%点を使ってシミュレーションで nominal size にたいする real size を求めて数表に整理した. Perron (1989) が想定した標本数は  $n=10, 25, 50$  であったが, その  $n$  の想定では,  $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$  でたとえば  $c = -3$ ,  $m = 1, 2, 5, 15, 30$ , のとき  $\rho_{n,m}$  を生成すると 1 をわずかに下回るような値にはならず, 本来知りたいところの, いわゆる緩やかに定常 (mildly stationary) な場合が再現できないので, Perron の想定よりも比較的大きい  $n=100, 250, 500, 1000$  の場合についてもシミュレーションによって nominal size にたいする real size を求めて数表に整理した.

c	m	n	$\rho$	Nominal Size							
				0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
-3	1	10	0.7	0.000	0.001	0.009	0.038	0.876	0.929	0.955	0.979
		25	0.88	0.003	0.011	0.030	0.074	0.891	0.943	0.968	0.988
		50	0.94	0.006	0.017	0.039	0.086	0.897	0.948	0.971	0.989
		100	0.97	0.008	0.021	0.045	0.094	0.899	0.948	0.972	0.991
-3	2	10	0.4	0.000	0.000	0.001	0.014	0.881	0.953	0.961	0.979
		25	0.76	0.002	0.007	0.022	0.061	0.892	0.962	0.970	0.986
		50	0.88	0.005	0.014	0.035	0.080	0.897	0.965	0.973	0.989
		100	0.94	0.008	0.019	0.042	0.090	0.899	0.968	0.975	0.989
-3	5	10	-0.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.908	0.951	0.972	0.984
		25	0.4	0.000	0.001	0.006	0.028	0.903	0.951	0.974	0.989
		50	0.7	0.002	0.009	0.026	0.066	0.900	0.950	0.974	0.988
		100	0.85	0.005	0.016	0.037	0.083	0.902	0.951	0.975	0.990
-3	15	10	-3.5	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		25	-0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.970	0.989	0.995	0.998
		50	0.1	0.000	0.000	0.003	0.017	0.927	0.968	0.985	0.995
		100	0.55	0.002	0.007	0.021	0.058	0.914	0.959	0.981	0.993
-3	30	10	-8	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		25	-2.6	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		50	-0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.986	0.996	0.999	1.000
		100	0.1	0.000	0.001	0.005	0.023	0.937	0.974	0.989	0.996

表 1-a :  $c < 0$  のときの nominal size にたいする real size.

c	m	n	$\rho$	Nominal Size							
				0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
1	10	10	0.5	0.000	0.000	0.003	0.021	0.880	0.932	0.959	0.979
	25	25	0.8	0.002	0.009	0.025	0.065	0.893	0.944	0.969	0.986
	50	50	0.9	0.005	0.016	0.036	0.082	0.899	0.949	0.973	0.989
	100	100	0.95	0.007	0.019	0.043	0.091	0.897	0.948	0.974	0.989
2	10	10	0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.890	0.939	0.964	0.980
	25	25	0.6	0.000	0.004	0.014	0.047	0.897	0.947	0.972	0.987
	50	50	0.8	0.003	0.012	0.030	0.073	0.899	0.948	0.973	0.989
	100	100	0.9	0.006	0.018	0.040	0.085	0.901	0.950	0.975	0.989
5	10	10	-1.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.976	0.986	0.991	0.995
	25	25	0	0.000	0.000	0.000	0.005	0.920	0.962	0.981	0.992
	50	50	0.5	0.001	0.004	0.014	0.046	0.908	0.956	0.979	0.992
	100	100	0.75	0.004	0.012	0.030	0.074	0.905	0.954	0.977	0.991
15	10	10	-6.5	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	25	25	-2	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	50	50	-0.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.966	0.988	0.995	0.999
	100	100	0.25	0.000	0.002	0.009	0.033	0.929	0.970	0.987	0.995
30	10	10	-14	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	25	25	-5	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	50	50	-2	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	100	100	-0.5	0.000	0.002	0.000	0.000	0.978	0.994	0.998	1.000

表 1-b :  $c < 0$  のときの nominal size にたいする real size.

c	m	n	$\rho$	Nominal Size							
				0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
-10	1	10	0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.889	0.939	0.964	0.980
		25	0.6	0.000	0.003	0.014	0.047	0.896	0.946	0.971	0.987
		50	0.8	0.003	0.012	0.030	0.073	0.899	0.949	0.974	0.988
		100	0.9	0.006	0.018	0.039	0.085	0.899	0.949	0.975	0.990
	2	10	-1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.937	0.968	0.982	0.991
		25	0.2	0.000	0.000	0.002	0.015	0.910	0.955	0.977	0.990
		50	0.6	0.001	0.006	0.020	0.056	0.910	0.953	0.976	0.991
		100	0.8	0.005	0.014	0.033	0.077	0.901	0.951	0.976	0.990
	5	10	-4	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		25	-1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.983	0.994	0.997	0.999
		50	0	0.000	0.000	0.001	0.011	0.933	0.972	0.988	0.999
		100	0.5	0.002	0.006	0.019	0.052	0.915	0.961	0.981	0.993
15	10	-14	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	25	-5	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	50	-2	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	100	-0.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.969	0.993	0.998	0.999	
30	10	-29	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	25	-11	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	50	-5	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	100	-2	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	

表 1-c :  $c < 0$  のときの nominal size にたいする real size.

c	m	n	$\rho$	Nominal Size									
				0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99		
-3	1	100	0.970	0.008	0.021	0.044	0.093	0.898	0.949	0.972	0.990		
		250	0.988	0.008	0.022	0.047	0.898	0.950	0.974	0.991			
		500	0.994	0.010	0.025	0.049	0.900	0.951	0.974	0.992			
		1000	0.997	0.010	0.024	0.049	0.901	0.951	0.974	0.991			
	2	100	0.940	0.008	0.019	0.042	0.890	0.899	0.967	0.974	0.989		
		250	0.976	0.010	0.023	0.048	0.907	0.900	0.967	0.975	0.990		
		500	0.988	0.010	0.024	0.048	0.906	0.900	0.968	0.976	0.990		
		1000	0.994	0.010	0.024	0.049	0.899	0.899	0.969	0.976	0.990		
	5	100	0.850	0.005	0.016	0.037	0.882	0.899	0.949	0.974	0.989		
		250	0.940	0.008	0.021	0.045	0.902	0.901	0.951	0.975	0.990		
		500	0.970	0.010	0.023	0.047	0.908	0.900	0.950	0.976	0.990		
		1000	0.985	0.009	0.024	0.049	0.908	0.902	0.951	0.976	0.990		
15	100	0.550	0.002	0.007	0.020	0.857	0.912	0.958	0.980	0.992			
	250	0.820	0.006	0.016	0.038	0.882	0.905	0.954	0.977	0.991			
	500	0.910	0.007	0.020	0.044	0.890	0.901	0.950	0.976	0.991			
	1000	0.955	0.008	0.022	0.046	0.895	0.901	0.951	0.976	0.990			
30	100	0.100	0.000	0.001	0.005	0.823	0.937	0.974	0.989	0.997			
	250	0.640	0.003	0.009	0.029	0.870	0.913	0.960	0.981	0.993			
	500	0.820	0.006	0.014	0.039	0.885	0.907	0.955	0.979	0.991			
	1000	0.910	0.007	0.017	0.044	0.891	0.903	0.953	0.977	0.991			

表 2-a :  $c < 0$  のときの nominal size にたいする real size.



c	m	n	$\rho$	Nominal Size									
				0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99		
-5	1	100	0.950	0.007	0.020	0.044	0.092	0.899	0.949	0.974	0.990		
		250	0.980	0.009	0.023	0.048	0.898	0.949	0.974	0.990			
		500	0.990	0.009	0.023	0.048	0.901	0.951	0.975	0.990			
		1000	0.995	0.009	0.024	0.050	0.900	0.951	0.975	0.990			
	2	100	0.900	0.005	0.017	0.039	0.886	0.899	0.949	0.974	0.989		
		250	0.960	0.008	0.021	0.044	0.893	0.898	0.950	0.975	0.989		
		500	0.980	0.008	0.023	0.047	0.898	0.900	0.950	0.975	0.990		
		1000	0.990	0.009	0.023	0.048	0.899	0.900	0.950	0.975	0.989		
	5	100	0.750	0.004	0.013	0.031	0.073	0.906	0.955	0.978	0.991		
		250	0.900	0.007	0.019	0.042	0.089	0.903	0.952	0.976	0.990		
500		0.950	0.008	0.021	0.046	0.094	0.902	0.950	0.976	0.990			
1000		0.975	0.009	0.023	0.048	0.098	0.902	0.952	0.976	0.990			
15	100	0.250	0.000	0.002	0.009	0.034	0.928	0.970	0.987	0.996			
	250	0.700	0.004	0.013	0.032	0.075	0.909	0.957	0.979	0.992			
	500	0.850	0.006	0.018	0.039	0.086	0.905	0.954	0.978	0.992			
	1000	0.925	0.007	0.021	0.046	0.094	0.903	0.953	0.977	0.991			
30	100	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.978	0.984	0.988	1.000			
	250	0.400	0.001	0.006	0.017	0.050	0.926	0.968	0.986	0.997			
	500	0.700	0.004	0.014	0.032	0.075	0.912	0.959	0.982	0.996			
	1000	0.850	0.006	0.019	0.042	0.088	0.907	0.955	0.979	0.994			

表 2-b :  $c < 0$  のときの nominal size にたいする real size.

c	m	n	$\rho$	Nominal Size									
				0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99		
1	100	100	0.900	0.006	0.018	0.039	0.086	0.899	0.948	0.974	0.989		
	250	250	0.960	0.008	0.022	0.045	0.093	0.900	0.950	0.976	0.990		
	500	500	0.980	0.009	0.023	0.047	0.096	0.901	0.950	0.975	0.990		
	1000	1000	0.990	0.010	0.024	0.048	0.098	0.902	0.951	0.976	0.991		
2	100	100	0.800	0.004	0.014	0.034	0.078	0.903	0.952	0.976	0.990		
	250	250	0.920	0.007	0.020	0.043	0.090	0.903	0.951	0.976	0.991		
	500	500	0.960	0.008	0.022	0.046	0.096	0.900	0.950	0.975	0.990		
	1000	1000	0.980	0.009	0.024	0.049	0.098	0.902	0.951	0.975	0.990		
5	100	100	0.500	0.001	0.006	0.019	0.054	0.914	0.960	0.981	0.993		
	250	250	0.800	0.005	0.016	0.036	0.082	0.907	0.955	0.979	0.992		
	500	500	0.900	0.008	0.021	0.043	0.091	0.904	0.953	0.977	0.991		
	1000	1000	0.950	0.009	0.023	0.046	0.094	0.902	0.951	0.975	0.990		
15	100	100	-0.500	0.000	0.000	0.000	0.000	0.971	0.994	0.998	1.000		
	250	250	0.400	0.001	0.006	0.018	0.051	0.915	0.969	0.986	0.995		
	500	500	0.700	0.004	0.014	0.032	0.075	0.900	0.959	0.981	0.993		
	1000	1000	0.850	0.007	0.019	0.042	0.089	0.894	0.953	0.977	0.991		
30	100	100	-2.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	1.000		
	250	250	-0.200	0.000	0.000	0.001	0.011	0.965	0.989	0.997	0.999		
	500	500	0.400	0.001	0.006	0.020	0.054	0.931	0.971	0.987	0.996		
	1000	1000	0.700	0.005	0.014	0.034	0.079	0.914	0.960	0.981	0.994		

表 2-c :  $c < 0$  のときの nominal size にたいする real size.

表 1-a,b,c より Perron (1989) が 30 年前に想定した標本数  $n=10,25,50$  と  $n$  が小さい想定の場合で  $\rho_{n,m}$  を生成すると, 1 をわずかに下回るような値にはならず, 本来知りたいところの緩やかに定常 (mildly stationary) な場合が再現できていない. 一方, 最近の時系列データは年次, 四半期, 月次のような従来使われてきたデータではなく, 同じ観測期間でも日次, 分次, 秒次, ティックデータなど刻みが細かくなっていて,  $n=100, 250, 500, 1000$  という想定でも標本の大きさとしては規模の小さいデータであるが,  $n$  をこれだけ大きくすると統計学的にはいわゆる大標本であり, 有限標本特性を調べるといふ本来の目的からは逸脱してしまうことになる.

表 2-a,b,c を見ると,  $\rho_{n,m}$  の値が 1 をわずかに下回るような値の場合でも,  $n$  が比較的大きいので, real size はほぼ nominal size と同じような値になっている.

図 1 は  $c < 0$  のときの, 標準化 (standardize) した最小 2 乗推定量

$$g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) = \frac{n}{\sqrt{m}} \frac{1}{\sqrt{-2c}} (\hat{\rho}_n - \rho_{n,m}) \quad (9)$$

のシミュレーションによる経験分布, 数値積分で評価した遷移分布の分布関数  $H(x, c, m)$  と標準正規分布  $N[0,1]$  の分布関数を重ねて描いたものである. ここでのシミュレーションの繰り返し回数は 100 万回である.

図 1 は  $m=2$  と,  $m$  が小さい想定なので遷移分布の分布関数  $H(x, c, m)$  は  $m \rightarrow \infty$  のときの極限分布である  $N[0,1]$  とは形状が異なっている. また, シミュレーションによる経験分布を見ると, 標本の大きさが  $n=100$  もあれば, 経験分布と遷移分布  $H(x, c, m)$  はほぼ重なりあうことがわかる.

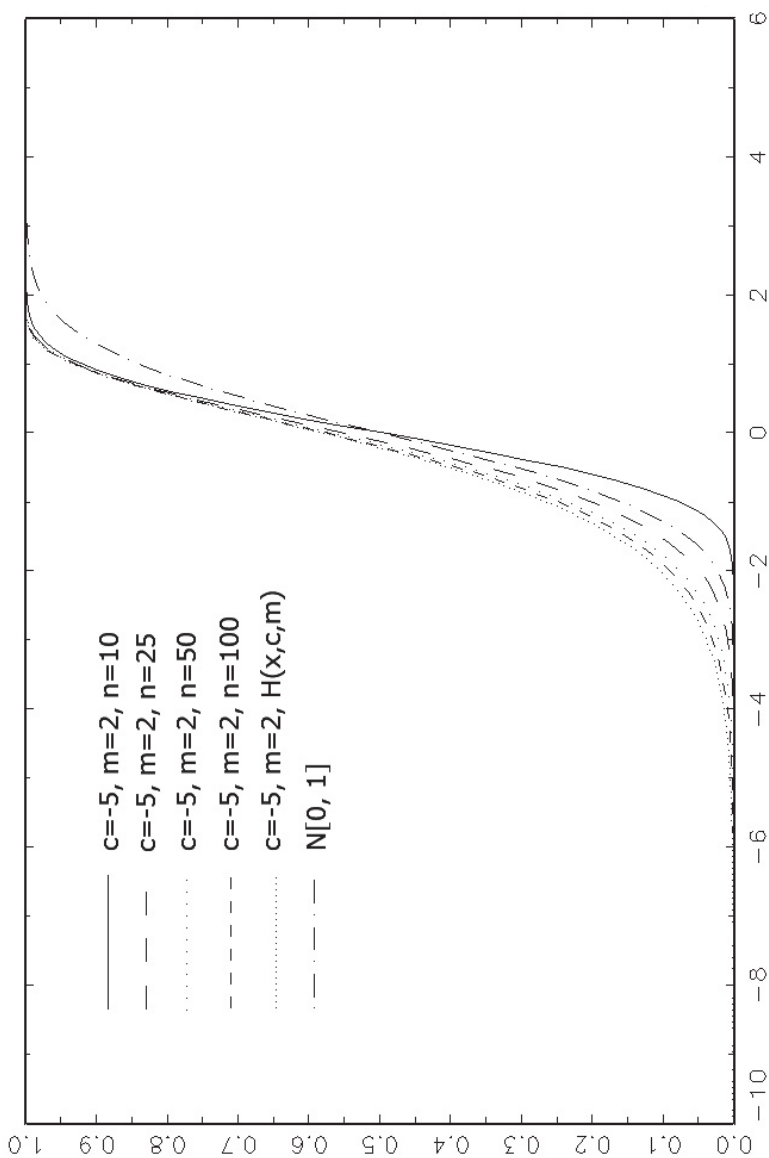


図 1:  $c < 0$  のときの経験分布, 遷移分布および標準正規分布.

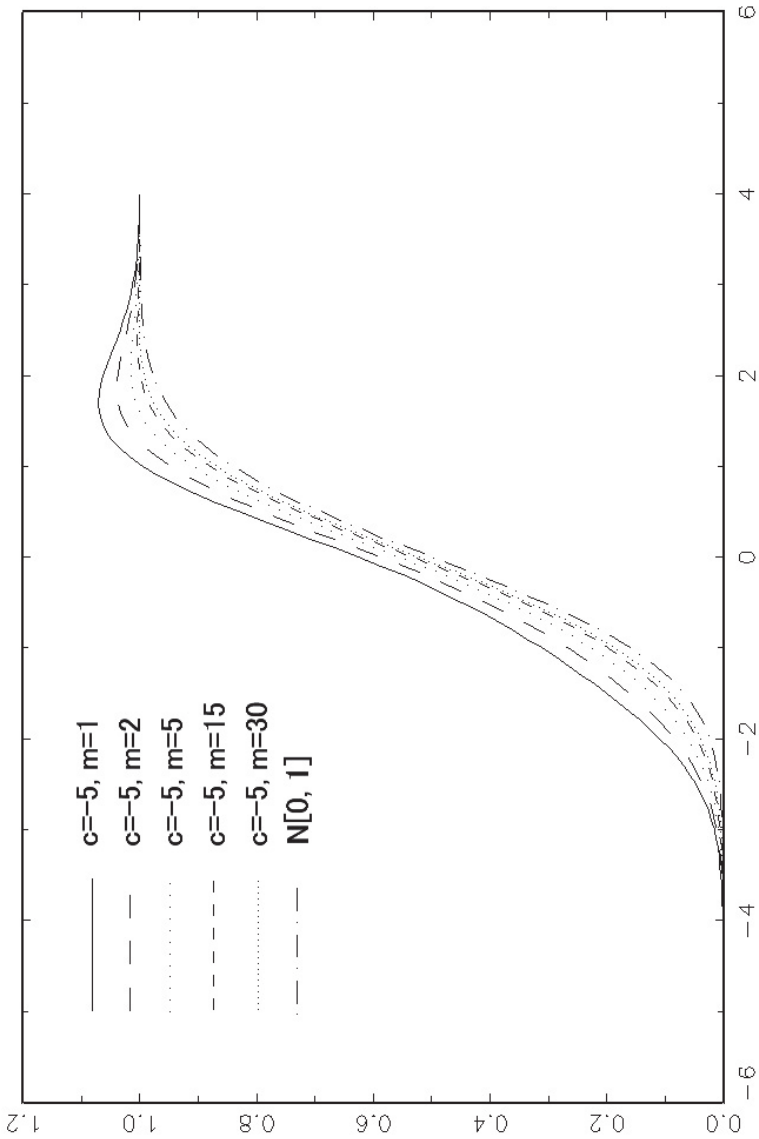


図 2 :  $c < 0$  のときの PMG の漸近展開  $F(x)$  と標準正規分布.

一方、図 2 は PMG で与えられている標準化した最小 2 乗推定量の分布の分割数  $m$  に関する漸近展開 (6) 式

$$F(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{m}} \varphi(x) \frac{1+x^2}{\sqrt{-2c}} + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

について  $c = -5$ ,  $m = 1, 2, 5, 15, 30$  を与えたときのグラフと標準正規分布  $N[0, 1]$  の分布関数を重ねて描いたものである。この式の  $\Phi(x)$  は標準正規分布の分布関数、 $\varphi(x)$  は標準正規分布の密度関数である。

$m$  が小さいとき、漸近展開  $F(x)$  のグラフは 1 を超えて波のうねりのような形状になっている。なぜこのような現象が生ずるかは Phillips (1977) で報告されている現象と同じ理由で説明できると考えられるので、ここではこれ以上詳述しない。

図 2 より漸近展開  $F(x)$  のグラフは  $m$  を大きくしていくと標準正規分布の分布関数に漸近していくことがわかる。

図 3 は、 $c = -5$ ,  $m = 2$  のときの  $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$  のシミュレーションによる経験分布と遷移分布の分布関数  $H(x, c, m)$ 、漸近展開  $F(x)$  および標準正規分布  $N[0, 1]$  の分布関数を重ねて描いたものである。この図の Edgeworth expansion が PMG の漸近展開  $F(x)$  のグラフである。

分布の形状を比較すると、遷移分布  $H(x, c, m)$  の方が、漸近展開  $F(x)$  よりも経験分布への近似の精度がよいことがわかる。

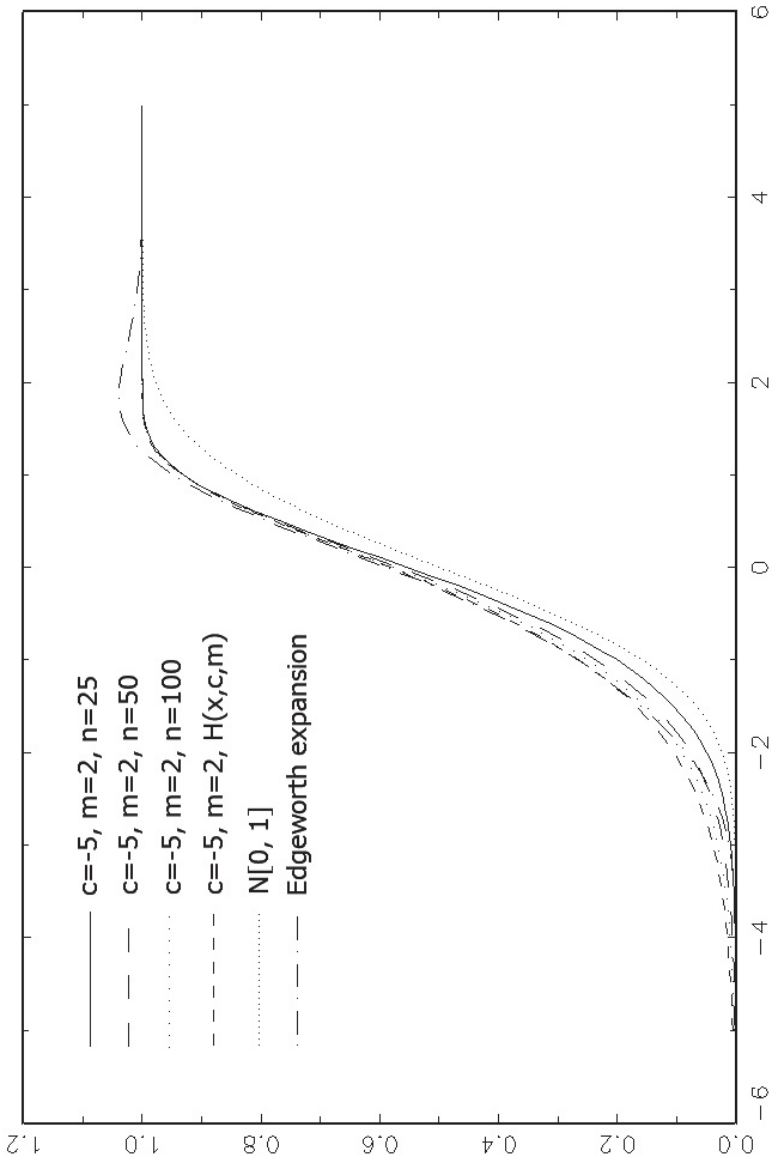


図 3 :  $c < 0$  のときの経験分布, 遷移分布, 漸近展開および  $N[0, 1]$ .

#### 4. まとめ

本稿では、1 階の自己回帰過程を考え係数が  $\rho_{n,m} = 1 + cm/n$  で定義され、 $c < 0$  のいわゆる緩やかに定常 (mildly stationary) な場合、標準化した最小二乗推定量  $g(n)(\hat{\rho}_n - \rho_{n,m})$  の遷移分布  $H(x, c, m)$  と Phillips, Magdalinos and Giraitis (2010) が導出した分布の漸近展開の経験分布への近似の精度を比較した。

$c = -5$ ,  $m = 2$  のように  $m$  が小さい場合、遷移分布  $H(x, c, m)$  の方が漸近展開  $F(x)$  よりも近似の精度が高いことがわかった。

Hisamatsu(2018)で  $c = -5$ ,  $m = 30$  のように  $m$  が大きいとき遷移分布  $H(x, c, m)$  は標準正規分布  $N[0, 1]$  にかなり漸近することがわかっている。そして、本稿の図 2 より漸近展開も標準正規分布にかなり漸近するので、 $m$  が大きい場合は近似の精度比較は意味をなさない。

久松(2018)では、1 階の自己回帰過程において根が 1 に近く定常であるような期間の例として、バブルピーク以降の期間: 1990/1/4~2009/12/30 の日経 225 平均株価日次データ(終値)で 1 階の自己回帰係数を推定した。1990/1/4~2009/12/30 では観測値数は  $n=4921$  であり、

$$\hat{\rho}_n = 0.9971426 = 1 - 0.0028574$$

となる。  $cm = -14.06121183$  より  $c = -5$  と置くと  $m = 2.812$  となるので、 $\rho_{n,m}$  を区間推定する場合、漸近展開はもはや使い物にはならない。また、この例のように  $m$  が小さい場合、 $m \rightarrow \infty$  のときの極限分布である  $N[0, 1]$



よりも遷移分布  $H(x, c, m)$  の%点を使う方が、より精度の高い区間推定が可能となる。

#### 参考文献

- [1] Evans, G.B.A., and N.E. Savin, 1981, The calculation of the limiting distribution of the least squares estimator of the parameter in a random walk model, *The Annals of Statistics*, 9, 1114-1118.
- [2] Gurland, J., 1948, Inversion formulae for the distribution of ratios, *Annals of Mathematical Statistics*, 19, 228-237.
- [3] Hisamatsu, H., 2016, Smooth transition of local to moderate unit root distribution, *The Institute of Economic Research Working Paper Series No.207*.
- [4] Hisamatsu, H., 2018, Calculation of the local to moderate unit root distribution, mimeo.
- [5] Hisamatsu, H., and K. Maekawa, 1994, The distribution of the Durbin-Watson statistic in integrated and near-integrated models, *Journal of Econometrics*, 61, 367-382.
- [6] Perron, P., 1989, The calculation of the limiting distribution of the Least-Squares Estimator in a near-integrated model, *Econometric Theory*, 5, 241-255.
- [7] Phillips P.C.B., 1977, Approximations to some finite sample distributions associated with a first-order stochastic difference equation. *Econometrica*, 45, 463-485.
- [8] Phillips, P. C. B., T. Magdalinos and L. Giraitis, 2010, Smoothing local-to-moderate unit root theory, *Journal of Econometrics*, 158, 274-279.
- [9] White, J.S., 1958, The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case, *Annals of Mathematical Statistics*, 29, 1188-1197.

- [10] 久松博之, 2015, 単位根の漸近理論とその応用, 『研究年報 (香川大学経済学部)』, 54, 43-77.
- [11] 久松博之, 2018, 遷移分布にもとづく AR (1) 係数の区間推定, 『香川大学経済論叢』, 90 (3・4), 23-43.
- [12] 久松博之, 2019, 単位根の漸近理論の最近の進展, 『香川大学経済論叢』, 91 (3・4), 67-196.